Le rapport du Jaury

Mes abréviations

« TE » : Type-Error ;

« AI » : argumentation insuffisante ;

« VC » : voir le corrigé ;

« AR » : améliorer la rédaction ;

« ASP » : affirmation sans preuve ;

« CP » : je ne comprends pas ;

« MF » : mauvaise foi ;

« N'importe quoi ! » : n'importe quoi !

- Les questions marquées par un 🎁 font partie de la voiture balai de la difficulté mathématique de PC ;
  tandis que les questions marquées par un 🚢 sont des questions récurrentes qu'il faut savoir faire par cœur les yeux fermés sans hésiter...
  Certaines questions difficiles peuvent être signalées par 🔥.
- Vous devez savoir ce que l'on attend de vous quand on vous demande de montrer qu'une fonction, dont l'expression est une intégrale généralisée ou une somme infinie, est définie sur un intervalle ; ou quand on vous demande de donner l'ensemble de définition d'une fonction dont l'expression est une intégrale généralisée ou une somme infinie !
- **Absurdités, Type-Error, phrases incompréhensibles, et vocabulaire au pif.**
  - Confondre un nombre avec une fonction ou une suite ou une série :
    « $\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ est continue, convergente, et décroissante », « $\frac{x^n}{n^\alpha}$ diverge » ;
  - des intégrales intégrables, ou des fonctions convergentes :
    « $\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ est intégrable », « $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est une fonction convergente » ;
  - Laissons le choix de la variable au correcteur :
    « $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ », « $\frac{x^t}{t^\alpha}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ », « $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ », « $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-t}$ » ;
  - égalité à bornes sans grand $\mathbf{O}$ ni petit $\mathbf{o}$: « $\Gamma(1) \underset{X\to+\infty}{=} 1$ » ;
  - des endomorphismes de E confondus avec des vecteurs de E confondus avec des parties de E :
    « $x = \mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v)$ », « $u\circ(u-k\,\mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ donc $u-k\,\mathrm{id}_E \in \mathrm{Ker}(u)$ », « $g = \lambda u$ donc $g\circ g = g(\lambda u)$ ».
- Grossières erreurs à comprendre pour ne plus jamais les refaire :

- le raisonnement du yéti ;
- « si $\alpha < 0$, $\frac{x^n}{n^\alpha} \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} +\infty$ »,
- « u est bijectif si, et seulement si, $u \circ u = \mathrm{id}_E$ », « $x \in \mathrm{Im}(u)$ donc $x = u(x)$ »,
- simplifier par un endomorphisme : « $u \circ (u - k\,\mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, or $u \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc $u - k\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$ »,
- comparer $f(x+1)$ et $f(x)$ pour étudier les variations d'une fonction f,
- confondre un cas avec une généralité : « $f^4(x_0) = x_0$ donc $f^4 = \mathrm{id}_E$ »,
- appliquer le théorème du rang sans vérifier si on est dans un espace vectoriel de dimension finie,
- appliquer un théorème à l'aveugle : « la série $\sum \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{n^\alpha} \mathrm{d}t$ ».

➟ Mention spéciale à tou·te·s les élèves qui ont répondu à la question 3(b) de l'exercice 1 en se contentant de noter l'expression de $f_\alpha(x)$ dans laquelle on a substitué 0, puis -1, puis 1, à α.

Vous choisirez de traiter :

- *soit le* ***sujet 1****, composé des trois exercices ;*
- *soit le* ***sujet 2*** *qui est formé de l'exercice 1 et du problème.*

Exercice 1 – Exercice commun au deux sujets

1. (a) Démontrer que la fonction

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t.$$

est définie sur $]0\,;+\infty[$.

Cette fonction est connue sous le nom de fonction Gamma d'Euler.

(b) Démontrer que pour tout $x>0$, $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$.

(c) Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n)=(n-1)!$.

2. Pour tout réel α, on considère la fonction

$$f_\alpha : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Déterminer, suivant les valeurs du réel α, le domaine de définition $\mathscr{D}_\alpha$ de la fonction f_α.

(On pourra distinguer les cas $\alpha\in]-\infty,0]$, $\alpha\in]0,1]$ *et* $\alpha\in]1,+\infty[$*.)*

3. Dans le cas où $\alpha>0$, déterminer, pour tout $x\in\mathscr{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.
4. Expliciter f_0, f_{-1} et f_1.
5. Dans toute cette question, on suppose que $\alpha\in]0,1[$.

L'objectif est de donner un équivalent de $f_\alpha(x)$ *quand* x *tend vers 1.*

Pour tout $x\in]0,1[$, on considère l'intégrale

$$\mathrm{I}(x)=\int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}\,t.$$

(a) Justifier que, pour tout $x\in]0,1[$, l'intégrale $\mathrm{I}(x)$ est convergente.

(b) Pour tout $x \in]0,1[$, déterminer une expression de $\mathrm{I}(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1-\alpha)$.

(c) Prouver que, pour tout $x \in]0,1[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha}$ est décroissante sur $]0\ ;+\infty[$.

(d) En déduire, pour tout $x \in]0,1[$, l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

(e) En déduire un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

Exercice 2 – Sujet 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Pour tout réel k, on définit l'ensemble $\mathrm{A}_k = \{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \,|\, u^2 = ku\}$ (où $u^2 = u \circ u$).

1. Soit u un endomorphisme appartenant à A_k pour un $k \in \mathbb{R}$.
   (a) L'endomorphisme u peut-il être bijectif ? Préciser u dans ce cas.
   (b) Si $k = 0$, peut-on avoir $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathrm{E}$?
2. Soit f un endomorphisme de E de rang 1. Montrer qu'il existe un réel k tel que $f \in \mathrm{A}_k$.

On suppose dans toute la suite de l'exercice que k est un réel non nul.

3. Soit $u \in \mathrm{A}_k$.
   (a) Vérifier qu'il existe un réel non nul λ tel que $g = \lambda u$ soit un projecteur de E.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathrm{E}$.
4. Soient u et v dans A_k.
   (a) Montrer que si $u \circ v + v \circ u = 0$, alors $u \circ v = v \circ u = 0$.
   (b) À quelle condition nécessaire et suffisante l'endomorphisme $u+v$ est-il aussi dans A_k ?
   Montrer dans ce cas que

$$\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \text{ et } \mathrm{Ker}(u+v) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v).$$

(c) Montrer que si $u \circ v = v \circ u$, alors il existe k' tel que $u \circ v \in \mathrm{A}_{k'}$, et que dans ce cas

$$\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v) \text{ et } \mathrm{Ker}(u \circ v) = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v).$$

Exercice 3 – Sujet 1

Définition

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et $p \in \mathbb{N}^*$.
On dit qu'un endomorphisme f de E est **cyclique d'ordre** p s'il existe un vecteur x_0 de E vérifiant les trois conditions suivantes :

- $f^p(x_0) = x_0$ *(on rappelle que* $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$*)* ;
- la famille $\left(f^k(x_0)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E ;
- la famille $\left(f^k(x_0)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est constituée de vecteurs deux à deux distincts.

On dit alors que la famille $\left(f^k(x_0)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est **un cycle de** f.

Étude d'un exemple

Dans cette partie, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice associée dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans cette base.
3. Montrer que f est cyclique d'ordre 4 et que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de f.
4. Prouver que $f^4 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

Cas général

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, et on considère un endomorphisme f de E cyclique d'ordre p.
Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f.

5. Montrer que $p \geqslant n$.
6. Montrer que $f^p = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.
   En déduire que f est bijective.
7. On note m le plus grand des entiers $\ell \in \mathbb{N}$ tels que la famille $\left(f^k(x_0)\right)_{0 \leqslant k \leqslant \ell-1}$ est libre.
   (a) Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.
   (b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier $k \geqslant m$,
   $$f^k(x_0) \in \operatorname{Vect}\left(\left(f^k(x_0)\right)_{0 \leqslant k \leqslant m-1}\right).$$
   (c) En déduire que $m = n$, et que $\left(f^k(x_0)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une base de E.
8. On note alors $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les coordonnées de $f^n(x_0)$ dans la base $\left(f^k(x_0)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$, c'est-à-dire les n nombres complexes tels que
   $$f^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0).$$
   Montrer que $f^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.
9. (a) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $\left(f^k(x_0)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ à l'aide des coordonnées $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.
   (b) En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{rg}(f - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \geqslant n-1$.
10. On suppose dans cette question que f est cyclique d'ordre n (on rappelle que $\dim(\mathrm{E}) = n$), et on considère un cycle $\left(f^k(x_0)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ de f.
    Soit λ un nombre complexe. Montrer l'équivalence des deux propositions ci-dessous :
    (i) il existe un vecteur non nul u de E vérifiant $f(u) = \lambda u$;
    (ii) λ est une racine n^{e} de l'unité, autrement dit $\lambda^n = 1$.
    (Pour $(ii) \Rightarrow (i)$, on pourra résoudre $f(u) = \lambda u$ dans une base pertinente.)

Problème – Sujet 2

Notations

Dans tout le problème, X **est un** $\mathbb{R}$**-espace vectoriel de dimension** $n \geqslant 2$**, et** T **un endomorphisme non nul de** X**.**

Soit $\mathscr{B}$ une base de X, on note $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ la matrice représentant T dans cette base. On note $\mathrm{N}(\mathrm{T})$ le noyau de T et $\mathrm{R}(\mathrm{T})$ l'image de T.
On note I l'endomorphisme identité de X, $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{O}_n$ la matrice nulle.

1- Traces et projecteurs

1. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ et $\mathbb{B} \times \mathbb{A}$ on la même trace :

$$\mathrm{Tr}(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{B} \times \mathbb{A}).$$

2. Montrer que la trace de la matrice $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$.
   On appelle alors trace de T*, notée* $\mathrm{Tr}(\mathrm{T})$*, la valeur commune des traces des matrices représentant* T*. On dit que la trace est un invariant de similitude.*

On considère un projecteur de X nommé P.

3. Démontrer que $\mathrm{X} = \mathrm{R}(\mathrm{P}) \oplus \mathrm{N}(\mathrm{P})$.
4. En déduire que $\mathrm{rg}(\mathrm{P}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{P})$.

On pose $P' = I - P$.

5. Montrer que $R(P') = N(P)$ et que $R(P) = N(P')$.
6. Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces F et G de X est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.
7. Montrer que si l'endomorphisme $S = \sum_{i=1}^{n} P_i$ est une somme finie de projecteurs P_i, alors $\mathrm{Tr}(S) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{Tr}(S) \geqslant \mathrm{rg}(S)$.

2-Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur P est égal à 1.

8. Démontrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $P \circ T \circ P = \mu P$.

Soit $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une base de X adaptée à la décomposition $X = R(P) \oplus N(P)$.

9. Montrer que dans la base $\mathscr{C}$ la matrice représentant T s'écrit

$$\mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} \mu & \times & \cdots\cdots & \times \\ \hline \times & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \times & & & \end{array}\right) \tag{1}$$

où
- μ est le nombre réel dont l'existence a été prouvé en question 8,
- et $\mathbb{B} \in \mathscr{M}_{n-1}$.

10. Montrer que si $P' \circ T \circ P'$ n'est pas proportionnel à P', alors $\mathbb{B}$, défini en (1), n'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que $P' = I - P$.

3- Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que l'endomorphisme T n'est pas une homothétie.

11. Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in X$ tel que x et $T(x)$ ne soient pas liés (c'est-à-dire ne soient pas colinéaires).

12. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ dans laquelle :

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \times \cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \quad \text{où } \mathbb{A} \in \mathscr{M}_{n-1}.$$

13. En déduire que si $\mathrm{Tr}(\mathrm{T}) = 0$, il existe une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}$ est nulle.

Soit $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une suite de n nombres réels vérifiant $\mathrm{Tr}(\mathrm{T}) = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i$.

14. En dimension $n = 2$, démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}''$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}$ a pour éléments diagonaux t_1 et t_2.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on admettra qu'en dimension $n \geqslant 3$, il existe un projecteur L de X de rang 1, tel que d'une part $\mathrm{L}\,\mathrm{T}\,\mathrm{L} = t\,\mathrm{L}$ et d'autre part $\mathrm{L}'\,\mathrm{T}\,\mathrm{L}'$ ne soit pas proportionnel à $\mathrm{L}' = \mathrm{I} - \mathrm{L}$.

15. En dimension $n \geqslant 3$, à l'aide des questions 9 et 10 démontrer qu'il existe une base $\mathscr{C}$ dans laquelle la matrice représentant T s'écrit

$$\mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} t_1 & \times & \cdots & \times \\ \hline \times & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \times & & & \end{array}\right).$$

où $\mathbb{B}$ n'est pas une homothétie.

16. En dimension $n \geqslant 3$, démontrer par récurrence qu'il existe une base $\mathscr{B}''$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}$ ait pour éléments diagonaux les t_i où $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$.

4 -Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que T est un endomorphisme de X vérifiant $\mathrm{Tr}(T) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{Tr}(T) \geqslant \mathrm{rg}(T)$. On pose $\rho = \mathrm{rg}(T)$ et $\theta = \mathrm{Tr}(T)$.

17. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

    où $\mathbb{T}_1$ est une matrice de taille $\rho \times \rho$.

Supposons tout d'abord que $\mathbb{T}_1$ n'est pas la matrice d'une homothétie.

18. À l'aide de la question 16 montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}'_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}'_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

    où $\mathbb{T}'_1$ admet comme termes diagonaux des entiers non nuls t_i avec $i \in [\![1\,;\,\rho]\!]$.

19. En déduire que T est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

    On suppose maintenant que T_1 est la matrice d'une homothétie.

20. Démontrer que là encore, T est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

Une correction de l'exercice 1

énoncé

1. *La fonction Gamma d'Euler*

(a) *Quand on demande de vérifier qu'une fonction dont l'expression $f(x)$ est une intégrale généralisée, ou la somme infinie d'une série, est définie sur un intervalle I, il faut montrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$ cette intégrale ou cette série converge.*

Soit x un réel strictement positif.

- La fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$;
- en $+\infty$, par croissances comparées $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$,

  En général, quand l'intégrande étudiée contient une exponentielle qui tend vers 0 en $+\infty$, elle est négligeable en $+\infty$ par croissances comparées devant $\frac{1}{t^2}$.

  or la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$, donc par domination, $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est aussi intégrable sur $[1\,;+\infty[$;
- en 0, $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$; or, comme $1-x<1$ car $x>0$, la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0\,;1]$, donc par équivalence $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est aussi intégrable sur $]0\,;1]$;
- on en déduit que la fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale définissant $\Gamma(x)$.

En conclusion, la fonction Γ est définie sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Soit $x>0$. On effectue dans l'intégrale $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ une intégration par parties dans laquelle on pose $u(t)=t^x$ et $v(t)=-\mathrm{e}^{-t}$.
Ces fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$, et de plus

$$u(t)\times v(t) = -t^x\mathrm{e}^{-t} \begin{cases} \xrightarrow[t\longrightarrow0]{} 0 & \text{car } x>0,\\ \xrightarrow[t\longrightarrow+\infty]{} 0 & \text{par croissances comparées.}\end{cases}$$

donc cette intégration par parties est licite. Comme l'intégrale de départ est convergente, on obtient alors l'égalité

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x) \ \text{C.Q.F.D}\end{aligned}$$

(c) Pour $n=1$,

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t=\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t=\lim_{A\to+\infty}\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^A$$
$$=\lim_{A\to+\infty}\left[1-\mathrm{e}^{-A}\right]=1=(1-1)!$$

Puis, si pour un entier $n\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n)=(n-1)!$, alors au rang suivant, grâce à la question précédente,

$$\Gamma(n+1)=n\times\Gamma(n)=n\times(n-1)!=n!\ \text{C.Q.F.D}$$

2. ➟ *Quand on demande de trouver le domaine de définition d'une fonction dont l'expression $f(x)$ est une intégrale généralisée, ou la somme infinie d'une série, il faut trouver l'ensemble de* $\boxed{\textit{TOUS}}$ *les x pour lesquels cette intégrale ou cette série converge.*

Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|>1$.

Alors pour tout réel α, par croissances comparées :

$$\left|\frac{x^n}{n^\alpha}\right|=\frac{|x|^n}{n^\alpha}=\frac{\mathrm{e}^{n\ln(|x|)}}{n^\alpha}\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}+\infty$$ *(par croissances comparées car $\ln(|x|)>0$).*

donc $\frac{x^n}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 et $\sum\frac{x^n}{n^\alpha}$ diverge grossièrement. Ainsi $x\notin\mathscr{D}_\alpha$.

On a d'ores et déjà prouvé que $\boxed{\mathscr{D}_\alpha\subset[-1\ ;\ 1]}$.

➟ Pour tout réel x tel que $|x|<1$, alors, en appliquant le critère de d'Alembert

$$\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\right|}{\frac{x^n}{n^\alpha}}=|x|\times\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}|x|,$$

or on s'est placé dans le cas où $|x|<1$, donc on peut affirmer que la suite de terme général $\frac{x^n}{n^\alpha}$ est sommable, donc que la série $\sum\frac{x^n}{n^\alpha}$ converge, autrement dit que $f_\alpha(x)$ est défini.

On en déduit que $\boxed{]-1\ ;\ 1[\subset\mathscr{D}_\alpha}$.

➟ Pour $x=1$, $f_\alpha(1)$ est la somme de la suite de Riemann de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, donc $f_\alpha(1)$ est défini si, et seulement si, $\alpha>1$.

➟ Pour $x=-1$, $f_\alpha(-1)$ est la somme de la suite de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Cette suite est alternée, et elle vérifie les conditions du critère spécial des séries alternées si, et seulement si, $\alpha>0$.

Ainsi $f_\alpha(-1)$ est défini si, et seulement si, $\alpha>0$.

Résumons-nous :

$$\mathscr{D}_\alpha=\begin{cases}[-1\,;\,1] & \text{si } 1<\alpha\,;\\ [-1\,;\,1[& \text{si } 0<\alpha\leqslant 1\,;\\ ]-1\,;\,1[& \text{si } \alpha\leqslant 0.\end{cases}$$

3. On suppose que $\alpha>0$.

Alors pour tout $x\in\mathscr{D}_\alpha$, $f_\alpha(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}$ est

➟ positif si $x\geqslant 0$, comme somme de termes positifs ;

➟ négatif si $x<0$, car la suite de terme général $\frac{x^n}{n^\alpha}=\frac{(-1)^n|x|^n}{n^\alpha}$ est alternée, et vérifie les conditions du critère spécial des séries alternées, donc en particulier on sait que $f_\alpha(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}$ est du signe de son premier terme x, qui est négatif.

4. ➟ si $\alpha=0$, pour tout $x\in\mathscr{D}_0=\,]-1\,;\,1[$

$$f_0(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\ \ \textit{(l'erreur classique est ici de confondre } \sum_{n=0}^{+\infty} \textit{ et } \sum_{n=1}^{+\infty}\textit{)}$$
$$=x\times\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=x\times\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=x\times\frac{1}{1-x}=\frac{x}{1-x}.$$

➟ si $\alpha=-1$, pour tout $x\in\mathscr{D}_0=\,]-1\,;\,1[$

$$f_{-1}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n=x\times\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$$
$$=x\times\frac{1}{(1-x)^2}\quad\textit{(avec la dérivée de la série géométrique)}$$
$$=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

➟ si $\alpha = 1$, pour tout $x \in \mathscr{D}_0 = [-1\ ;\ 1[$

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$ *(car c'est un développement en série entière usuel que l'on verra dans le chapitre sur les séries entières).*

5. On suppose que $\alpha \in]0\ ;\ 1[$.

   (a) Soit $x \in]0\ ;\ 1[$.

   ➟ La fonction $t \mapsto \frac{x^t}{t^\alpha}$ est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$ *(en 0 car $\alpha > 0$).*

   ➟ Par croissances comparées, puisque $\ln(x) < 0$,

$$\frac{x^t}{t^\alpha} = \frac{\mathrm{e}^{\ln(x)\times t}}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

   or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1\ ;\ +\infty[$, donc $t \mapsto \frac{x^t}{t^\alpha}$ l'est aussi, et par continuité elle est intégrable sur $[0\ ;\ +\infty[$, ce qui prouve que $\mathrm{I}(x)$ converge.

   (b) Le changement de variables $u = (-\ln(x)) \times t$ est licite car $-\ln(x)$ étant strictement positif, la fonction $t \mapsto (-\ln(x))\,t$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante, bijective de $[0\ ;\ +\infty[$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   Il donne $t = \left(-\frac{1}{\ln(x)}\right)u$ donc $\mathrm{d}t = \left(-\frac{1}{\ln(x)}\right)\mathrm{d}u$, et $\left\{\begin{array}{c} t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ t \to +\infty \Rightarrow u \to +\infty \end{array}\right.$, et transforme $\mathrm{I}(x)$ en

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\left(-\frac{1}{\ln(x)}u\right)^\alpha} \times \left(-\frac{1}{\ln(x)}\right)\mathrm{d}u = (-\ln(x))^{\alpha-1}\int_0^{+\infty} u^{-\alpha}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$
$$= (-\ln(x))^{\alpha-1}\,\Gamma(1-\alpha).$$

   Ainsi, sachant que l'intégrale initiale $\mathrm{I}(x)$ est convergente d'après la question précédente, on sait de toutes façons que l'intégrale obtenue après changement de variable reste convergente, donc on peut écrire l'égalité

$$\mathrm{I}(x) = (-\ln(x))^{\alpha-1}\,\Gamma(1-\alpha).$$

   (c) Pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$,

   ➟ la fonction $t \mapsto t^x = \mathrm{e}^{\ln(x)\,t}$ est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ puisque $\ln(x) < 0$, et positive ;

➟ la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est aussi décroissante sur $]0\ ;+\infty[$ puisque $\alpha > 0$, et positive ;

donc leur produit reste une fonction décroissante sur $]0\ ;+\infty[$.
En effet, pour tous réels $0 < a \leqslant b$,

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leqslant b^x \leqslant a^x \\ \text{et } 0 \leqslant \dfrac{1}{b^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{a^\alpha} \end{array}\right\} \text{ donc (en appliquant les règles de calcul sur les inégalités) } \quad 0 \leqslant \frac{b^x}{b^\alpha} \leqslant \left(\frac{a^x}{b^\alpha} \leqslant\right) \frac{a^x}{a^\alpha}.$$

Il n'est pas nécessaire de dériver une fonction pour étudier ses variations. D'ailleurs les fonctions non dérivables ont le droit d'avoir des variations (les pauvres) !

(d) On vient de voir que la fonction $t \mapsto \frac{x^t}{t^\alpha}$ est décroissante sur $]0\ ;+\infty[$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall t \in [n\ ;n+1], \quad \frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leqslant \frac{x^t}{t^\alpha} \leqslant \frac{x^n}{n^\alpha},$$

donc par croissance de l'intégrale

$$\int_n^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{x^t}{t^\alpha} \mathrm{d}t \leqslant \frac{x^n}{n^\alpha} = \int_n^{n+1} \frac{x^n}{n^\alpha} \mathrm{d}t,$$

puis, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, en additionnant ces inégalités terme à terme pour n allant de 1 à N,

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_1^{\mathrm{N}+1} \frac{x^t}{t^\alpha} \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{n^\alpha},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=2}^{\mathrm{N}+1} \frac{x^n}{n^\alpha} \leqslant \int_1^{\mathrm{N}+1} \frac{x^t}{t^\alpha} \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Et comme on sait que ces trois quantités ont une limite finie quand N tend vers $+\infty$, on conclut par prolongement des inégalités larges à la limite que :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha},$$

dont l'inégalité de droite nous donne bien une des deux inégalités demandées :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} = f_\alpha(x).$$

Mais la fonction $t \mapsto \frac{x^t}{t^\alpha}$ étant décroissante sur $]0\,;+\infty[$, on a aussi

$$\forall t \in]0\,;1],\ \ x = \frac{x^1}{1^\alpha} \leqslant \frac{x^t}{t^\alpha},$$

donc, encore par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 x \mathrm{d}t = x \leqslant \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha} \mathrm{d}t,$$

et additionnant terme à terme avec l'inégalité de gauche ci-dessus, on obtient

$$x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \leqslant \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha} \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} \mathrm{d}t,$$

autrement dit

$$f_\alpha(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} \mathrm{d}t, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

(e) La question précédente a permis d'établir que pour tous α et x de $]0\,;1[$,

$$\mathrm{I}(x) - \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha} \mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \mathrm{I}(x).$$

Or $\ln(x) = \ln\big(1 + (x-1)\big) \underset{x \to 1}{\sim} x - 1$, donc

$$\mathrm{I}(x) = \big(-\ln(x)\big)^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \underset{x \to 1}{\sim} (1-x)^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha),$$

et $1-x$ tend vers 0, donc $(1-x)^{\alpha-1}$, ainsi que $\mathrm{I}(x)$, tend vers l'infini puisque $\alpha - 1 < 0$.

Mais pour tout $t \in]0\,;1[$, $0 \leqslant \frac{x^t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$, et comme ces trois expressions définissent des fonctions intégrables (par rapport à t) sur $]0\,;1[$, on a par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha},$$

ce qui prouve que $\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est borné quand x tend vers 1, donc que

$$\mathrm{I}(x) - \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\mathrm{d}t \underset{x\to 1}{\sim} \mathrm{I}(x) \underset{x\to 1}{\sim} (1-x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha).$$

On peut donc conclure par encadrement que

$$f_\alpha(x) \underset{x\to 1}{\sim} (1-x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha).$$

Une correction de l'exercice 2

énoncé

1. Soit $k \in \mathbb{R}$, et $u \in \mathrm{A}_k$.
   (a) Supposons que u est bijectif, alors on déduit en composant l'égalité $u^2 = k\,u$ par u^{-1} que $u = k\,\mathrm{id}_\mathrm{E}$.
   Ce qui exclut le cas $k = 0$ car l'endomorphisme nul n'est pas bijectif.
   En revanche, si $k \neq 0$, alors $k\,\mathrm{id}_\mathrm{E}$ est bien bijectif, et appartient à A_k car

$$(k\,\mathrm{id}_\mathrm{E})^2 = k^2\,\mathrm{id}_\mathrm{E} = k\,(k\,\mathrm{id}_\mathrm{E}).$$

   Pour résumer, on a prouvé que A_k contient des endomorphismes bijectifs (ou automorphismes) seulement dans le cas où $k = 0$, et que dans ce cas l'homothétie $k\,\mathrm{id}_\mathrm{E}$ est le seul automorphisme appartenant à A_k.
   (b) Plaçons-nous dans le cas où $k = 0$.
   Alors comme $u \in \mathrm{A}_k$, on a $u^2 = 0$, donc *(c'est un résultat classique dont je vous laisse retrouver la preuve)* $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, et par conséquent $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u)$.
   - Si $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathrm{E}$, alors il est nécessaire que $\mathrm{Im}(u) = \{0_\mathrm{E}\}$, c'est-à-dire que u soit l'endomorphisme nul.
   - Réciproquement, si u est l'endomorphisme nul, alors $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{E}$ et $\mathrm{Im}(u) = \{0_\mathrm{E}\}$, donc on a bien $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathrm{E}$.

Donc si $k=0$, $\mathrm{Ker}(u)\oplus\mathrm{Im}(u)=\mathrm{E}$ si, et seulement si, u est l'endomorphisme nul.

2. Supposons que $\mathrm{rg}(f)=1$, alors il existe un vecteur non nul e de E qui vérifie $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(e)$.
   - Par définition, $f(e)\in\mathrm{Im}(f)$, donc il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $f(e)=\alpha e$.
   - Pour tout $x\in\mathrm{E}$, $f(x)\in\mathrm{Im}(f)$ donc de même il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=\lambda e$, ainsi
   $$f^2(x)=f(f(x))=f(\lambda e)=\lambda f(e)=\lambda\alpha e=\alpha(\lambda e)=\alpha f(x)$$
   donc $f^2=\alpha f$, ce qui prouve que $f\in\mathrm{A}_\alpha$.
3. k est un réel non nul, et on prend u dans A_k.
   (a) Je vous laisse vérifier que $g=\frac{1}{k}u$ vérifie $g^2=g$, donc est un projecteur.
   (b) L'endomorphisme $\frac{1}{k}u$ est un projecteur, donc on peut affirmer que $\mathrm{Ker}\left(\frac{1}{k}u\right)\oplus\mathrm{Im}\left(\frac{1}{k}u\right)=\mathrm{E}$. Or pour tout $x\in\mathrm{E}$,
   - $x\in\mathrm{Ker}\left(\frac{1}{k}u\right)\iff\frac{1}{k}u(x)=0_{\mathrm{E}}\iff u(x)=0_{\mathrm{E}}\iff x\in\mathrm{Ker}(u)$;
   - $x\in\mathrm{Im}\left(\frac{1}{k}u\right)\iff\exists t\in\mathrm{E},\ x=\frac{1}{k}u(t)=u\left(\frac{1}{k}t\right)\iff x\in\mathrm{Im}(u)$;

   donc $\mathrm{Ker}\left(\frac{1}{k}u\right)=\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{k}u\right)=\mathrm{Im}(u)$, et on peut conclure que $\mathrm{Ker}(u)\oplus\mathrm{Im}(u)=\mathrm{E}$.
4. Soient u et v dans A_k.
   (a) Supposons que $u\circ v+v\circ u=0$, autrement dit que $u\circ v=-v\circ u$.
   En composant à gauche par v, on obtient
   $$v\circ u\circ v=-v^2\circ u=-kv\circ u$$
   et en composant à droite on obtient de même $ku\circ v=-v\circ u\circ v$.
   On en déduit que $kv\circ u=ku\circ v$, donc k étant non nul, $v\circ u=u\circ v$.
   Par conséquent, $u\circ v+v\circ u=0$ entraîne alors que $u\circ v=v\circ u=0$, ce qui répond à la question.
   (b) Tout d'abord $(u+v)^2=u^2+u\circ v+v\circ u+v^2=ku+u\circ v+v\circ u+kv=k(u+v)+u\circ v+v\circ u$. Par conséquent, $u+v\in\mathrm{A}_k$ si, et seulement si, $(u+v)^2=k(u+v)$ si, et seulement si, $u\circ v+v\circ u=0$.

   Dans ce cas, on sait grâce à la question précédente que $u\circ v=v\circ u=0$.

   Montrons que $\mathrm{Im}(u+v)=\mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v)$.

(i) D'une part,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(u+v) &= (u+v)(\mathrm{E}) = \{(u+v)(x) \mid x \in \mathrm{E}\} \\ &= \{u(x)+v(x) \mid x \in \mathrm{E}\} \\ &\subset \left\{u(x)+v(y) \mid (x,y) \in \mathrm{E}^2\right\} = u(\mathrm{E})+v(\mathrm{E}) \\ &= \mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v)\end{aligned}$$

(ii) D'autre part, prenons $z \in \mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v)$, alors il existe $(x,y) \in \mathrm{E}^2$ tel que $z = u(x)+v(y)$.
Ainsi $u(z) = u^2(x)+(u\circ v)(y) = ku(x)+0_{\mathrm{E}}$ *(on a remarqué que $u \circ v = 0$)*.
De même $v(z) = kv(y)$, d'où $(u+v)(z) = ku(x)+kv(y) = kz$, et k étant non nul, $z = \frac{1}{k}(u+v)(z) = (u+v)\left(\frac{1}{k}z\right)$, donc $z \in \mathrm{Im}(u+v)$.

(iii) On a prouvé la double-inclusion qui permet de conclure que $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v)$.

Montrons à présent que $\mathrm{Ker}(u+v) = \mathrm{Ker}(u)\cap\mathrm{Ker}(v)$.

(i) Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)\cap\mathrm{Ker}(v)$, alors $(u+v)(x) = u(x)+v(x) = 0_{\mathrm{E}}+0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}$, donc $x \in \mathrm{Ker}(u+v)$, et $\mathrm{Ker}(u)\cap\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u+v)$.

(ii) Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(u+v)$, alors $(u+v)(x) = u(x)+v(x) = 0_{\mathrm{E}}$, donc en composant par u,

$$\begin{aligned}u^2(x)+u\circ v(x) = 0_{\mathrm{E}} &\iff ku(x)+0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}} \ \textit{(car } u \in \mathrm{A}_k \textit{ et } u\circ v = 0\textit{)} \\ &\iff u(x) = 0_{\mathrm{E}} \ \textit{(car } k \neq 0\textit{)} \\ &\iff x \in \mathrm{Ker}(u).\end{aligned}$$

De même, en composant par v, on montre que $x \in \mathrm{Ker}(v)$, donc $x \in \mathrm{Ker}(u)\cap\mathrm{Ker}(v)$, ce qui achève notre raisonnement.

5. Supposons que $u\circ v = v \circ u$.

➟ Alors

$$\begin{aligned}(u\circ v)^2 &= u\circ(v\circ u)\circ v = u\circ(u\circ v)\circ v \ \textit{(par hypothèse)} \\ &= u^2\circ v^2 = (ku)\circ(kv) = k^2 u\circ v\end{aligned}$$

donc $u \circ v \in \mathrm{A}_{k^2}$.

➟ Montrons que $\mathrm{Im}(u\circ v)=\mathrm{Im}(u)\cap\mathrm{Im}(v)$.

(i) Si $y\in\mathrm{Im}(u\circ v)$, alors il existe $x\in\mathrm{E}$ tel que $y=(u\circ v)(x)$. Ainsi $y=u(v(x))\in\mathrm{Im}(u)$, et comme $u\circ v=v\circ u$, alors $y=(v\circ u)(x)=v(u(x))\in\mathrm{Im}(v)$.

Par conséquent, $x\in\mathrm{Im}(u)\cap\mathrm{Im}(v)$, ce qui prouve l'inclusion $\mathrm{Im}(u\circ v)\subset\mathrm{Im}(u)\cap\mathrm{Im}(v)$.

(ii) Réciproquement, soit $y\in\mathrm{Im}(u)\cap\mathrm{Im}(v)$, alors il existe $(x_1,x_2)\in\mathrm{E}^2$ tel que $y=u(x_1)=v(x_2)$.

Ainsi

$$\begin{aligned} u(y)&=u^2(x_1)=ku(x_1)=ky && (1)\\ \text{et } u(y)&=u(v(x_2))=(u\circ v)(x_2)=(v\circ u)(x_2) && (2)\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}(v\circ u)(y)&=v(u(y))=v((v\circ u)(x_2))\ \textit{(par (2))}\\ &=v^2(u(x_2))=kv(u(x_2))=kv\circ u(x_2)=ku(y)\ \textit{(par (2))}\\ &=k^2y\ \textit{(par (1))}\end{aligned}$$

on en déduit que $y=\frac{1}{k^2}(v\circ u)(y)\in\mathrm{Im}(u\circ v)$, ce qui achève la preuve de l'égalité $\mathrm{Im}(u\circ v)=\mathrm{Im}(u)\cap\mathrm{Im}(v)$.

➟ Montrons que $\mathrm{Ker}(u\circ v)=\mathrm{Ker}(u)+\mathrm{Ker}(v)$.

(i) Soit $x\in\mathrm{Ker}(u)+\mathrm{Ker}(v)$, alors il existe $x_1\in\mathrm{Ker}(u)$ et $x_2\in\mathrm{Ker}(v)$ tels que $x=x_1+x_2$. Ainsi

$$\begin{aligned}(u\circ v)(x)&=(u\circ v)(x_1)+(u\circ v)(x_2)\\ &=(v\circ u)(x_1)+(u\circ v)(x_2)\ \textit{(car } u\circ v=v\circ u\textit{)}\\ &=v(u(x_1))+u(v(x_2))=0_{\mathrm{E}}\ \textit{(car } u(x_1)=v(x_2)=0_{\mathrm{E}}\textit{).}\end{aligned}$$

Donc $x\in\mathrm{Ker}(u\circ v)$, et $\mathrm{Ker}(u)+\mathrm{Ker}(v)\subset\mathrm{Ker}(u\circ v)$.

(ii) Soit $x\in\mathrm{Ker}(u\circ v)$, et donc $x\in\mathrm{Ker}(v\circ u)$.

On sait que $u\in\mathrm{A}_k$, donc d'après la question **3**, $\mathrm{E}=\mathrm{Ker}(u)\oplus\mathrm{Im}(u)$, par conséquent il existe $x_1\in\mathrm{Ker}(u)$ et $u(t)\in\mathrm{Im}(u)$, où $t\in\mathrm{E}$, tels que $x=x_1+u(t)$. On a alors

$$\begin{aligned}v\circ u(x)&=v\circ u(x_1)+v\circ u(u(t))\\ &=v\circ u(x_1)+v\circ u^2(t)\\ &=v\circ u(x_1)+k\,v\circ u(t).\end{aligned}$$

Or $v \circ u(x) = 0_{\mathrm{E}}$ car $x \in \mathrm{Ker}(u \circ v)$, et $v \circ u(x_1) = 0_{\mathrm{E}}$ car $x_1 \in \mathrm{Ker}(u)$.
Il reste alors $kv \circ u(t) = 0_{\mathrm{E}}$, or $k \neq 0$, donc $v \circ u(t) = 0_{\mathrm{E}}$, c'est-à-dire $u(t) \in \mathrm{Ker}(v)$.
On a donc montré que $x \in \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$, ce qui achève notre raisonnement.

Une correction de l'exercice 3

énoncé

Étude d'un exemple

1. La famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une famille de 3 vecteurs, dans un espace vectoriel E de dimension 3, donc cette famille est une base de E si et seulement si elle est de rang 3, ce qui revient à dire que le rang de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est 3.
   D'après la première colonne de la matrice A, $f(e_1) = e_1 + e_2 - 2e_3$, puis

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2(e_1)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(f(e_1)) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1))\\ &= \mathrm{A} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

   donc $f^2(e_1) = -e_1 - 2e_2 + 2e_3$.
   Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1, f(e_1), f^2(e_1))\right) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + 2\mathrm{L}_2\\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3.\end{aligned}$$

   On en déduit que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est libre.
   Et comme c'est une famille de trois vecteurs de E qui est de dimension 3, c'est une base de E.

2. **Méthode du débrouillard :** notons $\mathscr{B}'$ la base $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$, et cherchons comme demandé $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{(e_1, f(e_1), f^2(e_1))}(f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$.

Les deux premières colonnes sont évidentes, il reste à exprimer $f^3(e_1)$ comme combinaison linéaire de $e_1, f(e_1), f^2(e_1)$. On connaît $f^2(e_1) = -e_1 - 2e_2 + 2e_3$, donc en multipliant par A, on obtient $f^3(e_1) = -e_1 + e_2$.
Or, on remarque que $f(e_1) + f^2(e_1) = -e_2$, donc que

$$-e_1 - f(e_1) - f^2(e_1) = -e_1 - \left(f(e_1) + f^2(e_1)\right) = -e_1 + e_2 = f^3(e_1).$$

On peut donc conclure que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Méthode laborieuse mais sûre : grâce à la formule de changement de bases, la matrice de f dans cette base $\left(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\right)$, que l'on notera $\mathscr{B}'$, est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{P}^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times \mathrm{P}$$

où $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.
Je ne détaille pas le calcul de P^{-1}, que vous obtiendrez par la méthode de votre choix : résolution d'un système de Cramer $\mathrm{PX} = \mathrm{B}$, ou la méthode de Gauss-Jordan qui consiste à transformer $(\mathrm{P} \mid \mathrm{I}_3)$ en $(\mathrm{I}_3 \mid \mathrm{P}^{-1})$ par des opérations sur les lignes.

Ce calcul donne $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$,
puis par un produit matriciel sans piège

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. ➟ On a déjà vu que $f^3(e_1) = -e_1 + e_2$, d'où

$$f^4(e_1) = f(f^3(e_1)) = f(-e_1 + e_2) = -f(e_1) + f(e_2) = e_1.$$

➟ on sait que $\left(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\right)$ est une base de E, donc une famille génératrice de E, d'où a fortiori la famille $\left(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\right)$ est génératrice de E. On a vu aussi que cette famille est formée de vecteurs deux à deux distincts.

➟ Ainsi f est cyclique d'ordre 4, et $\left(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\right)$ est un cycle de f.

4. Un calcul matriciel basique montre que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^4 = \mathrm{I}_4$$

donc $f^4 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

Cas général

5. La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E et a pour cardinal p car ses éléments sont deux à deux distincts. Or $\dim(\mathrm{E}) = n$, donc $p \geqslant n$.
6. ➟ On sait que $f^p(x_0) = x_0$,
   ➟ soit $u \in \mathrm{E}$, comme $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E, il existe p scalaires $a_0, \dots, a_{p-1}$ qui vérifient

$$u = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x_0)$$

   alors

$$\begin{aligned} \boxed{f^p(u)} &= f^p\left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^p(f^k(x_0)) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{p+k}(x_0) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(\underbrace{f^p(x_0)}_{=x_0}) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x_0) = \boxed{u} \end{aligned}$$

   donc $\boxed{f^p = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}}$.

   ➟ On vient d'obtenir $f^p = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, donc p étant supérieur ou égal à 1, on peut écrire $f \circ f^{p-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, ce qui entraîne que f est bijective et que $f^{-1} = f^{p-1}$.
7. (a) Par définition de m, on peut affirmer que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0), f^m(x_0))$ n'est pas une famille libre.
   Or la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre, donc $f^m(x_0)$ est redondant, autrement dit $f^m(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$, ce qui revient à dire que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}(k)$ la proposition

« $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$. »

➟ On a prouvé dans la question précédente que $\mathscr{P}(m)$ est vraie ;

➟ soit $k \geqslant m$, supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire qu'il existe m scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$ qui vérifient

$$f^k(x_0) = \alpha_0 x_0 + \cdots + \alpha_{m-1} f^{m-1}(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^i(x_0)$$

alors au rang suivant

$$\begin{aligned} f^{k+1}(x_0) = f\left(f^k(x_0)\right) &= f\left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^i(x_0)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^{i+1}(x_0) = \alpha_0 f(x_0) + \cdots + \alpha_{m-1} f^m(x_0) \end{aligned}$$

donc $f^{k+1}(x_0)$ est combinaison linéaire de $f(x_0), \ldots, f^m(x_0)$, et comme on a vu que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire de $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$, on peut conclure que $f^{k+1}(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$, ce qui achève la preuve.

(c) ➟ Comme la famille de m vecteurs $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$ est libre dans E, et E est de dimension n, on peut déjà affirmer que $m \leqslant n$.

➟ D'autre part, $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est un cycle de f, donc c'est une famille génératrice de E, ainsi $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$.
Or on a vu dans la question précédente que pour tout $k \geqslant m$,

$$f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$$

et ce résultat se prolonge évidemment pour $k \in [\![0, m-1]\!]$. On en déduit que

$$\mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)) \subset \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$$

Ainsi, $\mathrm{E} \subset \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$, et l'inclusion inverse étant évidente, on conclut que $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$, donc que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E, ce qui impose que son cardinal m est supérieur ou égal à la dimension n de E, c'est-à-dire $m \geqslant n$.

➟ On peut donc conclure que $\boxed{m = n}$, et qu'étant libre et génératrice de E, la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

8. (a) On considère $g = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i$.

➟ Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} g(f^k(x_0)) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(f^k(x_0)) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^{i+k}(x_0) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^k(f^i(x_0)) = f^k\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x_0)\right) \\ &= f^k(f^n(x_0)) = f^{k+n}(x_0) \end{aligned}$$

➟ Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g(f^k(x_0)) = f^n(f^k(x_0))$, donc g et f^n coïncident sur la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$, et cela suffit pour affirmer que g et f^n sont égales, c'est-à-dire

$$f^n = a_0 id_{\mathrm{E}} + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$$

> *Rappelons que deux applications f et g définies sur E sont égales si, et seulement si, $[\forall x \in \mathrm{E},\ \ f(x) = g(x)]$; mais que dans le cas où ces deux applications sont **linéaires**, **il suffit** qu'elles coïncident sur **une base** de E*

(b) Notons $\mathscr{B}'$ la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$, par définition

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(x_0), f(f(x_0)), \dots, f(f^{n-1}(x_0))) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0)) \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(c) De la question précédente, on déduit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f-\lambda\,\mathrm{id}_E)=\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Les $n-1$ premières colonnes forment une famille de rang $n-1$, donc le rang de cette matrice est au moins $n-1$, autrement dit $\boxed{\mathrm{rg}(f-\lambda\,\mathrm{id}_E)\geqslant n-1}$.

9. L'endomorphisme f est cyclique d'ordre n, donc d'après la question **.2.**, $f^n = \mathrm{id}_E$.

(i) Supposons qu'il existe un vecteur u non nul de E tel que $f(u)=\lambda u$. Alors on prouve (par une récurrence simple sur $k\in\mathbb{N}$) que pour tout $k\in\mathbb{N}$ $f^k(u)=\lambda^k u$. Ainsi en particulier $f^n(u)=\lambda^n u$.

Or $f^n=\mathrm{id}_E$, donc $f^n(u)=u$.

Par conséquent, $u=\lambda^n u$, autrement dit $(\lambda^n-1)u=0_E$, et comme $u\neq 0_E$, on en déduit que $\lambda^n=1$.

(ii) Réciproquement, si λ est une racine n-ième de l'unité, cherchons un vecteur non nul u qui vérifie $f(u)=\lambda u$.

On se place dans la base *(voir la question **3c**)* $\mathscr{B}'=\left(x_0, f(x_0),\dots,f^{n-1}(x_0)\right)$ et on cherche u sous la forme

$$u=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f^{k-1}(x_0)=\alpha_1 x_0+\cdots+\alpha_n f^{n-1}(x_0).$$

Comme dans la question **(b)**, et sachant que $f(f^{n-1}(x_0))=f^n(x_0)=x_0$, on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$f(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n = \lambda \alpha_1 \\ \alpha_1 = \lambda \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} = \lambda \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} = \lambda \alpha_n \end{cases}$$

d'où « en remontant » de la dernière équation

$$f(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n = \lambda^n \alpha_n \\ \alpha_1 = \lambda^{n-1} \alpha_n \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} = \lambda^2 \alpha_n \\ \alpha_{n-1} = \lambda \alpha_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda^n)\alpha_n = 0 \\ \alpha_1 = \lambda^{n-1} \alpha_n \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} = \lambda^2 \alpha_n \\ \alpha_{n-1} = \lambda \alpha_n \end{cases}$$

Ainsi, comme $\lambda^n = 1$, il suffit de prendre $\alpha_k = \lambda^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, pour avoir une solution à ce système.
On en déduit que le vecteur non nul

$$u = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} f^{k-1}(x_0) = \lambda^{n-1} x_0 + \lambda^{n-2} f(x_0) + \cdots + \lambda f^{n-2}(x_0) + f^{n-1}(x_0)$$

vérifie $f(u) = \lambda u$, ce qui achève de prouver l'équivalence demandée.

Une correction du problème

énoncé

1-Traces et projecteurs

Cette partie est essentiellement constituée de questions de cours classiques.

1. Pour toutes matrices $\mathbb{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathbb{B} = \left(b_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} a_{i,j} = \operatorname{Tr}(\mathbb{B}\mathbb{A}). \end{aligned}$$

2. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de X, et Q la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. On a alors :

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}'} = \mathrm{Q}^{-1}\mathbb{T}_{\mathscr{B}}\mathrm{Q},$$

En appliquant la question précédente avec $\mathbb{A} = \mathrm{Q}^{-1}\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ et $\mathbb{B} = \mathrm{Q}$, on obtient :

$$\mathrm{Tr}(\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Q}\mathrm{Q}^{-1}\mathbb{T}_{\mathscr{B}}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{T}_{\mathscr{B}}).$$

3. Pour tout vecteur x de X,

$$\mathrm{P}(x - \mathrm{P}(x)) = \mathrm{P}(x) - \mathrm{P}^2(x) = 0_{\mathrm{X}} \ \textit{(car } \mathrm{P}^2 = \mathrm{P}\textit{)}$$

ce qui prouve que $x - \mathrm{P}(x) \in \mathrm{N}(\mathrm{P})$.
Comme $\mathrm{P}(x)$ est élément de $\mathrm{R}(\mathrm{P})$, l'égalité $x = \mathrm{P}(x) + (x - \mathrm{P}(x))$ prouve que $\mathrm{X} = \mathrm{R}(\mathrm{P}) + \mathrm{N}(\mathrm{P})$.
De plus le théorème du rang nous donne la condition de complémentarité des dimensions des deux sous-espaces, d'où la conclusion $\mathrm{X} = \mathrm{R}(\mathrm{P}) \oplus \mathrm{N}(\mathrm{P})$.

4. Soit x un vecteur de $\mathrm{R}(\mathrm{P})$. Alors par définition, il existe $y \in \mathrm{X}$ tel que $x = \mathrm{P}(y)$. Ainsi

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{P}(y)) = \mathrm{P}^2(y) = \mathrm{P}(y) = x\cdot$$

Soit r le rang de P. Dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $\mathrm{X} = \mathrm{R}(\mathrm{P}) \oplus \mathrm{N}(\mathrm{P})$, on a

$$\mathbb{P}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $\mathrm{Tr}(\mathrm{P}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{P}_{\mathscr{B}}) = r = \mathrm{rg}(\mathrm{P})$.

5. ➟ On a vu précédemment que si $x \in \mathrm{R}(\mathrm{P})$, alors $\mathrm{P}(x) = x$, donc

$$\mathrm{P}'(x) = (\mathrm{I} - \mathrm{P})(x) = x - \mathrm{P}(x) = 0,$$

d'où $\mathrm{R}(\mathrm{P}) \subset \mathrm{N}(\mathrm{P}')$.

➟ Réciproquement, si x est un élément de $\mathrm{N}(\mathrm{P}')$, alors $x = \mathrm{P}(x)$ donc $x \in \mathrm{R}(\mathrm{P})$, d'où $\mathrm{N}(\mathrm{P}') \subset \mathrm{R}(\mathrm{P})$.

Par conséquent on a bien l'égalité $\boxed{\mathrm{R}(\mathrm{P}) = \mathrm{N}(\mathrm{P}').}$

De plus P' est aussi un projecteur, car, comme P et I commutent,

$$P'^2 = (I-P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P,$$

ainsi en échangeant les rôles de P et de P' (puisque $P = I - P'$), on obtient de même $R(P') = N(P)$.

6. La formule de Grassmann nous dit que pour deux sous-espaces vectoriels F et G de X

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G),$$

donc $\dim(F+G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.

7. Soit $P_1, \ldots, P_m$ m projecteurs de X, et $S = \sum_{i=1}^{m} P_i$.

   - Pour $m = 1$, $S = P_1$, et on a vu dans la question 4. que $\mathrm{Tr}(S) = \mathrm{rg}(S)$, donc $\mathrm{Tr}(S) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{Tr}(S) \geqslant \mathrm{rg}(S)$.
   - Supposons la propriété vraie à l'ordre $m - 1 \geqslant 1$, et posons $S' = \sum_{i=1}^{m-1} P_i$.
     Alors $S = S' + P_m$, et par hypothèse de récurrence $\mathrm{Tr}(S') \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{Tr}(S') \geqslant \mathrm{rg}(S')$.
     La trace étant linéaire, $\mathrm{Tr}(S) = \mathrm{Tr}\left(S'\right) + \mathrm{Tr}(P_m) \in N$ comme somme de deux entiers.
     De plus, $R(S) = S(X)$ et pour tout x de X, $S(x) = S'(x) + P_m(x)$, donc $R(S) \subset R(S') + R(P_m)$.
     Ainsi en utilisant la question précédente et $\mathrm{Tr}(P_m) = \mathrm{rg}(P_m)$, on peut conclure que

$$\mathrm{rg}(S) = \dim R(S) \leqslant \mathrm{rg}(S') + \mathrm{rg}(P_m) \leqslant \mathrm{Tr}(S') + \mathrm{Tr}(P_m) = \mathrm{Tr}(S),$$

ce qui achève notre raisonnement par récurrence.

2-Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur P est égal à 1.

8. L'endomorphisme P est un projecteur de X, donc la question 3 nous donne la décomposition $X = R(P) \oplus N(P)$. Prenons une base $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ adaptée à cette décomposition.

L'énoncé nous donne $\operatorname{rg}(P) = \dim(R(P)) = 1$, et le vecteur non nul f_1 est dans $R(P)$, donc $R(P) = \operatorname{Vect}(f_1)$. On a vu de plus en question 5 que $R(P) = N(I - P)$, donc $P(f_1) = f_1$.
Ainsi

$$\begin{aligned}(P \circ T \circ P)(f_1) &= (P \circ T)(P(f_1)) = (P \circ T)(f_1) \\ &= P(T(f_1)) \in R(P) = \operatorname{Vect}(f_1)\end{aligned}$$

donc il existe un réel μ tel que $(P \circ T \circ P)(f_1) = \mu f_1$.
Soit $x \in X$, et $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i f_i$ sa décomposition dans la base $\mathscr{C}$, alors

$$P(x) = P\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_i f_i\right) = \lambda_1 \underbrace{P(f_1)}_{=f_1} + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \underbrace{P(f_k)}_{=0_X} = \lambda_1 f_1,$$

et de même

$$\begin{aligned}(P \circ T \circ P)(x) &= (P \circ T \circ P)\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_i f_i\right) \\ &= \lambda_1 \underbrace{(P \circ T \circ P)(f_1)}_{=\mu f_1} + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \underbrace{(P \circ T \circ P)(f_k)}_{=0_X} \\ &= \lambda_1 \mu f_1 = \mu(\lambda_1 f_1) \\ &= \mu P(x) \quad \text{C.Q.F.D} \quad \textit{(d'après le calcul ci-dessus).}\end{aligned}$$

9. La réponse à la question précédente donne $t_{1,1} = \mu$, ce qui répond à cette question.

10. Par définition de P', $\mathbb{P}'_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{pmatrix}$.

Si on écrit de la même façon, $\mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & \mathbb{B} \end{pmatrix}$, un calcul en blocs donne alors :

$$\mathbb{P}'_{\mathscr{C}} \mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ C & \mathbb{B} \end{pmatrix}$$

puis

$$\mathbb{P}'_{\mathscr{C}}\mathbb{T}_{\mathscr{C}}\mathbb{P}'_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \mathbb{B} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si $\mathbb{B}$ est la matrice d'une homothétie, il existe un scalaire α tel que $\mathbb{B} = \lambda\mathbb{I}_{n-1}$, d'où

$$\mathbb{P}'_{\mathscr{C}}\mathbb{T}_{\mathscr{C}}\mathbb{P}'_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \alpha\mathbb{I}_{n-1} \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda\mathbb{P}'_{\mathscr{C}},$$

ainsi, en rappelant derechef que $\Psi \mapsto \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(\Psi)$ est bijective, on en déduit que $\mathrm{P}' \circ \mathrm{T} \circ \mathrm{P}' = \alpha\mathrm{P}'$, donc que $\mathrm{P}' \circ \mathrm{T} \circ \mathrm{P}'$ est proportionnel à P'.
On a ainsi vérifié par la contraposée que si $\mathrm{P}' \circ \mathrm{T} \circ \mathrm{P}'$ n'est pas proportionnel à P', alors $\mathbb{B}$ n'est pas la matrice d'une homothétie.

3- Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que l'endomorphisme T n'est pas une homothétie.

11. *Cette question est un grand classique*

Prouvons la contraposée du résultat demandé : on suppose que pour tout x de E, $(x, \mathrm{T}(x))$ est une famille liée, alors il existe λ_x et μ_x deux réels **qui ne sont pas tous les deux nuls** tels que $\lambda_x x + \mu_x \mathrm{T}(x) = 0_{\mathrm{E}}$.
Si $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, alors $\mu_x \neq 0$, car sinon il faudrait que $\lambda_x \neq 0$, dont découlerait $x = -\frac{\mu_x}{\lambda_x}\mathrm{T}(x) = 0_{\mathrm{E}}$.
Ainsi on peut supposer que pour tout $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, il existe un nombre α_x tel que $\mathrm{T}(x) = -\frac{\lambda_x}{\mu_x}x = \alpha_x x$.
Soit u un vecteur non nul fixé et le réel $\alpha = \alpha_u$ tel que $\mathrm{T}(u) = \alpha u$.
Pour tout $x \in \mathrm{E}$:

- si x est colinéaire à u, il existe λ tel que $x = \lambda u$ et

$$\mathrm{T}(x) = \lambda\mathrm{T}(u) = \lambda\alpha u = \alpha x;$$

- si x n'est pas colinéaire à u, $u + x$ est non nul et on a alors :

$$\mathrm{T}(x+u) = \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}(u) = \alpha_x x + \alpha u,$$

mais par hypothèse il existe un nombre α_{x+u} tel que

$$T(x+u) = \alpha_{x+u}(u+x) = \alpha_{x+u}u + \alpha_{x+u}x.$$

On en déduit que $\alpha_x x + \alpha u = \alpha_{x+u}u + \alpha_{x+u}x$, autrement dit que $(\alpha_{x+u} - \alpha)\,u + (\alpha_{x+u} - \alpha_x)\,x = 0_E$, et la famille (u, x) étant libre, on peut en déduire que $\alpha = \alpha_{x+u} = \alpha_x$.

Par conséquent

$$T(x) = \alpha_x x = \alpha_u x.$$

Ainsi il existe un réel α tel que pour tout x non nul, et de manière évidente pour le vecteur nul, $T(x) = \alpha x$. Autrement dit T est une homothétie, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

On peut donc affirmer qu'il existe un vecteur $x \in X$ tel que x et $T(x)$ ne soient pas liés.

12. Prenons donc un tel vecteur e_1 tel que e_1 et $T(e_1)$ ne soient pas colinéaires. Le théorème de la base incomplète nous autorise alors à compléter cette famille libre $(e_1, T(e_1))$ en $\boxed{\text{une base } \mathscr{B} = (e_1, T(e_1), e_3, \dots, e_n) \text{ de X}}$, et dans cette base T a bien la matrice recherchée.

13. Soit T un endomorphisme de X de trace nulle qui n'est pas une homothétie.

    On va procéder par récurrence sur la dimension n de X.

    - Au rang $n = 2$, grâce à la question précédente, on sait qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de X telle que

      $$\mathbb{T}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

      Ainsi $\mathrm{Tr}(T) = a$, et comme on a supposé que cette trace est nulle, on obtient que $a = 0$, donc que la diagonale de cette matrice est nulle.

      Ainsi la base $\mathscr{B}$ convient.

    - Supposons la propriété réalisée à l'ordre $n-1$.

      On a montré dans la question précédente l'existence d'une base $\mathscr{B} =$

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ dans laquelle la matrice $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ est de la forme suivante :

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \times \cdots\cdots \times \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \mathbb{A} \\ 0 & \end{array}\right)$$

où $\mathbb{A} \in \mathscr{M}_{n-1}$. Ainsi $\mathrm{Tr}(\mathrm{T}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{A})$, donc par hypothèse $\mathrm{Tr}(\mathbb{A}) = 0$.

- Si $\mathbb{A}$ est de la forme $\alpha \mathbb{I}_{n-1}$, alors sa trace est $(n-1)\alpha$, mais est aussi nulle. Ainsi $\alpha = 0$, donc $\mathbb{A}$ est la matrice nulle, et la base $\mathscr{B}$ convient.
- Sinon, soit T_1 l'endomorphisme de $\mathrm{X}_1 = \mathrm{Vect}(e_2, \cdots, e_n)$ de matrice $\mathbb{A}$ dans la base $\mathscr{B}_1 = (e_2, \cdots, e_n)$.
  Cet endomorphisme n'est pas une homothétie (puisqu'on est dans le cas où $\mathbb{A}$ n'est pas un multiple de $\mathbb{I}_n$), et il est de trace nulle.
  On peut donc appliquer à T_1 l'hypothèse de récurrence, qui nous donne une base $\mathscr{B}_1' = \left(e_2', \cdots, e_n'\right)$ dans laquelle la matrice $\mathbb{A}_1$ de T_1 a sa diagonale nulle.
  Ainsi $\mathscr{B}' = \left(e_1, e_2', \cdots, e_n'\right)$ est une base de X dans laquelle la matrice de T n'a que des 0 sur la diagonale (voir la preuve ci-dessous), ce qui achève le raisonnement par récurrence.
  On peut montrer que la matrice dans $\mathscr{B}'$ de T n'a que des 0 sur la diagonale matriciellement ou en vectoriellement.

  Méthode matricielle : soit $\mathbb{Q}_1$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_1'$, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est alors $\mathbb{Q} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{Q}_1 \\ 0 & \end{array}\right)$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{\mathscr{B}'} &= \mathbb{Q}^{-1} \mathbb{T}_{\mathscr{B}} \mathbb{Q} \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{Q}_1^{-1} \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & \times \cdots\cdots \times \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \mathbb{A} \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{Q}_1 \\ 0 & \end{array}\right) \end{aligned}$$

Soit

$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}'} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \times \cdots\cdots\cdots \times \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \mathbb{Q}_1^{-1} \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{Q}_1 \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0 & \times \cdots\cdots \times \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \mathrm{A}_1 \\ 0 & \end{array}\right)$$

matrice dont la diagonale est composée d'un 0 suivi des éléments diagonaux de $\mathbb{A}_1$ nuls par construction.

Méthode vectorielle : par la matrice précédente, $\mathrm{T}(e_1) \in \mathrm{X}_1$ ce qui justifie que dans $\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}$ ait un 0 en ligne 1 colonne 1.

Si $x \in \mathrm{X}_1, \mathrm{T}(x) = \alpha_x e_1 + \mathrm{T}_1(x)$; aussi, la composante de $\mathrm{T}(e'_i)$ sur e'_i est la même que celle de $\mathrm{T}_1(e'_i)$; elle est donc nulle. Tous les termes diagonaux de $\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}$ sont donc nuls.

14. Posons $\mathrm{T}' = \mathrm{T} - t_1\mathrm{I}$. Cet endomorphisme n'est ni une homothétie ni l'endomorphisme nul puisque T n'est pas une homothétie, donc n'est pas colinéaire à I. Par la question 12, il existe une base $\mathscr{B}$ de X dans laquelle T' a pour matrice

$$\mathbb{T}'_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

où $a = \mathrm{Tr}\,\mathrm{T}' = \mathrm{Tr}(\mathrm{T}) - t_1\,\mathrm{Tr}(\mathrm{I})\mathrm{I} = (t_1 + t_2) - 2t_1 = t_2 - t_1$, ainsi $\mathbb{T}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & t_2 - t_1 \end{pmatrix} + t_1\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} t_1 & b \\ 1 & t_2 \end{pmatrix}$

15. Par la propriété admise, il existe un projecteur L de X de rang 1, tel que d'une part $\mathrm{LTL} = t_1\mathrm{L}$ et d'autre part $\mathrm{L}'\mathrm{T}\mathrm{L}'$ ne soit pas proportionnel à $\mathrm{L}' = \mathrm{I} - \mathrm{L}$. Par la question 9, dans une base $\mathscr{C}$ adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{R}(\mathrm{L}) \oplus \mathrm{N}(\mathrm{L})$

$$\mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \left(\begin{array}{c|c} t_1 & \times \cdots\cdots \times \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \mathrm{B} \\ 0 & \end{array}\right).$$

et par la question 10 comme $L'TL'$ n'est pas proportionnel à I, $\mathbb{B}$ n'est pas une matrice colinéaire à I.

16. La récurrence est suggérée et a été initialisée pour $n=2$ dans la question 14. Supposons la propriété réalisée à l'ordre $n-1 \geqslant 2$ et démontrons-la à l'ordre n. Par la question précédente, il existe $\mathscr{C}=(e_1,\cdots,e_n)$ telle que :
$$\mathbb{T}_{\mathscr{C}}=\left(\begin{array}{c|c} t_1 & \times\cdots\cdots\times \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \mathrm{B} \\ 0 & \end{array}\right),$$
où $\mathbb{B}$ n'est pas une matrice d'homothétie et $\mathrm{Tr}(\mathbb{B})=\mathrm{Tr}(\mathrm{T})-t_1=\sum\limits_{i=2}^{n} t_i$.
Soit T_1 l'endomorphisme de $\mathrm{Vect}(e_2,\cdots,e_n)$ de matrice $\mathbb{B}$ dans la base $\mathscr{C}_1=(e_2,\cdots,e_n)$. La matrice T_1 n'est donc pas une homothétie donc par hypothèse de récurrence, il existe $\mathscr{C}''$ telle que $\mathbb{T}_{1,\mathscr{C}''}=\mathbb{B}'$ est une matrice de termes diagonaux $t_2,\cdots,t_n$.
Soit $\mathscr{B}''=\{e_1\}\cup\mathscr{C}''$. La matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}''$ est $\mathbb{Q}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbb{Q}_1\end{pmatrix}$ où $\mathbb{Q}_1$ est la matrice de passage de $\mathscr{C}_1$ à $\mathscr{C}''$ et $\mathbb{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbb{Q}_1^{-1}\end{pmatrix}$.
Un calcul en blocs identique à celui de la question 13 donne alors :
$$\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}=\mathbb{Q}^{-1}\left(\begin{array}{c|c} t_1 & \times\cdots\cdots\times \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \mathrm{B} \\ 0 & \end{array}\right)\mathbb{Q}=\left(\begin{array}{c|c} t_1 & \times\cdots\cdots\times \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \mathrm{B}' \\ 0 & \end{array}\right).$$
Cette dernière matrice a bien comme éléments diagonaux $t_1,\cdots,t_n$.
Ainsi on a vérifié par récurrence que : il existe une base $\mathscr{B}''$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathscr{B}''}$ ait pour éléments diagonaux les t_i où $i\in[\![1\ ;\ n]\!]$.

4 -Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que T *est un endomorphisme de* X *vérifiant* $mathrm\mathrm{Tr}()\mathrm{T}\in\mathbb{N}$ *et* $\mathrm{Tr}\,\mathrm{T}\geqslant\mathrm{rg}\,\mathrm{T}$. *On pose* $\rho=\mathrm{rg}\,\mathrm{T}$ *et* $\theta=\mathrm{Tr}\,\mathrm{T}$.

17. Par le théorème du rang, $\dim N(T) = n - \rho$. Notons X_1 un supplémentaire de $N(T)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base adaptée à la décomposition $X = F \oplus N(T)$. Dans cette base $\mathcal{B}$, $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix}$.
18. Soit T_1 l'endomorphisme de X_1 de matrice $\mathbb{T}_1$ dans la base $\mathcal{B}_1 = \left(e_1, \cdots, e_\rho\right)$. Comme $\operatorname{Tr}(T) = \operatorname{Tr}(\mathbb{T}_{\mathcal{B}}) = \operatorname{Tr}(\mathbb{T}_1) = \operatorname{Tr}(T_1)$, on peut affirmer que $\operatorname{Tr}(T_1)$ est élément de $\mathbb{N}$ et $\operatorname{Tr}(T_1) \geqslant \rho$.
   Posons $t_i = 1$ pour $i \in [\![1 ; \rho - 1]\!]$, et $t_\rho = \operatorname{Tr}(T) - (\rho - 1) \geqslant 1$. Ces ρ nombres sont des entiers naturels non nuls dont la somme est égale à $\operatorname{Tr}(\mathbb{T}_1)$. Par la question 16, T' n'étant pas une homothétie, il existe $\mathcal{B}_1''$ une base de X_1 où $\mathbb{T}_1'$ la matrice de T' dans la base $\mathcal{B}_1''$ admet comme éléments diagonaux $t_1, \cdots, t_\rho$.
   Soit alors $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1'' \cup \left(e_{\rho+1}, \cdots, e_n\right)$.
   Dans cette nouvelle base, la matrice de T a la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{T}_1' & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}_2' & \mathbb{O} \end{pmatrix}$ où $\mathbb{T}_1'$ a comme éléments diagonaux des entiers non nuls.
19. Soient $C_1, \cdots, C_\rho$ les premières colonnes de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$. Soit P_i l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ n'a que des colonnes nulles sauf $\frac{1}{t_i} C_i$ comme i^e colonne.
   Alors cette matrice ayant un 1 sur la diagonale à la ligne i, on a $\mathbb{P}_i^2 = \mathbb{P}_i$, ce qui prouve que les P_i sont des projecteurs. Ainsi $T = \sum_{i=1}^{\rho} t_i P_i = \underbrace{P_1 + \cdots P_1}_{t_1 \text{ fois}} + \cdots + \underbrace{P_\rho + \cdots + P_\rho}_{t_\rho \text{ fois}}$.
20. Comme $\mathbb{T}_1 = \alpha \mathbb{I}_\rho$, $\operatorname{Tr}(T) \geqslant \rho$ donne $\alpha \geqslant 1$.
   - Si $\alpha = 1$, on peut utiliser la méthode précédente (on peut même l'utiliser si $\alpha \in \mathbb{N}$) en décomposant en somme de ρ projecteurs de rang 1 .
   - Si $\alpha > 1$, soit P_0 de matrice $\mathbb{P}_0 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{array}\right)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Alors

     $T - P_0$ a pour matrice : $(\mathbb{T} - \mathbb{P}_0)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_1'' & 0 \\ \mathbb{T}_2' & 0 \end{pmatrix}$ où T_1'' est une matrice ayant pour éléments diagonaux $(\alpha - 1, \alpha, \cdots, \alpha)$: ce n'est donc pas une matrice d'homothétie. De plus, $T - P_0$ est de rang au plus ρ (sa matrice dans la base $\mathscr{B}'$ a $n - \rho$ colonnes nulles). Ainsi $T - P_0$ vérifie

$$tr(T - P_0) = \rho\alpha - 1 > \rho - 1 \Longrightarrow tr(T - P_0) \geqslant \rho \geqslant \mathrm{rg}(T - P_0)$$

donc on peut appliquer la question précédente. $T' = T - P_0$ est une somme de projecteurs et comme $T = P_0 + (T - P_0)$: T est une somme de projecteurs

On a ainsi prouvé que T est une somme de projecteurs si, et seulement si, sa trace est un entier naturel supérieur ou égal à son rang.