Le rapport du Jaury

Mes abréviations

« TE » : Type-Error ;

« AI » : argumentation insuffisante ;

« VC » : voir le corrigé ;

« AR » : améliorer la rédaction ;

« ASP » : affirmation sans preuve ;

« CP » : je ne comprends pas ;

« MF » : mauvaise foi ;

« N'importe quoi ! » : n'importe quoi !

Les zoulies pitites images : les questions marquées par un 🎁 font partie de la voiture balai de la difficulté mathématique de PC ; les questions marquées par un 🚢 sont des questions récurrentes qu'il faut savoir faire par cœur les yeux fermés sans hésiter ; et parfois, certaines questions difficiles peuvent être signalées par 🔥.

- La proposition 12.17 nous donne comme condition suffisante de diagonalisabilité le fait qu'un endomorphisme d'un espace de dimension n (*resp.* une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) possède n valeurs propres deux à deux distinctes, ce qui revient au fait que son polynôme caractéristique soit scindé à racines simples.

  Donc dans la question 1 de l'exercice 2, on pouvait directement affirmer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ dès le calcul de $\chi_A = (X-1)(X-8)$, sans autre calcul !

- Quand on étudie des lois conditionnelles, la notation « $X_{(N=n)}$ » n'existe pas. De même, l'événement « $(A|B)$ » n'existe pas.

  Il est faux d'écrire « *sachant* $(N=n)$, $X(\Omega) = [\![0\,;\,n]\!]$ ». L'ensemble des valeurs de X ne doit pas être modifié par un autre événement, ce sont les probabilités de ces valeurs qui changent :

  - pour la loi de X on cherche $\mathbb{P}(X=x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$,
  - tandis que pour la loi de X conditionnée par $(N=n)$, on cherche $\mathbb{P}_{(N=n)}(X=x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

  Plutôt que d'inventer des notations ou de tenter de faire rentrer des concepts carrés dans des notations rondes, je conseille vivement d'utiliser des phrases en français pour dire ce que vous avez à dire.

- Le temps est venu où TOUS les élèves de PC doivent connaître par cœur les yeux fermés la formule du produit matriciel.

- Le temps est aussi venu où, si vous aimez ça, vous pouvez utiliser Δ sur votre brouillon pour résoudre une équation du second degré du genre $\lambda^2 - 9\lambda + 8 = 0$, mais en laissant le correcteur en dehors de ce genre de loisir...

  Si vous étiez obligé de calculer 213×579, poseriez-vous la multiplication sur votre copie ?

- Je pense que la démonstration par récurrence de $\left(P \times D \times P^{-1}\right)^k = P \times D^k \times P^{-1}$ ne nécessite pas, sauf si elle fait l'objet d'une question à part entière, d'être détaillée sur une copie de concours. Se contenter de dire « *par récurrence* » devrait suffire.

- L'application $\square \mapsto \sqrt[3]{\square}$ est la réciproque de la fonction $x \mapsto x^3$ qui est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on peut donc écrire $\sqrt[3]{\lambda}$ pour tout réel λ, même négatif.

  En revanche, l'application puissance $\square \mapsto \square^{1/3}$ n'est définie que sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$\square^{1/3} = \begin{cases} e^{\frac{1}{3}\ln(\square)} & \text{si } \square > 0, \\ 0 & \text{si } \square = 0. \end{cases}$$

  En effet ces deux fonctions coïncident sur $[0\ ;\ +\infty[$, mais il n'empêche que ce ne sont pas les mêmes fonctions.

- Je recommande de bien lire les énoncés des questions, notamment de bien faire la différence entre « *donner une solution* » et « *donner les solutions* ».

- Dans la première question du premier exercice, 4 clients se présentent dont X achètent le produit A tendis que les Y autres achètent B : comment peut-on affirmer que X et Y sont indépendantes ?

- **Absurdités, Type-Error, phrases incompréhensibles, et vocabulaire au pif.**

  - « *La somme de chaque colonne vaut* 1 » ;
  - « Y_t *est un système complet d'événements* » lorsque Y_t est une variable aléatoire ;
  - « *les* $p_{i,j}$ *forment un système complet d'événements* » lorsque les $p_{i,j}$ sont des probabilités, autrement dit des réels ;
  - « $\mathbb{P}(\max(X, Y) = k) = \max(\mathbb{P}(X = k), \mathbb{P}(Y = k))$ », où l'art d'intervertir un maximum et une probabilité sans rien comprendre à ce qu'on est en train de fabriquer ;
  - « U^2 » lorsque U est une matrice colonne, et « $B^{1/3}$ » lorsque B est une matrice carrée ;

- joie d'inventer un théorème *(faut voir qu'il est bien pratique pour boucler une question sans rien faire)* :
  - *« une matrice est diagonale si, et seulement si, elle est semblable à une matrice diagonale » (remarquons en passant que toute matrice diagonalisable serait alors diagonale)*
  - et *« si une matrice commute avec une matrice diagonale, alors elle est diagonale ».*

Exercice 1

Un fabricant de produits d'entretien pour machines à café fournit deux types de produits : un produit détartrant (produit A) et un produit dégraissant (produit B). Ce fabricant vend les produits conditionnés uniquement en boîtes contenant à la fois un produit A et un produit B. Cependant, pour rendre service à ses clients qui n'ont besoin que d'un seul produit, un commerçant accepte de vendre séparément les produits.

Pour la suite, on suppose que chaque client qui se présente chez le commerçant n'effectue qu'un seul achat. On suppose également que les choix (du produit A ou du produit B) des clients sont indépendants. On fait également l'hypothèse qu'il ne reste aucune boîte entamée au début de la journée.

On considère que chaque client qui se présente chez ce commerçant achète le produit A avec la probabilité $p \in]0\,;1[$ et le produit B avec la probabilité $1-p$. On note X (respectivement Y) le nombre de produits A (respectivement de produits B) vendus au cours de la journée. On notera $Z = \max(X, Y)$.

1. On considère une journée où 4 clients se sont présentés. Déterminer la loi de X, la loi de Y et les espérances de ces deux variables aléatoires. Déterminer la loi de Z. Que représente cette variable aléatoire ?

On suppose maintenant que le nombre de personnes se présentant chez le commerçant durant une journée est une variable aléatoire réelle N suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

2. Soit n un entier naturel. Quelle est la loi de X sachant que l'évènement $[N = n]$ est réalisé ?
3. Déterminer la loi conjointe du couple (X, N).
4. En déduire la loi de X.
5. Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 2

Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine cubique s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$. Dans ce cas, on dit que B est une racine cubique de A.

Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nous allons déterminer toutes les racines cubiques de la matrice A.

1. 🎁 Justifier qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *(on ne demande pas de la déterminer explicitement !)*, telle que $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. 🎁 Montrer qu'une matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de A si et seulement si $\Delta = P^{-1}BP$ est une racine cubique de D.
3. Soit $\Delta \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique de D.
   (a) 🎁 Montrer que les matrices D et Δ commutent,
   (b) 🎁 puis en déduire que la matrice Δ est diagonale.
4. Déterminer l'ensemble des racines cubiques de D, puis l'ensemble des racines cubiques de A. *On pourra se contenter de décrire ce dernier ensemble en fonction de P et de Δ.*

Racines cubiques et diagonalisation

Dans toute cette partie, on considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et on note $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$ son spectre réel *(donc on suppose que* A *possède* d *valeurs propres deux à deux distinctes).*

Existence d'une racine cubique polynomiale

5. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une racine cubique de la matrice λI_p.
6. Déduire de la question précédente que la matrice A admet une racine cubique. On pourra remarquer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs sur la diagonale sont de la forme λI_p avec $(p, \lambda) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

Réduction d'une racine cubique

Dans cette sous-partie, on suppose de plus que la matrice A est inversible et on considère le polynôme :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{d} \left(X^3 - \lambda_k\right)$$

7. Montrer que les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sont non nuls.
8. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit sous la forme $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $z^3 = \lambda$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement trois solutions.
9. En déduire que le polynôme Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
10. Déduire des questions précédentes que si B est une racine cubique de A, alors la matrice B est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 3 – Chaînes de Markov en temps continu

Dans tout le sujet on fixe un entier naturel $N \geqslant 2$.

- Pour une matrice $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et tout $(i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]$, on note $A[i,j]$ le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j de A.

  Par abus, si A est une matrice colonne ($q = 1$), on note $A[i]$ pour $A[i,1]$. De même, si A est une matrice ligne ($p = 1$), on note $A[i]$ pour $A[1,i]$.
- On identifie $\mathbb{R}^N$ avec $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in [\![1\,;N]\!]$, on note $E_k \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf le k^e qui vaut 1.

  On rappelle que $(E_1, \dots, E_N)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.
- On note $U \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1, autrement dit tel que pour tout $i \in [\![1\,;N]\!]$, $U[i] = 1$.
- On appelle **noyau de Markov** une matrice $K \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :
  - (M_1) $\forall (i,j) \in [\![1\,;N]\!]^2,\ K[i,j] \geqslant 0,$
  - (M_2) $\forall i \in [\![1\,;N]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} K[i,j] = 1.$
- On appelle **probabilité** *(Oui ! Vous avez bien lu !)* un vecteur ligne $\mu \in \mathscr{M}_{1,N}(\mathrm{R})$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :
  - (P_1) : $\forall i \in [\![1\,;N]\!],\ \mu[i] \geqslant 0,$
  - (P_2) : $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \mu[j] = 1.$

Préliminaires

1. (a) Soit $A \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$. Montrer que A vérifie (M_2) si et seulement si $AU = U$.

   (b) Montrer que si A et B sont deux noyaux de Markov, alors AB est encore un noyau de Markov.

   (c) Montrer que les valeurs propres d'un noyau de Markov sont de module inférieur ou égal à 1.

On considère un noyau de Markov K.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, K^n est un noyau de Markov.

3. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $(i,j) \in [\![1\,;\mathrm{N}]\!]^2$. Justifier que la série $\sum \dfrac{t^n \mathrm{K}^n[i,j]}{n!}$ converge.
   (Ici une erreur s'était glissée dans l'énoncé initial sur lequel figurait $(\mathrm{K}[i,j])^n$ à la place de $\mathrm{K}^n[i,j]$...)

On notera H_t la matrice de $\mathscr{M}_\mathrm{N}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\mathrm{N}]\!]^2,\ \mathrm{H}_t[i,j] = \mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \mathrm{K}^n[i,j]}{n!}.$$

4. Montrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$, H_t est un noyau de Markov.
5. Montrer que pour tout $(t,s) \in [0\,;+\infty[^2$, $\mathrm{H}_{t+s} = \mathrm{H}_t \times \mathrm{H}_s$.
   On pourra faire apparaître un produit de Cauchy.

Modélisation probabiliste

On cherche à modéliser un système ayant N états numérotés de 1 à N. À l'instant initial, le système est dans l'état 1. Le système est soumis à des impulsions.
On suppose que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\mathrm{N}]\!]^2$, à chaque impulsion, si le système est dans l'état i, il se retrouve dans l'état j avec une probabilité $p_{i,j}$ qui ne dépend que de l'état où il était avant l'impulsion.
Ce système est modélisé par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.
Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note Z_k la variable aléatoire à valeurs dans $[\![1\,;\mathrm{N}]\!]$ qui correspond à l'état du système après k impulsions.
Pour tous $(i,j) \in [\![1\,;\mathrm{N}]\!]^2$ et $k \in \mathbb{N}$, on a donc $\mathbb{P}\left(\mathrm{Z}_{k+1} = j \mid \mathrm{Z}_k = i\right) = p_{i,j}$.
En particulier, cette probabilité ne dépend pas de k. De plus, la variable Z_0 est la variable certaine de valeur 1.
On considère la matrice K de $\mathscr{M}_\mathrm{N}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\mathrm{N}]\!]^2,\ \mathrm{K}[i,j] = p_{i,j}.$$

6. Justifier que K est un noyau de Markov.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![1\,;\mathrm{N}]\!]$. Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = j) = \mathrm{K}^n[1,j]$.
   (Ici aussi il y avait la même erreur de notation substituant $(\mathrm{K}[1,j])^n$ à $\mathrm{K}^n[1,j]$...)
8. Soit $t \in [0\,;+\infty[$. On suppose que le nombre d'impulsions après un temps t est donné par une variable aléatoire Y_t suivant la loi de Poisson de paramètre t.
   Pour tout $j \in [\![1\,;\mathrm{N}]\!]$, on note $\mathrm{A}_{t,j}$ l'événement « le système est dans l'état j après un temps t » : justifier que $\mathrm{P}(\mathrm{A}_{t,j}) = \mathrm{H}_t[1,j]$.

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

Extrait de E3A MP 2016.

1. ➟ Les choix des clients sont prétendus indépendants, et chaque client choisit le produit A avec la probabilité p ou le produit B avec la probabilité $1-p$. Or X (*resp.* Y) mesure le nombre de fois où A (*resp.* B) est choisi, donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(4,p)$ et Y suit $\mathscr{B}(4,1-p)$, ce dont on déduit que $E(X)=4p$, $E(Y)=4(1-p)$.

   ➟ On sait que $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![0\ ;\ 4]\!]$, donc en déduit que $Z(\Omega)=[\![0\ ;\ 4]\!]$.
   Mais on sait de plus que dans cette question $X+Y=4$ puisque $X+Y$ est le nombre total de clients, ainsi $Z(\Omega)=[\![2\ ;\ 4]\!]$.

   ➔ $(Z=2)=(X=2)\cap(Y=2)=(X=2)$, donc
   $$P(Z=2)=P(X=2)=\binom{4}{2}p^2(1-p)^2=6p^2(1-p)^2\ ;$$

   ➔ $(Z=3)=\big((X=3)\cap(Y=1)\big)\cup\big((X=1)\cap(Y=3)\big)=(X=3)\cup(X=1)$, donc
   $$\begin{aligned}P(Z=3)&=P\big((X=1)\cup(X=3)\big)\\&=P(X=1)+P(X=3)\ \textit{(par σ-additivité car $(X=1)\cap(X=3)=\varnothing$)}\\&=\binom{4}{1}p(1-p)^3+\binom{4}{3}p^3(1-p)\\&=4p(1-p)[(1-p)^2+p^2]\\&=4p(1-p)(2p^2-2p+1).\end{aligned}$$

   ➔ $(Z=4)=\big((X=4)\cap(Y=0)\big)\cup\big((X=0)\cap(Y=4)\big)=(X=4)\cup(X=0)$, donc de même
   $$P(Z=4)=(1-p)^4+p^4.$$

   ➟ Si on suppose qu'aucune boîte n'était entamée le matin, alors $Z=\max(X,Y)$ compte le nombre de boîtes entamées en fin de journée, que ce serviable commerçant a du ouvrir pour complaire à ses clients qui doivent se féliciter d'être ainsi choyés.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour les mêmes raisons que dans la première question, la loi de X conditionnée par $(N=n)$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

3. On sait que $N(\Omega) = \mathbb{N}$, et par conséquent $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour tout (n, k) dans $\mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} P\big((X = k) \cap (N = n)\big) &= P(N = n) \times P_{(N=n)}(X = k) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k > n, \\ e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leqslant n. \end{cases} \end{aligned}$$

4. La loi de X est la loi marginale du couple (X, N), on l'obtient en appliquant la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par la variable N :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\big((N = n) \cap (X = k)\big) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda} p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{n!} (1-p)^n \quad \textit{(en posant } n' = n - k) \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k \times \lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda \times (1-p))^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \times e^{\lambda(1-p)} \quad \textit{(on a reconnu la série exponentielle, sagaces que nous sommes !)} \\ &= \frac{e^{-\lambda + \lambda(1-p)} (\lambda p)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

En conclusion, la variable X suit la loi de Poisson de paramètre λp.

On en déduira à la suite du prochain chapitre que $E(X) = V(X) = \lambda p$.

5. *Mutatis mutandis*, toutes choses égales par ailleurs, le réel p étant à X ce que $1-p$ est à Y, on peut déduire du résultat ci-dessus que Y suit la loi de Poisson $\mathscr{P}((1-p)\lambda)$.

   On sait de plus que $X+Y=N$.

   Ainsi, pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned}
P\big((X=k)\cap(Y=\ell)\big) &= P\big((N=k+\ell)\cap(X=k)\big) \\
&= e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{k+\ell}p^k(1-p)^\ell}{k!\ell!} \\
&= e^{-\lambda}\,\frac{(p\lambda)^k}{k!}\,\frac{((1-p)\lambda)^\ell}{\ell!} \\
&= \frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^k}{k!}\,\frac{e^{-(1-p)\lambda}((1-p)\lambda)^\ell}{\ell!} \\
&= P(X=k)\times P(Y=\ell)
\end{aligned}$$

   donc X et Y sont indépendantes.

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

Cet exercice est un extrait de l'épreuve de maths CCINP PC 2024.

Étude d'un exemple

1. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-4 & 12 \\ 1 & X-5 \end{vmatrix} = (X-4)(X-5)-12 = X^2-9X+20-12 = (X-1)(X-8).$$

   Ce polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{1,8\}$, ainsi A est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, autrement dit il existe $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$.

2. Pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,

$$B^3 = A \iff P^{-1}B^3P = P^{-1}AP \iff (P^{-1}BP)^3 = D, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

3. Soit Δ une racine cubique de D.

(a) De $D = \Delta^3$ on déduit que

$$D \times \Delta = \Delta^3 \times \Delta = \Delta^4 = \Delta \times \Delta^3 = \Delta \times D.$$

(b) Posons $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} D \times \Delta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 8c & 8d \end{pmatrix} \\ \text{et} \quad \Delta \times D &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 8b \\ c & 8d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où $D \times \Delta = \Delta \times D$ entraîne $\begin{pmatrix} a & b \\ 8c & 8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 8b \\ c & 8d \end{pmatrix}$ qui implique $b = 8b$ et $8c = c$, dont on déduit $b = c = 0$, d'où $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

On a bien prouvé que Δ est diagonale.

4. Soit Δ une racine cubique de D. Alors d'après la question précédente, Δ est diagonale, on peut la noter $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Ainsi $\Delta^3 = D$ entraîne $a^3 = 1$ et $d^3 = 8$, donc $a = 1$ et $d = 2$ (car Δ est une matrice à coefficients réels), autrement dit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est la seule possibilité.

   Réciproquement, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie bien $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = D$.

   La seule racine cubique de D est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Enfin, soit $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} B^3 = A &\iff (P^{-1}BP)^3 = D \quad \textit{(d'après la question 2)} \\ &\iff P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{(d'après le résultat précédent)} \\ &\iff B = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}, \end{aligned}$$

   donc A possède une unique racine cubique, $B = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Racines cubiques et diagonalisation

Existence d'une racine cubique polynomiale

5. L'application $x \mapsto x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha^3 = \lambda$.
   Ainsi la matrice αI_p est une racine cubique de λI_p car
   $$(\alpha I_p)^3 = \alpha^3 I_p = \lambda I_p.$$
6. La matrice A est diagonalisable, donc il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que
   $$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_d I_{m_d} \end{pmatrix} P^{-1},$$
   où m_i est l'ordre de multiplicité (algébriques ainsi que géométriques) de λ_i en tant que valeur propre de A.
   Il suffit de prendre la matrice $B = P\begin{pmatrix} \alpha_1 I_{p_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_d I_{p_d} \end{pmatrix} P^{-1}$ où $\alpha_i^3 = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1 \,;\, d]\!]$, et on obtient bien
   $$B^3 = P\begin{pmatrix} \alpha_1^3 I_{p_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_d^3 I_{p_d} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} H_{p_1}(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & H_{p_d}(\lambda_d) \end{pmatrix} P^{-1} = A,$$
   ce qui prouve que A possède bien une racine cubique.
7. Si la matrice A est inversible alors 0 n'est pas valeur propre de A, autrement dit les λ_i sont non nuls.
8. On remarque que le nombre complexe $\mu = \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}}$ vérifie $\mu^3 = \lambda$, ainsi pour tout $z \in \mathbb{C}$,
   $$\begin{aligned} z^3 = \lambda \iff z^3 = \mu^3 &\iff \left(\frac{z}{\mu}\right)^3 = 1 \ \textit{(car } \mu \neq 0\textit{)} \\ &\iff \frac{z}{\mu} = 1 \text{ ou } \frac{z}{\mu} = j \text{ ou } \frac{z}{\mu} = j^2 \\ &\iff z = \mu \text{ ou } z = \mu \times j \text{ ou } z = \mu \times j^2, \end{aligned}$$
   ce qui prouve que l'équation $z^3 = \lambda$ admet bien trois solutions distinctes dans $\mathbb{C}$.

9. Soit $k \in [\![1 \,;\, d]\!]$.

   D'après ce qui précède l'équation $z^3 = \lambda_k$ admet trois solutions distinctes que je vous propose de nommer α_k, β_k et γ_k. Alors

   $$X^3 - \lambda_k = (X - \alpha_k)(X - \beta_k)(X - \gamma_k).$$

   On en déduit que

   $$Q(X) = \prod_{k=1}^{d} (X - \alpha_k)(X - \beta_k)(X - \gamma_k),$$

   qui est bien un polynôme scindé dans $\mathbb{C}[X]$, à racines simples, car si pour $k \neq k'$, λ_k et $\lambda_{k'}$ avaient une racine cubique en commun, alors ils seraient égaux.

10. Soit B une racine cubique de A.

    On sait que A est diagonalisable, donc d'après le cours le polynôme $P(X) = \prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de A, ainsi

    $$Q(B) = \prod_{k=1}^{d} (B^3 - \lambda_k) = \prod_{k=1}^{d} (A - \lambda_k) = P(A) = 0_n.$$

    Donc Q est un polynôme annulateur de B, or on vient de prouver que Q est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ à racines simples, donc B est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Une correction de l'exercice 3

énoncé

Extrait de Mines Ponts PC 2023.

1. (a) Soit $A \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned}
(M_2) &\iff \forall i \in [\![1 \,;\, N]\!],\ \sum_{j=1}^{N} A[i,j] = 1 \\
&\iff \forall i \in [\![1 \,;\, N]\!],\ \sum_{j=1}^{N} A[i,j] \times U[j] = U[i] \ \textit{(par définition de U)} \\
&\iff \forall i \in [\![1 \,;\, N]\!],\ (A \times U)[i] = U[i] \ \textit{(par définition du produit matriciel)} \\
&\iff A \times U = U,\ \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

(b) Soient A, B deux noyaux de Markov, alors

➟ Pour tout $(i,j) \in [\![1 \,;\, N]\!]^2$, par la formule du produit matriciel

$$(A \times B)[i,j] = \sum_{k=1}^{N} A[i,k] \times B[k,j]$$

est positif comme somme de produits de réels positifs, donc $A \times B$ vérifie (M_1).

➟ De plus

$$\begin{aligned}
(A \times B) \times U &= A \times (B \times U) \ \textit{(car le produit matriciel est associatif)} \\
&= A \times U \ \textit{(par la question précédente, car B vérifie } (M_2)\textit{)} \\
&= U \ \textit{(derechef avec A)},
\end{aligned}$$

donc $A \times B$ vérifie (M_2) *(rederechef avec AB)*.

Donc $A \times B$ vérifie (M_1) et (M_2), C.Q.F.D.

(c) Soient K un noyau de Markov, et λ une valeur propre de K, alors il existe X non nul dans $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$, autrement dit par produit matriciel,

$$\forall i \in [\![1 \,;\, N]\!],\ \sum_{j=1}^{N} K[i,j] \times X[j] = \lambda X[i],$$

donc en prenant le module

$$\forall i \in [\![1 \,;\, N]\!],\ |\lambda|\,|X[i]| = \left| \sum_{j=1}^{N} K[i,j] \times X[j] \right|,$$

et par l'inégalité triangulaire

$$\forall i \in [\![1\ ;\ \mathrm{N}]\!],\ \ |\lambda|\,|\mathrm{X}[i]| \leqslant \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[i,j] \times |\mathrm{X}[j]| \ \ \textit{(car les } \mathrm{K}[i,j] \textit{ sont positifs).}$$

Notons s l'entier de $[\![1\ ;\ \mathrm{N}]\!]$ tel que $|\mathrm{X}[s]| = \max\limits_{j\in[\![1\,;\,\mathrm{N}]\!]} |\mathrm{X}[j]|$.

Alors $|\mathrm{X}[s]| \neq 0$, car sinon tous les $|\mathrm{X}[j]|$ seraient nuls et X serait le vecteur nul.

Ainsi, en se plaçant sur la ligne d'indice $i = s$

$$\begin{aligned}
|\lambda|\,|\mathrm{X}[s]| &\leqslant \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \underbrace{\mathrm{K}[s,j]}_{\geqslant 0} \times \underbrace{|\mathrm{X}[j]|}_{\leqslant |\mathrm{X}[s]|} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[s,j] \times |\mathrm{X}[s]| \quad \textit{(par règles de calcul sur les inégalités entre réels)} \\
&\leqslant 1 \times |\mathrm{X}[s]| \quad \textit{(car } \mathrm{K} \textit{ est un noyau de Markov).}
\end{aligned}$$

On a prouvé que $|\lambda|\,|\mathrm{X}[s]| \leqslant |\mathrm{X}[s]|$, donc comme $|\mathrm{X}[s]| > 0$, on obtient finalement $\boxed{|\lambda| \leqslant 1}$ en multipliant par l'inverse de $|\mathrm{X}[s]|$ qui est aussi strictement positif, par règles de calcul sur les inégalités.

2. On a prouvé dans la question précédente que l'ensemble des noyaux de Markov de $\mathscr{M}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$ est stable par le produit matriciel, donc en particulier si K est un noyau de Markov, alors par récurrence ses puissances le sont encore.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait grâce à la question 2 que K^n est un noyau de Markov, donc toutes ses composantes $\mathrm{K}^n[i,j]$ sont dans $[0\ ;\ 1]$.
   Ainsi pour tout $(t,i,j) \in \mathbb{R} \times [\![1\ ;\ \mathrm{N}]\!]^2$, alors
   $$\left|\frac{t^n \mathrm{K}^n[i,j]}{n!}\right| \leqslant \frac{|t|^n}{n!}$$
   Or $\frac{|t|^n}{n!}$ est le terme général de la série exponentielle, donc c'est le terme général d'une suite sommable, ainsi par domination $\frac{t^n \mathrm{K}^n[i,j]}{n!}$ est aussi le terme général d'une suite sommable, ce qui prouve que la série $\sum \frac{t^n(\mathrm{K}[i,j])^n}{n!}$ converge.
4. Soit $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

- Pour tout $(i,j) \in [\![1\ ;\ \mathrm{N}]\!]^2$, $\mathrm{H}_t[i,j]$ est positif comme produit d'une exponentielle réelle et de la somme d'une série à termes positifs. Donc H_t vérifie (M_1).
- De plus, pour tout $i \in [\![1\ ;\ \mathrm{N}]\!]$,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{H}_t \times \mathrm{U})[i] = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}_t[i,j] &= \mathrm{e}^{-t} \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \mathrm{K}^n[i,j]}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}^n[i,j] \\
&= \mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \times 1 \quad \textit{(car d'après la question 2 } \mathrm{K}^n \textit{ est un noyau de Markov)} \\
&= \mathrm{e}^{-t} \times \mathrm{e}^{t} \quad \textit{(en raconnaissant la série exponentielle)} \\
&= 1 = \mathrm{U}[i].
\end{aligned}$$

On a prouvé que $\mathrm{H}_t \times \mathrm{U} = \mathrm{U}$, donc d'après la question 1, H_t vérifie (M_2).

Pour tout réel positif t, la matrice H_t vérifie (M_1) et (M_2), donc c'est un noyau de Markov.

5. Soient t et s dans $[0\ ;\ +\infty[$ et $(i,j) \in [\![1\ ;\mathrm{N}]\!]^2$.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{H}_t \times \mathrm{H}_s)[i,j] &= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}_t[i,k] \times \mathrm{H}_s[k,j] \quad \textit{(par définition du produit matriciel :)} \\
&= \mathrm{e}^{-(t+s)} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mathrm{K}^n[i,k]}{n!} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n \mathrm{K}^n[k,j]}{n!} \right] \quad \textit{(par définition de } \mathrm{H}_t \textit{ et } \mathrm{H}_s\textit{).}
\end{aligned}$$

Or on a établi en question 3 que les suites de termes généraux $\frac{t^n \mathrm{K}^n[i,j]}{n!}$ et $\frac{s^n \mathrm{K}^n[i,j]}{n!}$ sont sommables, donc on peut appliquer le produit de Cauchy qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mathrm{K}^n[i,k]}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n \mathrm{K}^n[k,j]}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{t^\ell \mathrm{K}^\ell[i,k]}{\ell!} \times \frac{s^{n-\ell} \mathrm{K}^{n-\ell}[k,j]}{(n-\ell)!} \right) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (t\mathrm{K})^\ell[i,k] \times (s\mathrm{K})^{n-\ell}[k,j]
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(\mathrm{H}_t\mathrm{H}_s)[i,j] = \mathrm{e}^{-(t+s)}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}(t\mathrm{K})^{\ell}[i,k]\times(s\mathrm{K})^{n-\ell}[k,j],$$

et par la linéarité de la somme de N séries convergentes,

$$\begin{aligned}(\mathrm{H}_t\times\mathrm{H}_s)[i,j] &= \mathrm{e}^{-(t+s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}(t\mathrm{K})^{\ell}[i,k]\times(s\mathrm{K})^{n-\ell}[k,j]\right)\\ &= \mathrm{e}^{-(t+s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\left((t\mathrm{K})^{\ell}\times(s\mathrm{K})^{n-\ell}\right)[i,j] \quad \textit{(par définition du produit matriciel)}\\ &= \mathrm{e}^{-(t+s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\left((t\mathrm{K})^{\ell}\times(s\mathrm{K})^{n-\ell}\right)\right)[i,j] \quad \textit{(par définition des combinaisons linéaires de matrices)}\\ &= \mathrm{e}^{-(t+s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(t\mathrm{K}+s\mathrm{K}\right)^{n}[i,j] \quad \textit{(avec la formule du binôme appliquée aux matrices } t\mathrm{K} \textit{ et } s\mathrm{K} \textit{ qui commutent entre elles).}\\ &= \mathrm{e}^{-(t+s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t+s)^n\mathrm{K}^n[i,j]}{n!}.\end{aligned}$$

L'égalité ci-dessus ayant été prouvée pour tout $(i,j)\in[\![1\,;\,\mathrm{N}]\!]^2$, on a bien démontré que

$$\boxed{\mathrm{H}_s\times\mathrm{H}_t = \mathrm{H}_{s+t}}.$$

6. ➟ Pour tout $(i,j)\in[\![1\,;\mathrm{N}]\!]^2$, $\mathrm{K}[i,j] = p_{i,j} = \mathbb{P}(\mathrm{Z}_1 = j \mid \mathrm{Z}_0 = i) \geqslant 0$,

   ➟ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{K}[i,j] = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}}\mathbb{P}(\mathrm{Z}_1 = j\mid \mathrm{Z}_0 = i) = \sum_{j\in \mathrm{Z}_1(\Omega)}\mathbb{P}_{(\mathrm{Z}_0=i)}(\mathrm{Z}_1=j)$

   $= 1$ *(car $\mathbb{P}_{(\mathrm{Z}_0=1)}$ est aussi une probabilité).*

   Donc K est un noyau de Markov.

7. Soit $j\in[\![1\,;\mathrm{N}]\!]$.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}_n$ l'affirmation « $\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n = j) = \mathrm{K}^n[1,j]$ ».

   ➟ Si $n=0$, $\mathbb{P}(\mathrm{Z}_0 = j) = \delta_{1,j}$ *(le symbole de Kronecker)* car Z_0 est la variable certaine de valeur 1.
   Or $\mathrm{K}^0 = \mathrm{I}_\mathrm{N}$, donc $\mathrm{K}^0[1,j] = \mathrm{I}_\mathrm{N}[1,j] = \delta_{1,j}$, ce qui prouve $\mathscr{P}_0$.

➟ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
La formule des probabilités totales sur le système d'événements induit par Z_n donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{n+1} = j) &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(Z_n = k) \times \mathbb{P}(Z_{n+1} = j \mid Z_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} K^n[1,k] \times p_{k,j} \quad \textit{(par hypothèse de récurrence, et définition des } p_{k,j}\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{N} K^n[1,k] \times K[k,j] \quad \textit{(par définition de K)} \\
&= (K^n \times K)[1,j] \quad \textit{(par définition du produit matriciel)} \\
&= K^{n+1}[1,j], \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

Ainsi par le principe de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier n, ce qui achève de prouver les égalités demandées.

8. Par définition, $\mathbb{P}(Y_t = n) = e^{-t}\frac{t^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
L'événement $A_{t,j}$ n'est autre que $(Z_{Y_t} = j) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (Z_n = j) \cap (Y_t = n)$ qui est une réunion d'événements deux à deux disjoints.
Or la modélisation proposée dans l'énoncé impose que la probabilité que le système soit dans un état j ne dépend que de l'état dans lequel il était précédemment, et non du nombre d'impulsions reçues. On peut ainsi dire que les événements $(Z_n = j)$ et $(Y_t = n)$ sont indépendants et écrire, grâce à la σ-additivité de $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}(A_{t,j}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = j) \cdot \mathbb{P}(Y_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n[1,j] \cdot e^{-t}\frac{t^n}{n!} \quad \textit{(d'après la question 7).}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(A_{t,j}) = H_t[1,j]$, par définition de H_t, C.Q.F.D.