Le rapport du Jaury

Mes abréviations

« TE » : Type-Error ;

« AI » : argumentation insuffisante ;

« VC » : voir le corrigé ;

« AR » : améliorer la rédaction ;

« ASP » : affirmation sans preuve ;

« CP » : je ne comprends pas ;

« MF » : mauvaise foi ;

« N'importe quoi ! » : n'importe quoi !

Les questions marquées par un 🎁 font partie de la voiture balai de la difficulté mathématique de PC ; tandis que les questions marquées par un 🚢 sont des questions très classiques et récurrentes...
Parfois, un 🔥 peut indiquer une question difficile.

Rappelons que les résultats que vous obtenez n'ont aucune importance, hormis si vous devez les utiliser dans les questions suivantes, seuls les arguments et preuves que vous fournirez pour obtenir ces résultats sont importants.
En théorie, chaque étape de vos calculs, chaque égalité, chaque « donc », etc, doit être justifiée par un argument !

Les préconisations générales :

- *utiliser un brouillon pour vos recherches, et proposer le produit fini sur votre copie* (assiste-t-on aux recherches et répétitions d'un artiste ?) ;
- *soigner la rédaction, l'orthographe, la grammaire, le sens précis (!) des mots et des phrases utilisées ;*
- *en particulier faire l'effort de rédiger une conclusion de vos raisonnements (en la comparant à la question posée) ;*
- *et utiliser un français correct : épargner à la personne qui corrige les raisonnements qui finissent par « donc absurde » ou « donc impossible » et les flèches au milieu des phrases.*

- Attention aux additions d'équivalents ! on ne peut pas dire $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, donc $\frac{1}{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$!
  Les équivalents est compatible avec le produit (donc aussi les fractions) mais pas avec l'addition ! Tout ce qu'on peut dire c'est qu'une somme est équivalente à son terme dominant.

- Donner le domaine de définition d'une fonction c'est donner un ensemble $\mathscr{D}$ dans lequel elle est définie, **et hors duquel elle ne l'est pas !**. Trouver que le rayon de convergence d'une série entière est 1 ne suffit pas pour conclure que le domaine de définition de sa somme est $]-1\ ;\ 1[$. Ça pourrait très bien être $[-1\ ;\ 1]$!
- Dans la question 8 du problème 1, il faut montrer que n variables sont indépendantes, et quelques élèves ont montré qu'elles étaient indépendantes deux à deux, ce qui ne suffit pas du tout !
- Écrire « $f(x) = 0$ » ne veut pas dire « la fonction f est nulle », mais seulement « f s'annule en x ». Donc si on veut dire que f est nulle sur I, on écrit « $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = 0$ » !
- Dans la question 2 du second problème, il fallait prouver la relation $\mathrm{H}_{n+1} = 2\mathrm{X}\mathrm{H}_n - \mathrm{H}_n'$. Cette relation lie H_{n+1} à H_n, c'est une relation de récurrence entre les H_n, et ce genre de relation sert en général pour faire, **plus tard**, des raisonnements par récurrence, mais on ne le prouve (presque) jamais par récurrence !

  Les élèves qui ont voulu le faire auraient du constater que leur preuve de l'hérédité n'utilise pas du tout l'hypothèse de récurrence, donc que la récurrence ne sert à rien.
- Le théorème de la double-limite ne s'applique pas quand il y a des limites infinies. C'est ce que l'honnête élève devrait constater quand il essaie de l'appliquer en s'intéressant aux hypothèses (auxquelles il a accès en devoir maison) de ce théorème.
- Le degré d'une somme de deux polynômes n'est **pas** égal au maximum des degrés. Ceci n'est vrai que si on a vérifié avant que ces deux polynômes sont de degrés distincts, sinon tout ce qu'on peut dire a priori est une inégalité.

  De façon connexe, « $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ donc $\deg(\mathrm{P}) = n$ » est faux !
- Je rappelle que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(b_n)$ permet de conclure que $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_b$, et que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ donne $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$. Donc on peut se contenter de comparer les coefficients des séries entières sans y impliquer les x^n !
- Arrêtez de dire « par croissances comparées » à tort et à travers. Ça ne s'applique que pour certaines limites, donc pour obtenir des O ou des o.

  Arrêtez aussi de flanquer des « $\Rightarrow$ » au début des lignes, ou au milieu de phrases ! Ça ne s'utilise qu'au sein de phrases entièrement écrites en symbôles mathématiques.

Problème 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

1. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la différence $a_{n+1} - a_n$, puis déterminer la nature de la série numérique $\sum (a_{n+1} - a_n)$.
2. En déduire l'existence d'un réel γ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Application au problème du collectionneur de figurines

Conseillé par des publicitaires qui savent que les enfants sont aisés à manipuler, et qu'un enfant bien manipulé devient un consommateur docile, un industriel de l'agro-alimentaire décide d'insérer au fond de ses paquets de céréales une figurine de sportifs célèbres. Le modèle de figurine inséré dans le paquet est choisi de manière équiprobable parmi n modèles de référence. On considère que chaque modèle de figurine porte un numéro entre 1 et n.
Chaque paquet de céréales contient ainsi une figurine à collectionner, que l'on ne découvre qu'à l'ouverture du paquet. On se demande combien un consommateur, que l'on va appeler ici le « collectionneur », doit ouvrir de paquets pour posséder au moins un exemplaire de chacune des n figurines.
On décompose ce nombre de paquets N_n en $N_n = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$ où τ_k est le nombre de paquets supplémentaires nécessaires pour obtenir k figurines différentes quand on en a déjà $k-1$ différentes.

3. Déterminer la loi de N_1.
4. Soit $m \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Quelle est la probabilité de l'événement « le collectionneur obtient toujours la même figurine au cours de ses m premiers achats » ?
   (On pourra utiliser l'événement $C_k^{(i)}$ =« le collectionneur découvre dans le k^{e} paquet la figurine numérotée i ».)
   En déduire que $\quad \forall m \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(N_2 > m) = \frac{1}{n^{m-1}}$.
5. Déterminer alors la loi de N_2.
6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que τ_k suit une loi géométrique, dont on précisera le paramètre.

7. En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n et établir que :

$$\mathbb{E}(N_n) \underset{n\to+\infty}{=} n(\ln(n) + \gamma + o(1)).$$

8. Justifier l'indépendance des variables aléatoires $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$.
9. Démontrer que N_n admet une variance et que $\mathbb{V}(N_n) \leqslant \frac{n^2\pi^2}{6}$.
10. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que $\mathbb{P}(|N_n - \mathbb{E}(N_n)| > \varepsilon n \ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
11. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{N_n}{n\ln(n)} - 1\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Étude d'une série entière aux bornes de son disque ouvert de convergence

12. Démontrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \ln(n)x^n$, est de rayon de convergence égal à 1, puis préciser le domaine de définition de sa fonction somme f.

Étude de f en 1.

13. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers 1 par valeur inférieure.
14. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n$ de la variable réelle x dont on note alors g sa somme.
15. Montrer que : $\forall x \in]-1\,;1[,\ \ g(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$.
16. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in [0\,;1[,\ \ |f(x) - g(x)| \leqslant \frac{M}{1-x}$..
17. En déduire que $f(x) \underset{\substack{x\to1\\x<1}}{\sim} g(x)$.

Étude de f en -1.

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\begin{cases} c_1 = -1 \\ \forall n \geqslant 2,\ \ c_n = -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \end{cases}$

18. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} c_n x^n$ de la variable réelle x, dont on note alors h sa somme, est égal à 1 , puis préciser le domaine de définition de h.

19. Montrer que la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ converge et a pour somme $-\gamma$.
20. La fonction h est-elle continue en -1 ?
21. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2p}(-1)^k c_k = \ln\left(\frac{2^{4p}(p!)^4}{2p((2p)!)^2}\right) + \sum_{k=1}^{2p}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
22. Montrer que $f(x) \underset{\substack{x\to -1\\ x>-1}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

    On pourra au préalable déterminer une relation entre f et h sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

Problème 2

A - Les polynômes d'Hermite.

On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $w(x) = e^{-x^2}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$, où $w^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de w.
En particulier : $H_0(x) = 1$.

1. Calculer, pour tout $x\in\mathbb{R}, H_1(x), H_2(x), H_3(x)$.
2. Montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, que $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$.
3. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}, H_n$ est un polynôme de degré n dont vous déterminerez la parité.
4. Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le coefficient dominant de H_n.

B - Un produit scalaire.

On note E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)e^{-x^2}dx$ converge.

5. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel contenant $\mathbb{R}[X]$.
6. Montrer que l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui à tout $(f,g)\in E^2$ associe $\langle f \mid g\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E.

C - Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

7. Montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $P\in\mathbb{R}[X]$: $\langle P', H_{n-1}\rangle = \langle P, H_n\rangle$.

8. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle P \mid H_n \rangle = 0$.
9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|H_n\|^2 = \left\langle H_n^{(n)}, H_0 \right\rangle$.
    En déduire la valeur de $\|H_n\|$.

D - Étude d'un endomorphisme autoadjoint

On note u, v, w les applications définies de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par

$$u : P \mapsto -P'' + 2XP' + P, \quad v : P \mapsto 2XP - P', \quad w : P \mapsto = P'.$$

11. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par u.

Par la suite, on notera u_n l'endomorphisme induit par u sur $\mathbb{R}_n[X]$.
On admet que v et w sont aussi des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$, et on note Id l'application identique de $\mathbb{R}[X]$.

12. Établir que $v \circ w = u -$ Id et $w \circ v = u +$ Id.
13. En déduire que $u \circ v - v \circ u = 2v$.
14. Montrer que $u(P) = \lambda P$ entraîne $u(v(P)) = (\lambda + 2)v(P)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
15. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, H_k est un vecteur propre de u et déterminer la valeur propre associée.
16. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
17. Établir, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, que

$$\langle P', Q' \rangle = \langle u(P), Q \rangle - \langle P, Q \rangle.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

18. Montrer que u_n est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}_n[X]$.
19. Justifier, d'une deuxième manière, que u_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de u_n.
20. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de u_n.

Une correction du problème 1 *énoncé*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n+1} &= \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\Big) - \ln(n) - \Big(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i}\Big) + \ln(n+1) \\
&= \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\
&= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \times \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{n}\right)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) - \frac{1}{n} \times \left(1 + \left(-\frac{1}{n}\right) + o\left(-\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

   donc on obtient $a_n - a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

   La suite de terme général $\frac{1}{n^2}$ est sommable, donc la suite de terme général $\frac{1}{2n^2}$ aussi, donc par équivalence, la suite $\big(a_n - a_{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi sommable, ce qui prouve que la série $\sum \big(a_n - a_{n+1}\big)$ est convergente.

2. La relation suite-série permet d'en déduire la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. D'où en notant γ sa limite, on obtient

$$\begin{aligned}
a_n &\underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1) \\
\text{c'est-à-dire } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n) &\underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1) \\
\text{autrement dit } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} &\underset{n\to+\infty}{=} \gamma + \ln(n) + o(1). \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

Application au problème du collectionneur de figurines

> *D'après l'énoncé, si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note V_k le numéro de la figurine du k^e, alors la suite $(\mathrm{V}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite i.i.d. selon la loi uniforme sur $[\![1\ ;\ n]\!]$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, l'événement $\mathrm{C}_k^{(i)}$ =« le collectionneur découvre dans le k^e paquet la figurine numérotée i » suggéré* (à mon avis un peu maladroitement) *par l'énoncé est* $(\mathrm{V}_k = i)$.

3. Par définition, $\mathrm{N}_1 = \tau_1$ est le nombre de paquets nécessaires pour obtenir 1 figurine sachant qu'on n'en a déjà aucune, et cet événement est immédiatement réalisé dès que le collectionneur est en possession de la figurine du premier paquet. Donc N_1 est la variable certaine égale à 1.
4. Soit m un entier supérieur ou égal à 2.
   À l'aide des variables V_k annoncées en préambule, l'événement « le collectionneur obtient toujours la même figurine au cours de ses m premiers achats » est
   $$\bigcup_{i=1}^{n}((\mathrm{V}_1 = i)\cap\cdots\cap(\mathrm{V}_m = i)),$$
   donc par σ-additivité de la probabilité, et indépendance des V_k qui suivent toutes $\mathscr{U}\left([\![1\ ;\ n]\!]\right)$, la probabilité demandée est
   $$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^m = n\times\left(\frac{1}{n}\right)^m = \frac{1}{n^{m-1}}.$$
   Mais l'événement $(\mathrm{N}_2 > m)$ n'est-il pas exactement réalisé par le fait que le collectionneur obtienne m fois la même figurine au cours des m premiers achats ? Donc $\mathbb{P}(\mathrm{N}_2 > m) = \frac{1}{n^{m-1}}$.
   On remarque que cette égalité reste vraie pour $m = 1$, ce que l'on va utiliser dès la question suivante.
5. La variable N_2 peut être considérée comme le temps d'attente de la première figurine différente de la première obtenue, donc $\mathrm{N}_2(\Omega) = [\![2\ ;+\infty[\![$, et pour tout entier $m \geqslant 2$:
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{N}_2 = m) &= \mathbb{P}(\mathrm{N}_2 > m-1) - \mathbb{P}(\mathrm{N}_2 > m)\\ &= \frac{1}{n^{m-2}} - \frac{1}{n^{m-1}} \quad \textit{(avec la question précédente, et sa remarque en clôture)}\\ &= \frac{1}{n^{m-2}}\left(1-\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

   Chacun des paquets, à partir de celui qui a donné la $(k-1)^e$ figurine différente des précédentes, donne une figurine encore différente des $(k-1)$ précédentes avec la probabilité $\frac{n-(k-1)}{n}$, et on peut considérer ces épreuves comme indépendantes. Ainsi la variable τ_k mesure le temps d'attente de la première figurine différente des $k-1$ différentes précédentes dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, d'où τ_k suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{n-(k-1)}{n}\right)$.

7. On en déduit grâce à la linéarité de l'espérance que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \tau_k\right) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\tau_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{n-(k-1)}{n}} \quad \textit{(d'après la question précédente, et connaissant l'espérance d'une loi géométrique)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-(k-1)} \\
&= n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \textit{(en posant } n' = n-(k-1)\textit{)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n \times (\ln(n) + \gamma + o(1)), \quad \textit{(d'après la première question).}
\end{aligned}$$

8. Plutôt que de sombrer dans une preuve formelle et pénible, je me contenterai ici d'affirmer que chacune des variables τ_k dépend d'ouvertures de paquets différents des paquets concernés par les autres variables τ_i, et que les numéros des figurines contenues dans les paquets sont indépendants les uns des autres, et de conclure en invoquant le lemme des coalitions (pour faire quand même le gars qui s'y connaît).

9. Grâce à la question précédente, on peut utiliser la propriété de la variance de la somme de variables indépendantes pour conclure que, comme les τ_k ont des variances et sont indépendantes, alors $N_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k$ admet aussi une variance qui

vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\mathrm{N}_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(\tau_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\frac{n-(k-1)}{n}}{\left(\frac{n-(k-1)}{n}\right)^2} \ \textit{(car } \tau_k \sim \mathscr{G}\left(\tfrac{n-(k-1)}{n}\right)\textit{)} \\ &= n\sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{k^2} = n\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(n\times\frac{1}{k^2}-\frac{k-1}{k^2}\right)}_{\leqslant n\frac{1}{k^2}} \\ &\leqslant n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant n^2\times\frac{\pi^2}{6}, \quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable N_n est d'espérance et de variance finies, donc pour tout $\varepsilon > 0$, on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev *(avec $\varepsilon \times n\ln(n)$ à la place de ε)*

$$\mathbb{P}(|\mathrm{N}_n - \mathbb{E}(\mathrm{N}_n)| \geqslant \varepsilon n\ln(n)) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{N}_n)}{(\varepsilon n\ln(n))^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6\varepsilon^2\ln(n)^2},$$

et comme $\frac{\pi^2}{6\varepsilon^2\ln(n)^2} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, on a le résultat voulu par encadrement.

11. D'après la question 7, $\frac{\mathbb{E}(\mathrm{N}_n)}{n\ln(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 1$.

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\left|\frac{\mathbb{E}(\mathrm{N}_n)}{n\ln(n)} - 1\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{10}$.
Or

$$\left|\frac{\mathrm{N}_n}{n\ln(n)} - 1\right| \leqslant \left|\frac{\mathbb{N}_n}{n\ln(n)} - \frac{\mathbb{E}(\mathrm{N}_n)}{n\ln(n)}\right| + \left|\frac{\mathbb{E}(\mathrm{N}_n)}{n\ln(n)} - 1\right|,$$

donc pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\left|\frac{\mathbb{N}_n}{n\ln(n)} - \frac{\mathbb{E}(\mathrm{N}_n)}{n\ln(n)}\right| + \frac{\varepsilon}{10} \geqslant \left|\frac{\mathrm{N}_n}{n\ln(n)} - 1\right|,$$

ainsi

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{N}_n}{n\ln(n)} - 1\right| > \varepsilon \implies &\left|\frac{\mathbb{N}_n}{n\ln(n)} - \frac{\mathbb{E}(\mathrm{N}_n)}{n\ln(n)}\right| + \frac{\varepsilon}{10} > \varepsilon \\ \iff &\left|\frac{\mathbb{N}_n}{n\ln(n)} - \frac{\mathbb{E}(\mathrm{N}_n)}{n\ln(n)}\right| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{10} = \frac{9\varepsilon}{10} \\ \iff &|\mathbb{N}_n - \mathbb{E}(\mathrm{N}_n)| > \frac{9\varepsilon}{10} n\ln(n),\end{aligned}$$

ce qui est une autre manière d'affirmer l'inclusion des événements :

$$\left(\left|\frac{\mathrm{N}_n}{n\ln(n)}-1\right|>\varepsilon\right)\subset\left(|\mathbb{N}_n-\mathbb{E}(\mathrm{N}_n)|>\frac{9\varepsilon}{10}n\ln(n)\right)$$

Puis par croissance de la probabilité, en appliquant la question précédente avec $\frac{9\varepsilon}{10}$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{N}_n}{n\ln(n)}-1\right|>\varepsilon\right)\leqslant\mathbb{P}\left(|\mathbb{N}_n-\mathbb{E}(\mathrm{N}_n)|>\frac{9\varepsilon}{10}n\ln(n)\right)\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}0.$$

Étude d'une série entière aux bornes de son disque ouvert de convergence

12. Notons R le rayon de convergence de $\sum\ln(n)x^n$.
Soient $x>0$, pour tout entier $n\geqslant 2$, $\ln(n)x^n>0$ et

$$\left|\frac{\ln(n+1)x^{n+1}}{\ln(n)x^n}\right|=\frac{\ln\left(n\times\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)}x=\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)x\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}x,$$

donc d'après le critère de d'Alembert,
- si $x>1$, la série $\sum\ln(n)x^n$ diverge grossièrement, donc $\mathrm{R}\leqslant 1$;
- si $x<1$, la suite $(\ln(n)x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, donc $\mathrm{R}\geqslant 1$.

On peut conclure que le rayon de convergence de $\sum\ln(n)x^n$ vaut 1.
On en déduit que $f:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n$ est définie sur (au moins) $]-1\ ;\ 1[$.
De plus lorsque $x=\pm1$, la suite de terme général $\ln(n)x^n$ n'est pas bornée, donc la série $\sum\ln(n)x^n$ diverge grossièrement, et par conséquent le domaine de définition de $f:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n$ est $]-1,1[$.

13. Pour tout $n\geqslant 3$, $\ln(n)\geqslant 1$, donc pour tout $x\in[0,1[$, $\ln(n)x^n\geqslant x^n$, et ces deux termes définissent des suites sommables, donc en additionnant terme à terme des inégalités pour $n\in[\![3\ ;\ +\infty[\![$:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n\geqslant\sum_{n=3}^{+\infty}\ln(n)x^n\geqslant\sum_{n=3}^{+\infty}x^n=x^3\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{x^3}{1-x},$$

et comme $\frac{x^3}{1-x}\xrightarrow[x\longrightarrow1^-]{}+\infty$, on en déduit que $f(x)\xrightarrow[x\longrightarrow1^-]{}+\infty$.

14. D'après la question 2, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, donc la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$ a le même rayon de convergence que $\sum_{n\geqslant 1} \ln(n)x^n$ qui vaut 1.

15. **Première méthode :** soit $x \in]-1\,;1[$,

$$\begin{aligned}
(x-1)g(x) = xg(x) - g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} - \sum_{k=1}^{n}\right) x^n - x \\
&= -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n - x = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \\
&= \ln(1-x), \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

Deuxième méthode : on sait que les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et $x \mapsto \ln(1-x)$ sont développables en séries entières en 0 avec pour rayon de convergence 1, donc grâce au produit de Cauchy, on en déduit que leur produit est aussi développable en série entière avec un rayon de convergence au moins égal à 1, avec pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1-x)}{x-1} &= -\ln(1-x) \times \frac{1}{1-x} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \quad \textit{(où } a_n = \begin{cases} 0 & \textit{si } n=0, \\ \frac{1}{n} & \textit{si } n \in \mathbb{N}^*, \end{cases} \textit{)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \times 1\right) x^n \quad \textit{(en sommant le produit de Cauchy)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \times 1\right) x^n \\
&= g(x).
\end{aligned}$$

Ci-dessus j'ai introduit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour faire en sorte d'écrire la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$ sous forme d'une somme qui commence à $n=0$, parce que je ne sais jamais exactement ce que vaut le produit $\sum\limits_{n=p}^{+\infty}u_n\times\sum\limits_{n=q}^{+\infty}v_n\ldots$

16. D'après la question 2, $\ln(n)-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{=}-\gamma+\mathrm{o}(1)$, donc la suite de terme général $\ln(n)-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ est bornée, ainsi il existe $\mathrm{M}\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|\ln(n)-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right|\leqslant\mathrm{M}$.
Ainsi pour tout $x\in\,]0,1[$
$$\left|\ln(n)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right||x|^n\leqslant\mathrm{M}\,x^n,$$
et les deux membres de cette inégalité définissent des suites sommables, donc par l'inégalité triangulaire
$$|f(x)-g(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\ln(n)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right||x|^n\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{M}x^n=\mathrm{M}\times\frac{1}{1-x},\quad\text{C.Q.F.D.}$$

17. D'après les questions précédentes, pour tout $x\in\,]0,1[$, $g(x)>0$ et
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-1\right|\leqslant\frac{\mathrm{M}}{\ln(1-x)}\xrightarrow[x\to1^-]{}0,$$
donc $\boxed{f(x)\underset{x\to1^-}{\sim}g(x)}$.

18. Du développement asymptotique
$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
on déduit que
$$c_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^2}.$$

Ainsi le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} c_n x^n$ est le même que celui de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ qui dévoile immédiatement sa valeur 1 dès qu'on lui applique d'Alembert.
De plus, pour $x = \pm 1$, $|c_n x^n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ qui est le terme général d'une suite sommable, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} c_n x^n$ converge absolument, et on en conclut que

$\boxed{\text{le rayon de convergence vaut 1 et } h \text{ est définie sur } [-1,1]}$.

19. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} c_n &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right) = -\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (\ln(n-1)-\ln(n)) - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} \\ &= \ln(\mathrm{N}) - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} \quad \textit{(par sommes télescopiques)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma.\end{aligned}$$

20. D'autre part, pour tout $n > 1$ et tout $x \in [-1\,;\,1]$, $|c_n x^n| \leqslant |c_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$, donc $\|x \mapsto c_n x^n\|_\infty^{[-1\,;\,1]} \leqslant \frac{1}{2n^2}$.
Ainsi la série de fonctions continues $\sum_{n\geqslant 1} c_n x^n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$, et par conséquent h est continue sur $[-1,1]$.

21. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2p} (-1)^k c_k &= 1 + \sum_{k=2}^{2p} (-1)^{k+1} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) + \sum_{k=2}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{2j+1} \ln\left(\frac{2j-1}{2j}\right) + \sum_{j=2}^{p} (-1)^{2j} \ln\left(\frac{2j-2}{2j-1}\right) + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{j=1}^{p} \ln\left(\frac{2j}{2j-1}\right) + \sum_{j=1}^{p-1} \ln\left(\frac{2j}{2j+1}\right) + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \ln\left(\prod_{j=1}^{p} \frac{2j}{2j-1}\right) + \ln\left(\prod_{j=1}^{p-1} \frac{2j}{2j+1}\right) + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.\end{aligned}$$

Or, $\prod_{j=1}^{p}\frac{2j}{2j-1}=\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}$ et $\prod_{j=1}^{p-1}\frac{2j}{2j+1}=\frac{2^{2p}(p!)^2}{2p(2p)!}$, donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{2p}(-1)^k c_k=\ln\left(\frac{2^{4p}(p!)^4}{2p((2p)!)^2}\right)+\sum_{k=1}^{2p}\frac{(-1)^{k-1}}{k}}$$

22. Comme pour tout $n>1$, $c_n=\ln(n)-\ln(n-1)-\frac{1}{n}$ et que toutes les séries entières suivantes ont pour rayon de convergence 1, pour tout $x\in\,]-1,1[$:

$$\begin{aligned}h(x)=-x+\sum_{n=2}^{+\infty}c_nx^n&=-x+\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n)x^n-\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n-1)x^n-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\\&=-x+f(x)-xf(x)+\ln(1-x)+x\end{aligned}$$

et $\boxed{h(x)=(1-x)f(x)+\ln(1-x)}$.
Puis, pour tout $x\in\,]-1,1[$, $f(x)=\frac{h(x)}{1-x}+g(x)$.
On a déjà justifié la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k c_k$ dans la question 18..

Grâce à la formule de Stirling,

$$\frac{2^{4p}(p!)^4}{2p((2p)!)^2}\underset{p\to+\infty}{\sim}\frac{2^{4p}\sqrt{2\pi p}^4\,p^{4p}\mathrm{e}^{-4p}}{2p\sqrt{4\pi p}^2\,(2p)^{4p}\mathrm{e}^{-4p}}=\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi par continuité du logarithme, et en utilisant la somme donnée par l'énoncé et la question précédente, on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k c_k=\ln(\pi).$$

Enfin, comme vu dans la question 20., h est continue en -1, donc :

$$\boxed{f(x)\xrightarrow[x\longrightarrow(-1)^-]{}\frac{h(-1)}{2}+g(-1)=\frac{\ln(\pi)}{2}-\frac{\ln(2)}{2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

Une correction du problème 2

énoncé

1. Un calcul de bébé donne

$$H_1(x) = 2x, \;\; H_2(x) = 4x^2 - 2, \;\; H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en dérivant la définition de H_n, on trouve directement

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x).$$

3. Montrons par récurrence sur n que H_n est de degré n et de même parité que n :
   - ➟ C'est bien le cas pour $n = 0$ puisque $H_0 = 1$.
   - ➟ Supposons que c'est le cas pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, quelconque. Le degré de H_n' est alors $n-1$, ou $-\infty$ si $n = 0$, il est donc plus petit que celui de $2XH_n$, qui est (sachant que le degré d'un produit de polynômes est la somme de leur degré) $1 + \deg(H_n) = n+1$.

     On sait que $\deg(A+B) \leqslant \min(\deg(A), \deg(B))$, avec égalité lorsque $\deg(A) \neq \deg(B)$, donc le degré de H_{n+1} est $n+1$.

     Par ailleurs, H_n étant de la parité de n, H_n' est de la parité inverse de n,

     (on rappelle en passant que la dérivée d'une fonction paire est impaire, et réciproquement. En effet, dériver l'égalité $f(-x) = (-1)^n f(x)$ donne $-f'(-x) = (-1)^n f'(x)$, d'où $f'(-x) = (-1)^{n+1} f(x)$.)

     et $2XH_n$ également.

     (tant qu'on y est, on rappelle aussi que multiplier une fonction paire ou impaire f par une fonction impaire g donne une fonction $g \times f$ de parité inverse à celle de f. En effet :
     $(g \times f)(-x) = g(-x)f(-x) = -g(x)(-1)^n f(x) = (-1)^{n+1}(g \times f)(x)$.)

     Donc H_{n+1} est de la parité inverse de celle de n, c'est-à-dire celle de $n+1$, C.Q.F.D.

4. En écrivant $H_n = a_n X^n + Q$ avec $\deg(Q) < n$, on constate via la relation de récurrence que

$$H_{n+1} = 2a_n X^{n+1} + R$$

avec $R \in \mathbb{R}_n[X]$. La suite (a_n) des coefficients dominants de H_n vérifie donc la relation de récurrence $a_{n+1} = 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette suite est donc géométrique de raison 2, et puisque $a_0 = 1$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 2^n$$

5. La fonction nulle appartient clairement à E.
   Soient $f, g \in \mathrm{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, en notant $\Phi : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)^2 \Phi &= \left(\lambda^2 f^2 + \mu^2 g^2 + 2\lambda\mu f g\right)\Phi \\ &\leqslant \lambda^2 f^2 \Phi + \mu^2 g^2 \Phi + |\lambda|\,|\mu|\left(f^2\Phi + g^2\Phi\right)\end{aligned}$$

   (grâce à la désormais célèbre inégalité arithmético-géométrique $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$)

   ce qui est une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ puisque $f, g \in \mathrm{E}$.
   Donc par domination, $(\lambda f + \mu g)^2\Phi$ est dans E, ce qui achève de prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   On constate que tous les monômes $x \mapsto x^n$ appartiennent à E. En effet, $(x^n)^2\mathrm{e}^{-x^2}$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $\pm\infty$ par croissance comparée, d'où le résultat par négligeabilité. Par linéarité, $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est bien un sous-ensemble de E.
6. Cette application est :
   - Bien définie, ce qui n'est pas évident, mais c'est la même preuve que celle qu'on vient de faire (E est stable par produit) ;
   - Symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$;
   - Linéaire à gauche par linéarité de l'intégrale, donc bilinéaire ;
   - Positive par positivité de l'intégrale ;
   - Définie. En effet, si $\langle f, f\rangle = 0$, la fonction $x \mapsto f(x)^2\mathrm{e}^{-x^2}$ est continue, positive, intégrable et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$, donc nulle.

   $\langle ., .\rangle$ est donc bel et bien un produit scalaire sur E.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Notons que

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{P}', \mathrm{H}_{n-1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}'(x)(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{x^2} w^{(n-1)}(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}'(x) w^{(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

   et une intégration par parties obtenue en « primitivant » P' et en dérivant $w^{(n-1)}$ nous donne alors

$$\langle \mathrm{P}', \mathrm{H}_{n-1}\rangle = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\pi}}\left(\left[\mathrm{P}(x)w^{(n-1)}(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{P}(x)w^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

l'intégration par parties étant justifiée par le fait que la quantité $P(x)w^{(n-1)}(x)$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

Le crochet s'annule donc, et on trouve finalement

$$\langle P', H_{n-1}\rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)H_n(x)e^{-x^2} d\,x$$

ce qui signifie exactement que

$$\langle P', H_{n-1}\rangle = \langle P, H_n\rangle, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

8. Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on itère l'égalité précédente pour obtenir par une récurrence immédiate

$$\langle P, H_n\rangle = \langle P^{(n)}, H_0\rangle = \langle 0, 1\rangle = 0$$

d'où le résultat.

9. La famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une famille de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ polynômes non nuls échelonnée en degrés, elle est donc libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Par ailleurs, la question précédente montre notamment que les H_k sont orthogonaux deux à deux. D'où le résultat.

10. C'est une conséquence directe de la question 7 de nouveau : en posant $P = H_n$, on obtient

$$\begin{aligned} \|H_n\|^2 = \langle H_n, H_n\rangle &= \langle H_n^{'}, H_{n-1}\rangle \\ &= (\cdots \text{récurrence} \cdots)\langle H_n^{(n)}, H_0\rangle. \end{aligned}$$

Puisque H_n est de degré n et de coefficient dominant 2^n, $H_n^{(n)}$ n'est autre que $2^n\, n!$. Ainsi,

$$\|H_n\|^2 = \langle n!2^n, 1\rangle = \frac{2^n\, n!}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = 2^n\, n!$$

(encore cette intégrale de Gauss qui n'est pas au programme !).

Donc :

$$\|H_n\| = 2^{n/2}\sqrt{n!}$$

11. Le caractère linéaire de u est assez direct (linéarité de la dérivation et du produit par un polynôme fixé). Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, le degré de $2XP'$, qui vaut $1 + \deg(P) - 1$, est plus petit que n ; celui de P'' aussi ; par somme, celui de $u(P) = -P'' + 2XP' + P$ est également plus petit que n. D'où la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par u.

12. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On a

$$v \circ w(\mathrm{P}) = v(w(\mathrm{P})) = v(\mathrm{P}') = 2\mathrm{XP}' - \mathrm{P}'' - \mathrm{P}'' + 2\mathrm{XP}' + \mathrm{P} - \mathrm{P} = (u - \mathrm{Id})(\mathrm{P})$$

Et par ailleurs :

$$w \circ v(\mathrm{P}) = (2\mathrm{XP} - \mathrm{P}')' = 2\mathrm{P} + 2\mathrm{XP}' - \mathrm{P}'' = (\mathrm{P} + 2\mathrm{XP}' - \mathrm{P}'') + \mathrm{P} = (u + \mathrm{Id})(\mathrm{P})$$

Ces égalités étant vraies pour tout P, on a bien $v \circ w = u - \mathrm{Id}$ et $w \circ w = u + \mathrm{Id}$.

13. D'après la question précédente, on a $u = \mathrm{Id} + v \circ w = w \circ v - \mathrm{Id}$. On a donc

$$\begin{aligned} u \circ v - v \circ u &= (\mathrm{Id} + v \circ w) \circ v - v \circ (w \circ v - \mathrm{Id}) \\ &= v + v \circ w \circ v - v \circ w \circ v + v \\ &= 2v \end{aligned}$$

14. Si $u(\mathrm{P}) = \lambda \mathrm{P}$, d'après la question précédente, on a

$$u(v(\mathrm{P})) = 2v(\mathrm{P}) + v(u(\mathrm{P})) = 2v(\mathrm{P}) + v(\lambda \mathrm{P}) = (2 + \lambda) v(\mathrm{P})$$

la dernière égalité ayant été obtenue par linéarité de v.

15. Par récurrence sur k :
    - $\mathrm{P}_0 = 1$ et $u(\mathrm{P}_0) = u(1) = 1$ donc P_0 est bien un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\lambda_0 = 1$;
    - Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k. On a donc $u(\mathrm{P}_k) = \lambda_k \mathrm{P}_k$, donc (d'après la question précédente) $u(v(\mathrm{P}_k)) = (\lambda + 2) v(\mathrm{P}_k)$. Or, $v(\mathrm{P}_k) = 2\mathrm{XP}_k - \mathrm{P}_k' = \mathrm{P}_{k+1}$ d'après la question 15 (les fonctions polynomiales sont égales, donc les polynômes aussi, même si cette précision sera probablement inutile vu l'esprit du sujet). Donc $u(\mathrm{P}_{k+1}) = (\lambda_k + 2)\mathrm{P}_{k+1}$ et P_{k+1} est bien, étant non nul, un vecteur propre pour u associé à la valeur propre $\lambda_{k+1} = \lambda_k + 2$.
    - D'où la conclusion par axiome de récurrence.

    La suite (λ_k) étant arithmétique, on a manifestement $\lambda_k = 2k + 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

16. Ainsi, comme tous les H_k sont dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, l'endomorphisme u_n possède $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}])$ valeurs propres distinctes, donc il est bien diagonalisable sur $\mathbb{R}$ *(ou dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$)*.

17. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Notons que par linéarité à gauche :

$$\langle u(P), Q\rangle = \langle -P'' + 2XP', Q\rangle + \langle P, Q\rangle.$$

Il s'agit donc de montrer que le premier terme de la somme vaut également $\langle P', Q'\rangle$. Pour ce faire, écrivons sa définition :

$$\langle -P'' + 2XP', Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left((-P''(x) + 2xP'(x))e^{-x^2}\right) Q(x)\mathrm{d}\,x$$

On remarque que la parenthèse est la dérivée en x de $-P'(x)e^{-x^2}$. Ainsi, par intégration par parties et nullité du crochet, on constate que

$$\langle -P'' + 2XP', Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)e^{-x^2}Q(x)\mathrm{d}\,x = \langle P', Q'\rangle$$

Et on a bien démontré le résultat voulu.

18. On a donc pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$\langle u(P), Q\rangle = \langle P', Q'\rangle + \langle P, Q\rangle$$

L'expression de droite étant symétrique en P et Q et par symétrie du produit scalaire, on a donc

$$\langle u(P), Q\rangle = \langle P, u(Q)\rangle$$

Ce résultat étant notamment vrai pour les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, on a bien :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \quad \langle u_n(P), Q\rangle = \langle P, u_n(Q)\rangle$$

ce qui est la définition du fait que u_n est autoadjoint.

19. C'est exactement le théorème spectral appliqué à u_n.

20. On a vu dans la question 9 que la famille $(H_0, \cdots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, et depuis la question 15 on sait que cette base est constituée de vecteurs propres de u_n ; il suffit donc de normaliser chacun de ses vecteurs, en le divisant par sa norme calculée en question 10, pour obtenir une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de u_n.