Le rapport du Jaury

Mes abréviations

« TE » : Type-Error ;
« AI » : argumentation insuffisante ;
« VC » : voir le corrigé ;
« AR » : améliorer la rédaction ;
« ASP » : affirmation sans preuve ;
« CP » : je ne comprends pas ;
« MF » : mauvaise foi ;
« N'importe quoi ! » : n'importe quoi !

➟ Les questions marquées par un 🎁 font partie de la voiture balai de la difficulté mathématique de PC ;
tandis que les questions marquées par un 🚢 sont des questions très classiques et récurrentes…

➟ Lorsque vous superposez des lignes de calcul, il est nécessaire de faire figurer des liens logiques entre ces lignes, comme :
- des « $\iff$ » ou « $\Rightarrow$ » directement dans les mathématiques,
- ou bien des mots en français comme « donc », « d'où », « ainsi », « par conséquent », etc.

➟ ➜ Attention à ne pas confondre les événements et leur probabilités ! les expressions $\mathbb{P}_{y_n}\left(x_{n+1}\right)$ (dans l'exercice 2), ou aussi $\mathbb{P}\left(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{F}}\right) \cup \mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{F}} \cap \overline{\mathrm{F}}\right)$ n'ont aucun sens. Ce sont des Type-Error caractérisées.

➜ Dans l'immense majorité des cas, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ s'obtiennent directement en évaluant B dans le cas où A est réalisé.
La formule $\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{A})}$ est très rarement utilisée dans ce sens, en général on utilise plutôt $\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) \times \mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ *(qui n'est autre que la formule des probabilités composées pour deux événements).*

➜ Attention à la notation F∩F pour « face aux deux premiers lancers » ! Je rappelle que pour n'importe quel événement A, $\mathrm{A} \cap \mathrm{A} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{A} = \mathrm{A}$. Le mieux est d'ajouter des indices aux événements pour indiquer le rang de l'expérience où ils sont réalisés.

➟ ➜ Rappelons que la définition de la dimension d'un espace vectoriel est le cardinal de ses bases ! Donc dans la question 1(b) de l'exercice 1, il fallait d'abord trouver une base de F avant d'en déduire sa dimension.

➜ Dans tout exercice où une matrice ou un endomorphisme est annulé par un polynôme, comme dans la relation $2\mathrm{M}^2 = 3\mathrm{M} - \mathrm{I}_n$, il faut bien comprendre

(mis à jour le 20 novembre 2024)

que toutes les puissances (de la matrice ou de l'endomorphisme) pourront être exprimées comme combinaison linéaire des premières puissances !

- Trouvez l'argument manquant :

$$\left.\begin{array}{r}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \text{ est libre,}\\ \operatorname{card}(\mathrm{A},\mathrm{B}) = 2 = \dim(\mathrm{F})\end{array}\right\} \Rightarrow (\mathrm{A},\mathrm{B}) \text{ est une base de } \mathrm{F}.$$

- La fonction « racine-carrée » est définie sur $[0\,;+\infty[$, mais pas du tout sur l'ensemble des racines carrées, donc résoudre $\mathrm{T}^2 = \mathrm{M}$ par $\mathrm{T} = \sqrt{\mathrm{M}}$ dans la question 3(b) de l'exercice 1 est une manifestation classique de « pensée magique ».

  Voici d'ailleurs ci-dessous plusieurs manifestations de la pensée magique :

  - *ex4-q2* : « $f : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{1+x}$ est décroissante donc $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante par croissance de l'intégrale » ;
  - « $\sum a_n \sim \sum a_{n-1}$ » ;
  - *ex1-q1(a)*« $\mathrm{M} \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{M}^k \in \mathrm{F}$, donc $\mathrm{M}^{k+1} = \mathrm{M} \times \mathrm{M}^k \in \mathrm{F}$ » ;
  - « $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_{n-1}$ car $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ».

- Il faut manipuler avec beaucoup de précautions les inégalités strictes, et ne les utiliser qu'en cas de nécessité, sinon on s'en tient aux inégalités larges, et ça suffit largement.

  Sinon, ça peut donner « pour tout $x \in [0\,;1]$, $e^{-(n+1)x} < e^{-nx}$ ».

- Malgré cette épée de Damoclès de voir un prof de maths se rouler par terre, des élèves ont encore l'inconscience d'écrire :

$$\text{« } \frac{\alpha}{2} < 1 \text{ donc } \sum \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n \text{ converge. »}$$

- La propriété fondamentale que l'on attend d'une fonction f que l'on veut intégrer sur un intervalle I est qu'elle soit continue (au moins par morceaux) sur cet intervalle. Si on vous demande de « montrer que $\int_{\mathrm{I}} f$ existe », le minimum est d'étudier la continuité de f sur I !

Exercice 1

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$M \neq I_n, \quad M \neq \frac{1}{2} I_n, \quad 2M^2 = 3M - I_n.$$

On note $F = \mathrm{Vect}(I_n, M, M^2)$.

1. (a) Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
   (b) Déterminer la dimension de F, et en donner une base.
2. Montrer que F est stable pour la multiplication des matrices.
3. Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \frac{1}{2} I_n$.
   (a) Justifier que $\mathscr{B} = (A, B)$ constitue une base de F.
   (b) Déterminer les coordonnées de AB, BA, A^2, et B^2 dans la base $\mathscr{B}$.
   (c) Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant $T^2 = M$.
4. Justifier que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Ker}(B)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Quelle serait la matrice de *(l'endomorphisme canoniquement associé à)* M dans une base adaptée à ces deux sous-espaces vectoriels ?

Exercice 2

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne Face avec la probabilité $p \in]0\ ;\ 1[$ et Pile avec la probabilité $q = 1 - p$. On s'intéresse au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux Face consécutivement.
On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité $\mathbb{P}$, modélisant cette expérience.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note U_n l'événement « on obtient deux Face de suite, pour la première fois, aux lancers numéro n et $n+1$ », et on pose $u_n = \mathbb{P}(\mathrm{U}_n)$.
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note A_n l'événement « les n premiers lancers ne donnent pas deux Face de suite et le n^e lancer donne Face », et B_n l'événement « les n premiers lancers ne donnent pas deux Face de suite et le n^e lancer donne Pile ».
Enfin, on pose $x_n = \mathbb{P}(\mathrm{A}_n), y_n = \mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$.

1. (a) Déterminer $u_1, x_2, y_2, u_2, x_3, y_3, u_3$.
   (b) Trouver pour $n \geqslant 2$, une relation simple entre x_n et u_n.
   (c) Pour tout $n \geqslant 2$, déterminer les probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1}), \quad \mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1}), \quad \mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}_{n+1}), \quad \mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{B}_{n+1}).$$

   (d) En déduire pour tout $n \geqslant 2$, les relations : $\begin{cases} x_{n+1} = p y_n \\ y_{n+1} = q(x_n + y_n) \end{cases}$

2. On suppose désormais que $p = \frac{1}{2}$ et on pose $v_n = 2^n y_n$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
   (a) Déterminer une relation de récurrence simple entre v_{n+1}, v_n et v_{n-1} à l'aide de la question 1.(d).
   (b) Montrer alors que :

$$\forall n \geqslant 2 \;\; v_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}, \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

   L'énoncé initial était faux : il y avait un 2 erroné au dénominateur de v_n...

   (c) En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, une expression de x_n puis de u_n, en fonction de n.
   (d) Vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$. En donner une interprétation.

Exercice 3

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.
On dit que la suite (a_n) vérifie la propriété $(\mathscr{P})$ lorsque les quatre propositions ci-dessous sont vraies :

- $a_1 \geqslant 1$;
- la suite (a_n) est bornée ;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0$;
- la série $\sum a_n$ diverge.

On note alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{A}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, et $\forall n \geqslant 2,\ b_n = \dfrac{1}{\ln(\mathrm{A}_n)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\mathrm{A}_k}$.

Dans tout l'exercice, on pourra utiliser la propriété suivante, notée $(\mathscr{R})$:

> *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de* ***réels strictement positifs****,*
>
> *si* $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n, \\ \sum u_n \text{ diverge,} \end{cases}$ *alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k.$

1. En utilisant les séries de terme général $\dfrac{1}{n}$ et $\ln(n+1)-\ln(n)$ ainsi que la propriété $(\mathscr{R})$, prouver que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

2. (a) De façon analogue, montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

   (b) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln(n)}$.

   (c) Retrouver ce résultat sans utiliser la propriété $(\mathscr{R})$.

3. *Étude de deux exemples.*

   (a) On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1$.
   Vérifier que la suite (a_n) vérifie la propriété $(\mathscr{P})$, et montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite que l'on précisera.

(b) On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{n}$.
Vérifier que la suite (a_n) vérifie la propriété $(\mathscr{P})$.
En utilisant la propriété $(\mathscr{R})$ et la série de terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$, montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite que l'on précisera.

4. On revient au cas général et on prend une suite (a_n) qui vérifie la propriété $(\mathscr{P})$.
   (a) Montrer que $\mathrm{A}_n \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{A}_{n-1}$.
   (b) Prouver que $\dfrac{a_n}{\mathrm{A}_n} \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}_{n-1}}\right)$.
   (c) Déterminer alors la nature de la série de terme général $\frac{a_n}{\mathrm{A}_n}$.
   (d) À l'aide de la propriété $(\mathscr{R})$ et des questions précédentes, montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite que l'on précisera.
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs telle que la série $\sum u_n$ diverge. Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs telle que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ et $\sum v_n$ diverge.

Exercice 4

On considère les suites $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.$$

1. Justifier que les suites $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
2. Démontrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 < \mathrm{J}_n \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   (b) En déduire que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et donner leur limite.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - \mathrm{J}_n\right)$.
5. Montrer que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

D'après E3A PC.

1. (a) ➟ Au rang $k=0$, $M^0 = I_n \in F$ et $M^1 = M \in F$. La propriété est vérifiée pour $k=0$ et $k=1$.
   ➟ Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que M^{k-1} et M^k appartiennent à F, et montrons que M^{k+1} est aussi dans F.

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^2 \times M^{k-1} \\ &= (3M - I_n) \times M^{k-1} \\ &= 3M^k - M^{k-1}, \end{aligned}$$

   donc $M^{k+1} \in F$, car par hypothèse de récurrence M^k et M^{k-1} sont dans F, et F est stable par combinaison linéaire car c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   ➟ Ainsi, par récurrence (sur 2 termes) on a prouvé que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.

   (b) Comme M^2 est une combinaison linéaire de I_n et de M, on peut affirmer que $\boxed{F = \mathrm{Vect}(I_n, M)}$, autrement dit que $\boxed{(I_n, M) \text{ est une famille génératrice de } F}$.
   De plus soient a, b deux réels tels que $aM + bI_n = 0_n$.

   ➟ Si $a = 0$, alors $bI_n = 0_n$, donc $b = 0$ car $I_n \neq 0_n$.
   ➟ Si $a \neq 0$, alors $M = -\frac{b}{a} I_n$, autrement dit $M = \lambda I_n$ en notant (uniquement par commodité) $\lambda = -\frac{b}{a}$.
   Comme $2M^2 = 3M - I_n$, on en déduit

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 I_n &= 3\lambda I_n - I_n \\ 2\lambda^2 &= 3\lambda - 1 \end{aligned}$$

   d'où $(2\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$ et $\lambda = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = 1$. Ceci n'est pas possible car $M \neq I_n$ et $M \neq \frac{1}{2} I_n$, donc l'hypothèse de départ $a \neq 0$ est fausse, d'où $a = b = 0$.

   Ainsi, (I_n, M) est une famille libre.

On a prouvé que $(\mathrm{I}_n, \mathrm{M})$ est une famille génératrice de F, et une famille libre, donc $\boxed{(\mathrm{I}_n, \mathrm{M}) \text{ est une base de F}}$.

On en déduit par définition que $\boxed{\dim \mathrm{F} = 2}$.

2. Soient P, Q dans F, montrons que $\mathrm{P} \times \mathrm{Q} \in \mathrm{F}$.
On sait que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, \mathrm{M})$, donc il existe des réels a, b, c, d tels que $\mathrm{P} = a\mathrm{I}_n + b\mathrm{M}$ et $\mathrm{Q} = c\mathrm{I}_n + d\mathrm{M}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \times \mathrm{Q} &= (a\mathrm{I}_n + b\mathrm{M}) \times (c\mathrm{I}_n + d\mathrm{M}) = ac\mathrm{I}_n + (ad + bc)\mathrm{M} + bd\mathrm{M}^2 \\ &= ac\mathrm{I}_n + (ad + bc)\mathrm{M} + \frac{1}{2}bd(3\mathrm{M} - \mathrm{I}_n) \\ &= \left(ac - \frac{1}{2}bd\right)\mathrm{I}_n + (ad + bc)\mathrm{M}, \end{aligned}$$

donc $\mathrm{P} \times \mathrm{Q} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, \mathrm{M})$, c'est-à-dire $\mathrm{P} \times \mathrm{Q} \in \mathrm{F}$, C.Q.F.D.

3. Soient $\mathrm{A} = \mathrm{M} - \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{B} = \mathrm{M} - \frac{1}{2}\mathrm{I}_n$.

 (a)
 Méthode – Pour montrer que (A, B) est une base de F

 on se trouve dans le cas où on connaît la dimension de l'espace en question : on sait que $\dim(\mathrm{F}) = 2$. Donc pour montrer que (A, B) est une base de F, il suffit de :

 - *montrer que A et B sont dans F,*
 - *et que (A, B) est une famille libre ;*

 ou bien de

 - *montrer que (A, B) est une famille génératrice de F, c'est-à-dire que $\mathrm{Vect}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{F}$.*

Première méthode

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) &= \mathrm{Vect}(\mathrm{A}, \mathrm{B} - \mathrm{A}) && \textit{(par opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille génératrice)} \\ &= \mathrm{Vect}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_n, \tfrac{1}{2}\mathrm{I}_n) \\ &= \mathrm{Vect}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_n, \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(\mathrm{M}, \mathrm{I}_n) && \textit{(même raison)} \\ &= \mathrm{F}, \end{aligned}$$

donc (A, B) est une famille génératrice de F, de cardinal 2, et F est de dimension 2, donc $\boxed{\mathcal{B} = (A, B) \text{ est une base de } F.}$

Deuxième méthode

- Dans un premier temps, les matrices A et B sont bien dans $\mathrm{Vect}(I_n, M)$, donc sont des éléments de F.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda A + \mu B = 0_n$. Alors

$$\lambda(M - I_n) + \mu(M - \frac{1}{2}I_n) = 0_n$$
$$\text{d'où } (\lambda + \mu)M - \left(\lambda + \frac{\mu}{2}\right) I_n = 0_n.$$

  Or (I_n, M) est une famille libre, donc $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \frac{\mu}{2} = 0 \end{cases}$, qui donne après résolution $\lambda = \mu = 0$.
- Ainsi (A, B) est une famille libre, de F, de cardinal 2, et F est de dimension 2, donc $\boxed{\mathcal{B} = (A, B) \text{ est une base de } F.}$

(b) Tout d'abord

$$\begin{aligned} A \times B = (M - I_n) \times \left(M - \frac{1}{2}I_n\right) &= M^2 - \frac{3}{2}M + \frac{1}{2}I_n \\ &= \frac{1}{2}\left(2M^2 - (3M - I_n)\right) \\ &= 0_n \ \textit{(d'après l'énoncé)} \end{aligned}$$

et de même $BA = 0_n$.
Donc les coordonnées de AB et BA dans la base (A, B) sont

$$\underset{(A,B)}{\mathrm{Mat}}(AB) = \underset{(A,B)}{\mathrm{Mat}}(BA) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puis

$$\begin{aligned} A^2 = (M - I_n)^2 = (M - I_n)\left(M - \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}I_n\right) \\ = AB - \frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}A, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{B}^2 = \left(\mathrm{M} - \frac{1}{2}\mathrm{I}_n\right)^2 &= \left(\mathrm{M} - \frac{1}{2}\mathrm{I}_n\right)\left(\mathrm{M} - \mathrm{I}_n + \frac{1}{2}\mathrm{I}_n\right)\\ &= \mathrm{BA} + \frac{1}{2}\mathrm{B} = \frac{1}{2}\mathrm{B}.\end{aligned}$$

Donc

$$\underset{(\mathrm{A},\mathrm{B})}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{A}^2) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{(\mathrm{A},\mathrm{B})}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{B}^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

4. Soit $\mathrm{T} \in \mathrm{F}$, alors d'après 3.(a), (A, B) est une base de F, donc il existe deux réels α, β tels que $\mathrm{T} = \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B}$.
Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{T}^2 &= (\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B})^2 = \alpha^2\mathrm{A}^2 + \alpha\beta\mathrm{AB} + \beta\alpha\mathrm{BA} + \beta^2\mathrm{B}^2\\ &= \frac{1}{2}(-\alpha^2\mathrm{A} + \beta^2\mathrm{B}) \ \textit{(d'après la question précédente).}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathrm{T}^2 = \mathrm{M} &\iff \frac{1}{2}(-\alpha^2\mathrm{A} + \beta^2\mathrm{B}) = -\mathrm{A} + 2\mathrm{B} \ \ (\textit{car } \mathrm{M} = -\mathrm{A} + 2\mathrm{B})\\ &\iff \begin{cases} \dfrac{-\alpha^2}{2} = -1 \\ \dfrac{\beta^2}{2} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^2 = 2 \\ \beta^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{2} \\ \beta = \pm 2 \end{cases}\end{aligned}$$

On peut donc conclure que l'ensemble des solutions de $\mathrm{T}^2 = \mathrm{M}$ est

$$\left\{\sqrt{2}\mathrm{A} + 2\mathrm{B}, \ \ \sqrt{2}\mathrm{A} - 2\mathrm{B}, \ \ -\sqrt{2}\mathrm{A} + 2\mathrm{B}, \ \ -\sqrt{2}\mathrm{A} - 2\mathrm{B}\right\}.$$

5. *Les notations utilisées dans cette question supposent que l'on confond les matrices et leurs endomorphismes canoniquement associés. Par exemple, la matrice A est confondue avec l'endomorphisme $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Remarquons qu'on confondra aussi très souvent $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.*

➡ Montrons d'abord que $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{B})$ sont en somme directe.
Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, supposons que $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Ker}\,(\mathrm{B})$, et montrons que X est le vecteur nul.

le vecteur X étant dans $\operatorname{Ker}(A)$, il vérifie $AX = 0$, autrement dit $(M - I_n)X = 0$, soit encore $MX = X$.

De même, comme $X \in \operatorname{Ker}(B)$, on obtient $MX = \frac{1}{2}X$.

On en déduit que $X = \frac{1}{2}X$, qui donne $X = 0$, C.Q.F.D.

- Montrons à présent que $\operatorname{Ker}(A) + \operatorname{Ker}(B) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour cela prenons $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et trouvons $X_1 \in \operatorname{Ker}(A)$ et $X_2 \in \operatorname{Ker}(B)$ tels que $X = X_1 + X_2$.

Méthode – l'analyse-synthèse :

On peut envisager cet exercice comme la résolution dans l'ensemble $\operatorname{Ker}(A) \times \operatorname{Ker}(B)$ de l'équation $X_1 + X_2 = X$, d'inconnue (X_1, X_2).

Une méthode classique pour résoudre une équation est l'analyse-synthèse :

- *on suppose d'abord l'existence de solutions, et on tâche d'en déduire le plus d'informations possible (une sorte de portrait-robot des solutions), voire dans le meilleur des cas d'en déduire carrément leurs valeurs (c'est la partie analyse) ;*
- *puis on cherche parmi les valeurs obtenues celles qui sont effectivement solutions (c'est la synthèse).*

Remarquons que la résolution

$$3x + 2 = 8 \iff 3x = 6 \iff x = 2$$

est l'analyse et la synthèse en même temps :

- $3x + 2 = 8 \implies 3x = 6 \implies x = 2$ *est l'analyse ;*
- $x = 2 \implies 3x = 6 \implies 3x + 2 = 8$ *est la synthèse.*

- Supposons que $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in \operatorname{Ker}(A)$ et $X_2 \in \operatorname{Ker}(B)$.
  En mutipliant par M on obtient $MX = MX_1 + MX_2$.
  Comme dans la partie « somme directe » on remarque que $MX_1 = X_1$ et $MX_2 = \frac{1}{2}X_2$, donc $X_1 + \frac{1}{2}X_2 = MX$.
  On obtient donc le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = X \\ X_1 + \frac{1}{2}X_2 = MX \end{cases}$$

qui l'on résout facilement en

$$\begin{cases} X_2 = 2(X - MX) = 2(I_n - M)X = -2AX \\ X_1 = 2MX - X = 2BX. \end{cases}$$

Ici la partie analyse donne un unique couple possible pour la solution (X_1, X_2), qui serait $(2BX, -2AX)$.
Il nous reste à vérifier que ce couple est bien solution, autrement dit que

- $X_1 + X_2 = X$,
- $X_1 \in \operatorname{Ker}(A)$ *et* $X_2 \in \operatorname{Ker}(B)$.

Posons $X_1 = 2BX = 2(X - MX)$ et $X_2 = -2AX = 2MX - X$.

- Il est évident que $X_1 + X_2 = X$;
- Enfin $AX_1 = 2A \times BX$ et $BX_2 = -2B \times AX$, or

$$A \times B = B \times A = M^2 - \frac{3}{2}M + \frac{1}{2}I_n = \frac{1}{2}\left(2M^2 - 3M + I_n\right)$$

  et d'après l'énoncé $2M^2 = 3M - I_n$, donc $A \times B = B \times A = 0_n$, d'où $AX_1 = BX_2 = 0$, ce qui achève de prouver que $X_1 \in \operatorname{Ker}(A)$ et $X_2 \in \operatorname{Ker}(B)$.

On peut donc conclure que $\operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{Ker}(B)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Une base adaptée est alors la concaténation d'une base de $\operatorname{Ker}(A)$ et d'une base de $\operatorname{Ker}(B)$, et on a vu dans les calculs précédents que les vecteurs X de $\operatorname{Ker}(A)$ vérifient $MX = X$ tandis que les vecteurs X de $\operatorname{Ker}(B)$ vérifient $MX = \frac{1}{2}X$.
  Par conséquent, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à M dans une telle base serait diagonale de termes diagonaux 1 et $\frac{1}{2}$.

Une correction de l'exercice 2

énoncé

En plus des notations définies dans l'énoncé, on pose, pour tout $i \in \mathbb{N}$, F_i l'événement « le i^e lancer donne Face », et $P_i = \overline{F_i}$ =« le i^e lancer donne Pile ».

1. (a) L'événement U_1 est « on obtient Face au premier et au deuxième lancer », donc les lancers étant indépendants, la pièce donnant Face avec la proba-

bilité p, on obtient

$$u_1 = \mathbb{P}(\mathrm{U}_1) = \mathbb{P}(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2) = p^2.$$

Ensuite, $\mathrm{A}_2 = \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{F}_2$, donc par indépendance des lancers $x_2 = q\,p$.
Puis sans trop détailler

$$\begin{aligned}
y_2 &= \mathbb{P}(\mathrm{P}_2) = q,\\
u_2 &= \mathbb{P}(\mathrm{U}_2) = \mathbb{P}(\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{F}_2 \cap \mathrm{F}_3) = q\,p^2,\\
x_3 &= \mathbb{P}(\mathrm{P}_2 \cap \mathrm{F}_3) = q\,p,\\
y_3 &= \mathbb{P}\left(\overline{(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2)} \cap \mathrm{P}_3\right) = (1-p^2)\,q,\\
u_3 &= \mathbb{P}((\mathrm{U}_3) = \mathbb{P}\left(\mathrm{P}_2 \cap \mathrm{F}_3 \cap \mathrm{F}_4\right) = q\,p^2.
\end{aligned}$$

(b) J'estime évident que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}_n \cap \mathrm{F}_{n+1}$, donc par indépendance des lancers

$$u_n = p \times x_n.$$

(c) Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$.
Sachant A_n, la série de lancers se termine par un résultat Face et A_{n+1} ne peut donc plus être réalisé (on aurait eu deux fois de suite Face), ainsi $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) = 0$.
Pour le même genre de raisons,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1}) &= \mathrm{P}(\mathrm{F}_{n+1}) = p\\
\mathrm{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}_{n+1}) &= \mathrm{P}(\mathrm{P}_{n+1}) = q\\
\mathrm{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{B}_{n+1}) &= \mathrm{P}(\mathrm{P}_{n+1}) = q.
\end{aligned}$$

(d) Pour $n \geqslant 2$, on remarque $\mathrm{C}_n = \overline{\mathrm{A}_n \cup \mathrm{B}_n}$ =« il y eu deux Face de suite au cours des n premiers lancers ». Comme $(\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n)$ est un système complet d'événements, grâce à la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_{n+1}\right)\\
&= \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}\left(\mathrm{A}_{n+1}\right) + \mathbb{P}(\mathrm{B}_n)\mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}\left(\mathrm{A}_{n+1}\right) + \mathbb{P}(\mathrm{C}_n)\mathbb{P}_{\mathrm{C}_n}\left(\mathrm{A}_{n+1}\right),
\end{aligned}$$

et comme il est clair que $\mathbb{P}\left(\mathrm{A}_{n+1} \mid \mathrm{C}_n\right) = 0$, on obtient

$$x_{n+1} = y_n \times p = p\,y_n.$$

De même

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \mathbb{P}\left(\mathrm{B}_{n+1}\right) \\ &= \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}\left(\mathrm{A}_{n+1}\right) + \mathbb{P}(\mathrm{B}_n)\mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}\left(\mathrm{A}_{n+1}\right) + \mathbb{P}(\mathrm{C}_n)\mathbb{P}_{\mathrm{C}_n}\left(\mathrm{A}_{n+1}\right), \\ &= x_n \times q + y_n \times q = p(x_n + y_n). \end{aligned}$$

2. Dans cette question, $p = \frac{1}{2}$, donc pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{2} y_n, \\ y_{n+1} &= \frac{1}{2}(x_n + y_n). \end{aligned}$$

   (a) Donc, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} & y_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + y_{n+1}) = \frac{1}{4} y_n + \frac{1}{2} y_{n+1} \\ \iff & v_{n+2} = v_{n+1} + v_n. \end{aligned}$$

   (b) On reconnaît dans $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont le polynôme caractéristique $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1$ a pour racines $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut s'écrire sous la forme

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda\,(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu\,(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}},$$

   autrement dit, il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \geqslant 2,\ \ v_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n.$$

   Grâce aux conditions initiales $v_2 = 2^2 \times y_2 = 4 \times \frac{1}{2} = 2$, et $v_3 = 8y_3 = 3$, d'où

$$\begin{cases} v_2 = \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 = 2 \\ v_3 = \lambda\alpha^3 + \mu\beta^3 = 3 \end{cases}$$

   mais α et β sont racines de $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1$, donc $\alpha^2 = \alpha + 1$ et $\beta^2 = \beta + 1$, puis $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 1$ et $\beta^3 = 2\beta + 1$.

Ainsi

$$\begin{cases} \lambda(\alpha+1)+\mu(\beta+1)=2 \\ \lambda(2\alpha+1)+\mu(2\beta+1)=3 \quad L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda(\alpha+1)+\mu(\beta+1)=2 \quad L_1 \leftarrow L_1-L_2 \\ \lambda+\mu=1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \alpha\lambda+\beta\mu=1 \\ \lambda+\mu=1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (\beta-\alpha)\mu=1-\alpha=\beta \\ \lambda+\mu=1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \mu=\frac{\beta}{\beta-\alpha} \\ \lambda=\frac{\alpha}{\alpha-\beta} \end{cases}$$

d'où pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n+\frac{\beta}{\beta-\alpha}\beta^n \\ &= \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

(c) On en déduit

$$\forall n \geqslant 2, \quad y_n=\frac{1}{2^n}v_n=\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{(\beta-\alpha)2^n},$$

d'où

$$\forall n \geqslant 3, \quad x_n=\frac{1}{2}y_{n-1}=\frac{\beta^n-\alpha^n}{(\beta-\alpha)2^n},$$

qui est une égalité encore valable pour $n=2$.
Et enfin

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n=px_n=\frac{\beta^n-\alpha^n}{(\beta-\alpha)2^{n+1}}.$$

(d) On remarque que la formule donnant u_n est encore valable pour $n=1$ et équivaut à

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = \frac{1}{2(\beta-\alpha)}\left(\frac{\beta}{2}\right)^n - \frac{1}{2(\beta-\alpha)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n.$$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire de suites géométriques, de raisons $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\beta}{2}$ qui sont assez clairement dans $]-1\ ;\ 1[$, donc sommables.
On en déduit que $\sum u_n$ converge, et que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= \frac{1}{2(\beta-\alpha)}\left(\frac{\frac{\beta}{2}}{1-\frac{\beta}{2}} - \frac{\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\\ &= \frac{1}{(2-\alpha)(2-\beta)}.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}(2-\alpha)(2-\beta) &= (1+\beta)(1+\alpha)\ \ \textit{(encore avec } \alpha+\beta=1\textit{)}\\ &= 1+\alpha+\beta+\alpha\beta = 1\ \ \textit{(car } \alpha\beta=-1\textit{)}.\end{aligned}$$

Ainsi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$, ce qui prouve que l'on est quasi-certain d'obtenir au moins une fois deux Face de suite dans une succession indéfinie de lancers d'une pièce honnête.

Une correction de l'exercice 3

énoncé

1. ➟ Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont à termes strictement positifs.
   ➟ De plus, par télescopage classique,

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty,$$

donc *(par définition de la convergence d'une série)* $\sum v_n$ diverge.

➟ Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on sait que

$$\begin{aligned} v_n &= \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} = u_n. \end{aligned}$$

Donc d'après la proposition ($\mathscr{R}$)

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_n &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k \\ &= \ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

or $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\ln(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$,
donc de toute évidence $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\ln(n))$, ainsi

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Bien comprendre que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + \mathrm{o}(v_n)$!
Autrement dit deux quantités sont équivalentes lorsqu'entre l'une est l'autre il n'y a que des termes négligeables devant ces quantités.

2. (a) On pose cette fois $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ et $v_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$ (définies pour $n \geqslant 2$).

➟ Ce sont bien des suites à termes strictement positifs.

➟ Tout d'abord

$$\begin{aligned} v_n = \ln\left(\frac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right) &= \ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \quad \left(\textit{car } \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln(n)} = u_n. \end{aligned}$$

➟ De plus, par télescopage,

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$$

ce qui montre que $\sum v_k$ diverge.

On peut donc encore utiliser ($\mathscr{R}$) pour conclure que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n+1)).$$

Le fait que les séries soient définies à partir du rang 2 seulement ne change rien à l'utilisation de ($\mathscr{R}$), on ne fait qu'ajouter ou retrancher une constante à une quantité qui tend vers l'infini, donc l'équivalent reste le même.

Comme

$$\begin{aligned}\ln(\ln(n+1)) &= \ln(\ln(n) + \ln(1+1/n)) \\ &= \ln(\ln(n)) + \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)) \quad \textit{(voir la remarque dans la question précédente),}\end{aligned}$$

on conclut que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

(b) En particulier, on vient de voir que la suite des sommes partielles de la série de terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$ a une limite infinie, donc par définition la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

(c)

Pour le terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$, les méthodes de comparaison (équivalences, grand O, inégalités) ne marchent pas. Je me résous donc à effectuer une comparaison somme-intégrale, comme détaillé en page 10 des révisions sur les intégrales définies.
Plus précisément je vais utiliser la solution de l'exercice 3.12.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur $[2 ; +\infty[$, donc

- Pour tout entier $k \geqslant 2$, par la décroissance de f,

$$\forall t \in [k \,;\, k+1], \quad f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$$

ainsi par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}t,$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k).$$

- Pour tout entier $n \geqslant 3$, en additionnant ces inégalités membre à membre pour k allant de 2 à $n-1$, on obtient grâce à la relation de Chasles

$$\sum_{k=2}^{n-1} f(k+1) \leqslant \int_2^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} f(k),$$

soit en notant $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$,

$$S_n - f(2) \leqslant \int_2^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant S_n - f(n),$$

$$\text{d'où} \quad \int_2^n f(t)\mathrm{d}t + f(n) \leqslant S_n \leqslant \int_1^n f(t)\mathrm{d}t + f(2).$$

Or

$$\int_2^n f(t)\mathrm{d}t = \int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t = \int_{\ln(2)}^{\ln(n)} \frac{1}{u}\mathrm{d}u \quad \textit{(en posant } u = \ln(t), \textit{ ou } t = \mathrm{e}^u\textit{)}$$

$$= \Big[\ln(u)\Big]_{\ln(2)}^{\ln(n)} = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)),$$

donc en ne gardant que l'inégalité de gauche :

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant S_n.$$

Mais $\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{n\ln(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, donc par le principe du « gendarme infini » *(appelation non standard)*, cela entraîne que $S_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, ce qui prouve que la série de terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

3. (a) Les trois premiers points de la propriété ($\mathscr{P}$) sont immédiats et le quatrième aussi car $\sum_{k=0}^{n} a_k = n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty$.

Ici, $A_n = n$ et

$$b_n = \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)} \times \ln(n) \ \textit{(d'après la question 1)},$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = 1.$$

(b) Les quatre points de la propriété ($\mathscr{P}$) sont immédiats (on reconnaît le terme général de la série harmonique qui diverge).

Ici $A_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$ et

$$b_n = \frac{1}{\ln(A_n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kA_k}.$$

Posons $u_n = \frac{1}{nA_n}$ et $w_n = \frac{1}{n\ln(n)}$. Les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(w_n)_{n\geqslant 2}$ sont strictement positives à partir du rang 3. Ce sont des suites équivalentes (d'après la question **1**) et ne sont pas sommables (voir la question **2.(b)**).

La propriété ($\mathscr{R}$) indique alors que

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{kH_k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Ici non plus, ajouter les termes d'indices 1 et 2 ne change rien à l'équivalence car les sommes sont de limites infinies et les constantes sont alors négligeables. Donc avec la question **2.(a)** on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kA_k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\ln(A_n) &= \ln(\ln(n)) + \ln\left(\frac{\ln(n)}{A_n}\right) \\ &= \ln(\ln(n)) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(\ln(n))) \quad \textit{(car } \ln(\tfrac{\ln(n)}{H_n}) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0 \textit{ et } \ln(\ln(n)) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty\textit{)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).\end{aligned}$$

On a finalement

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 1.$$

4. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, $A_n = A_{n-1} + a_n$.
Par ailleurs $A_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, car la suite (a_n) est à termes positifs, donc la suite (A_n) est croissante, et divergente puisque $\sum a_n$ diverge.
De plus la suite (a_n) est bornée donc $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(A_n)$.
Ainsi, $A_n = A_{n-1} + o(A_n)$ autrement dit $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A_{n-1}$.

(b) On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{A_{n-1}} = 1$ et donc que

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) &= \ln\left(1 + \left[\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right]\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A_n}{A_{n-1}} - 1 = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{a_n}{A_{n-1}}.\end{aligned}$$

Enfin, $A_{n-1} \sim A_n$ donne

$$\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_n}{A_n}.$$

(c) Le réel $u_n = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)$ est le terme général ($n \geqslant 2$) d'une suite strictement positive de série divergente, car

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \ln(A_n) - \ln(A_1) = \ln(A_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty.$$

Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n}{\mathrm{A}_n}$ qui est aussi à termes positifs, on peut utiliser la propriété $(\mathscr{R})$ pour obtenir que

$$\sum_{k=2}^{n} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{\mathrm{A}_k}.$$

Comme $\sum_{k=2}^{n} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on en déduit que $\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{\mathrm{A}_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc par définition que la série $\sum \frac{a_k}{\mathrm{A}_k}$ diverge.

(d) L'équivalence obtenue ci-dessus s'écrit

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{\mathrm{A}_k} \sim \ln(\mathrm{A}_n).$$

Ajouter à la somme le terme pour $k = 1$ ne change rien à l'équivalence car les deux membres tendent vers $+\infty$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 1.$$

5. On va essayer d'utiliser le résultat précédent pour construire (v_n).
Pour cela, il nous faut une suite vérifiant $(\mathscr{P})$. Nous distinguons donc deux cas.
   - Si (u_n) est bornée, on pose $a_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$ $a_n = u_n$.
   Alors (a_n) vérifie la propriété $(\mathscr{P})$, donc d'après la question **4.(c)**, la série $\sum \frac{a_n}{\mathrm{A}_n}$ diverge, et $\frac{a_n}{\mathrm{A}_n} = o(a_n)$, car le quotient vaut $1/\mathrm{A}_n$ et tend vers 0. Ainsi la suite de terme général $v_n = \frac{a_n}{\mathrm{A}_n}$ convient.
   - Sinon, on pose $w_n = \min(u_n, 1)$. Ainsi $w_n > 0$ et $\sum w_n$ diverge car u_n étant non bornée, elle ne peut tendre vers 0, donc w_n non plus, ce qui donne la divergence grossière de la série.
   Le premier cas donne alors une suite v_n à termes > 0 et de série divergente, et a fortiori $v_n = o(u_n)$, puisque $0 \leqslant w_n \leqslant u_n$.

Une correction de l'exercice 4

énoncé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$ et $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}$ sont continues sur le segment $[0\ ;\ 1]$, donc les intégrales qui définissent I_n et J_n existent bel et bien.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1+x}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x} - \mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\mathrm{d}x \ \ \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\frac{\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

or la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} - 1$ est négative sur $[0\ ;\ 1]$, tandis que $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$ est positive, donc par croissance de l'intégrale, l'intégrande étant continue et négative sur l'intervalle d'intégration, on peut affirmer que $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n$ est négative pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc que la suite de terme général I_n décroît.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$,

$$1 \leqslant 1 + x \leqslant (1+x)^2,$$

donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0\ ;\ +\infty[$,

$$\frac{1}{(1+x)^2} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1,$$

puis en multipliant par e^{-nx} qui est positif

$$\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx},$$

et enfin par croissance de l'intégrale

$$\mathrm{J}_n \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1 = -\frac{\mathrm{e}^{-n}-1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Comme de plus la fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}$ est **continue et strictement positive** sur $[0\ ;\ 1]$, on peut affirmer par stricte positivité de l'intégrale que $0 < \mathrm{J}_n$, ce qui achève de répondre à la question.

(b) Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, on déduit de la question précédente que, par encadrement, I_n et J_n tendent vers 0.

4. Les fonctions $u : x \mapsto -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}$ et $v : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\,1]$, donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \int_0^1 u' \times v = \Big[u \times v\Big]_0^1 - \int_0^1 u \times v' \\
&= \left[-\frac{1}{n}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right) \times \left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n}\left(\frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - 1\right) - \frac{1}{n}\mathrm{J}_n \\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - \mathrm{J}_n\right), \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

5. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} + \mathrm{J}_n\right).$$

Or on sait que J_n et e^{-n} tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} + \mathrm{J}_n\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right),$$

donc

$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right),$$

ce qui prouve que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.