Le rapport du Jaury

Mes abréviations

« TE » : Type-Error ;
« AI » : argumentation insuffisante ;
« VC » : voir le corrigé ;
« AR » : améliorer la rédaction ;
« ASP » : affirmation sans preuve ;
« CP » : je ne comprends pas ;
« MF » : mauvaise foi ;
« N'importe quoi ! » : n'importe quoi !

Les zoulies pitites images : les questions marquées par un 🎁 font partie de la voiture balai de la difficulté mathématique de PC ; les questions marquées par un 🥷 sont des questions récurrentes qu'il faut savoir faire par cœur les yeux fermés sans hésiter ; et parfois, certaines questions difficiles peuvent être signalées par 🔥.

Remarques générales :

- Écrire des trucs archi-faux sur sa copie, dans la plupart des cas en se doutant que c'est archi-faux, c'est se priver de la possibilité de trouver la solution en cherchant un peu plus fort ou un peu plus longtemps.
- Vous êtes la première personne qui doit corriger votre copie.
- Sauf cas d'urgence, on utilise des inégalités larges ! Si on vous demande de montrer qu'une fonction décroît, il n'y a aucune raison d'utiliser des inégalités strictes !

Pour l'exercice 1 :

- La fonction $t \mapsto t^{2k}\ln(t)$ est continue sur $]0\,;\,1]$, donc il n'y a rien à faire « en 1 » pour prouver que l'intégrale $\int_0^1 t^{2k}\ln(t)\mathrm{d}t$ converge !
- Si on écrit quelques lignes plus haut que pour tout $t \in]0\,;\,1[$, $\frac{\ln(t)}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}\ln(t)$, faut-il démontrer que la série des fonctions $t \mapsto t^{2k}\ln(t)$ converge simplement sur $]0\,;\,1[$?

Pour l'exercice 2.

-
- Il est impossible de conclure la convergence normale ou uniforme d'une suite ou série de fonctions si on n'a jamais mentionné la moindre norme dans notre raisonnement !

- Qu'est-ce que la continuité des f_n sur $]1\,;+\infty[$ peut-elle avoir à faire avec la limite de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en $+\infty$?
  Et qu'est-ce que la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur tout segment de $]1\,;+\infty[$ peut-elle avoir à faire avec la limite de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en $+\infty$?

Pour l'exercice 3.

- l'opération $L_3 \leftarrow (x-3)L_3 - L_1$ est illicite pour calculer un polynôme caractéristique. Les opérations autorisées sont les échanges de deux lignes ou deux colonnes, en multipliant par -1 ; et ajouter à une ligne (*resp.* colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (*resp.* colonnes) ;
- En dimension finie, deux sous-espaces vectoriels F et G sont **supplémentaires orthogonaux** (autrement dit $G = F^\perp$) lorsque

$$\begin{cases} F \perp G, \\ \textbf{et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E). \end{cases}$$

  En particulier, si on doit montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux, la seconde condition est toujours vraie grâce au théorème du rang.
- Si l'endomorphisme f est autoadjoint, alors ses sous-espaces propres E_i sont deux à deux orthogonaux, donc en particulier, si $i \neq j$, $E_i \subset E_j{}^\perp$.
- $F \perp G \iff F \subset G^\perp \iff \forall (x,y) \in F \times G,\ \langle x \mid y \rangle = 0$.
- Pour pouvoir dire « f est autoadjoint car sa matrice est symétrique », il faut absolument préciser que c'est sa **matrice dans une base orthonormée**.

> ⚠ *N'oubliez pas que la somme $\sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda \times \lambda$ de toutes les valeurs propres (multipliées par leurs ordres de multiplicité algébrique) donne la trace $\mathrm{Tr}(u)$! C'est pratique pour vérifier qu'on a les bonnes valeurs propres !*

Le bêtisier. Tout ce qui suit va de navrant à extrêmement faux en passant par absurde et dénué de sens :

- « pour montrer que f est décroissante, on va étudier $f(x+1) - f(x)$ » ;
- « $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]1\,;+\infty[$, donc elle converge uniformément sur

CC BY NC

- $]1\,;+\infty[$ » ;
- $\forall x > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^x}$ est sommable ;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, F est continue ;
- $\left|\frac{\ln(t)}{t^2-1}\right| \underset{t\to 0}{\sim} \left|\frac{\ln(t)}{t^2}\right| \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t^2}$;
- $\ln(t) \underset{t\to 0}{=} t + o(t)$;
- $\ln(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$;
- en 0, $\ln(t) = t - 1 = -1$;
- $\left|t^{2k}\ln(t)\right| \underset{t\to 0}{\sim} t^{2k}$;
- $\frac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to 1}{=} o\left(t^{2k}\ln(t)\right)$;
- t^{2k} et $\ln(t)$ sont intégrables, donc $t^{2k}\ln(t)$ est intégrable ;
- $\frac{1}{t^2-1} \underset{t\to 1}{=} O(1)$;
- $t \mapsto \frac{1}{t^2-1}$ est intégrable en 1 ;
- $\forall t \in]0\,;1]$, $|\ln(t)| \leqslant 1$;
- $\forall t \in]0\,;1[$, $\left|\frac{\ln(t)}{2(t-1)}\right| \leqslant +\ln(t)$;
- $t \mapsto t^{2k}\ln(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;1]$ donc intégrable sur $]0\,;1]$;
- f est continue sur $]0\,;1]$ donc $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge ;
- $f_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, donc $\sum f_k(x)$ converge ;
- $\frac{\ln(n)}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$;
- $\frac{\ln(n)}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$;
- $\frac{\ln(n)}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)$;
- $\frac{\ln(n)}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{\ln(n)}{n!}\right)$;
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^{+\infty}$;
- $\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = 1$;
- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t \cdots$;
- $\sum \|f_n\|_\infty^{[a\,;b]}$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $]1\,;+\infty[$;
- λ est valeur propre de f donc $f(x) = \lambda x$;
- $f \circ g = f(g)$;
- deux sous-espaces vectoriels sont « disjoints » ;
- « matrice canoniquement associée ».

Exercice 1 – (Exercice de CCINP MP) Exercice ultra classique !

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(t) = \frac{\ln(t)}{t^2 - 1}.$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale

$$I_k = \int_0^1 t^{2k} \ln(t)\, dt$$

2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que :

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 2 – (

On note ζ la fonction zêta de Riemann définie sur $]1,+\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Partie I – Généralités sur la fonction zêta

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $]1,+\infty[$ par $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

1. Pour tout $a > 1$ réel, démontrer que la série $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge.
2. Démontrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ puis qu'elle est décroissante.
3. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1,+\infty[$?
4. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.
5. Soit $x > 1$. On pose $I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$.
   (a) Démontrer que $I(x) \leqslant \zeta(x) \leqslant I(x) + 1$.
   (b) En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.

CC BY NC

Partie II – Produit eulérien

6. Soit $s > 1$ un réel fixé. Justifier que l'on définit bien une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \frac{1}{\zeta(s) k^s}.$$

Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On rappelle que a divise b s'il existe un entier c tel que $b = ac$, on note alors $a \mid b$, ou encore $b \in a\,\mathbb{N}^*$.

7. Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $\mathrm{P}(\mathrm{X} \in a\,\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^s}$.

8. Soient $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{N}^*$ des entiers deux à deux premiers entre eux.
   Démontrer par récurrence sur n que $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ divise N si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$ a_i divise N.
   Le résultat persiste-t-il si les entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont seulement supposés premiers entre eux dans leur ensemble, c'est-à-dire lorsque leur PGCD vaut 1 ?

9. En déduire que si $a_1, \dots, a_n$ de $\mathbb{N}^*$ sont deux à deux premiers entre eux, alors les événements $(\mathrm{X} \in a_1\mathbb{N}^*), \dots, (\mathrm{X} \in a_n\mathbb{N}^*)$ sont indépendants.

On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ la suite croissante des nombres premiers. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $\mathrm{X}(\omega)$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_n$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que $\mathrm{P}(\mathrm{B}_n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$.

11. Soit ω dans $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n$. Que vaut $\mathrm{X}(\omega)$?

    En déduire que $\zeta(s) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$.

12. Montrer que si la série $\sum \frac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers converge, alors la suite de terme général $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$ converge vers un réel ℓ, et que pour tout réel $s > 1$, $\ell \geqslant \zeta(s)$.
    Conclure que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge.

Exercice 3 – (Extrait de E3A MP)

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et E un espace euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté $\langle \ | \ \rangle$ et la norme euclidienne associée $\| \ \|$.

On considère un endomorphisme **autoadjoint** f de E que l'on suppose non inversible et non nul.

1. Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au moins une valeur propre non nulle.
2. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux.
   Sont-ils supplémentaires ? On justifiera la réponse.

On suppose désormais que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $(\lambda_j)_{j\in[\![0;k]\!]}$ avec

$$k \geqslant 1, \quad \lambda_0 = 0, \quad \text{et} \quad 0 < |\lambda_1| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_k|.$$

Pour tout $j \in [\![0 \ ; \ k]\!]$, on note E_j le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j et p_j le projecteur orthogonal sur E_j.

3. Montrer que $\mathrm{id}_{\mathrm{E}} = \sum_{j=0}^{k} p_j$.
4. Prouver que pour tout couple (i,j) de $[\![0 \ ; \ k]\!]^2$ tels que $i \neq j$, $p_i \circ p_j$ est l'endomorphisme nul.
5. Démontrer que $f = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j p_j$.

On note p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$, et f^{I} l'endomorphisme de E défini par $f^{\mathrm{I}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} p_j$, appelé **inverse généralisé** de f.

6. Montrer que $p = \sum_{j=1}^{k} p_j$.
7. Montrer que $f \circ f^{\mathrm{I}} = p$.
8. En déduire pour tout $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, l'équivalence

$$f(x) = p(y) \iff x - f^{\mathrm{I}}(y) \in \mathrm{Ker}(f).$$

CC BY NC

9. Soit y un vecteur de E. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$\|f(x) - y\| = \inf_{z \in \mathrm{E}} \|f(z) - y\| \iff x - f^{\mathrm{I}}(y) \in \mathrm{Ker}(f).$$

Application à un exemple.
On prend E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormale de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. 🎁 Justifier que f est un endomorphisme autoadjoint, non nul et non inversible.
11. Montrer que 2 est valeur propre double de la matrice A.
12. En déduire que f admet exactement 3 valeurs propres, que l'on notera $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.
    On note pour tout $j \in [\![0\ ;\ 2]\!]$, M_j la matrice de p_j dans la base $\mathscr{B}$.
13. Justifier que l'on peut écrire A sous la forme $\mathrm{A} = 2\mathrm{M}_1 + 4\mathrm{M}_2$.
14. Montrer que E_2 est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de E_2 tel que $\|v_2\| = 1$.
15. Démontrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $p_2(x) = \langle x \mid v_2 \rangle\, v_2$.
16. Déterminer la matrice M_2.
17. En déduire la matrice associée à f^{I} relativement à la base $\mathscr{B}$.

Exercice 4 – (Extrait de Centrale PC)

Notations et définitions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

- Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de terme général $a_{i,j}$, alors on note $|A|$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de terme général $\left|a_{i,j}\right|$.
- Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite positive (*resp.* strictement positive) lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls (*resp.* strictement positifs). La notation $A \geqslant 0$ (*resp.* $A > 0$) signifie que la matrice A est positive (*resp.* strictement positive).
- Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la notation $A \geqslant B$ (*resp.* $A > B$) signifie que la matrice $A-B$ est positive (*resp.* strictement positive). De même, la notation $A \leqslant B$ (*resp.* $A < B$) signifie que $B - A \geqslant 0$ (*resp.* $B - A > 0$).
- Les propriétés suivantes pourront être librement utilisées (sous réserve que les opérations correspondantes puissent être envisagées) :
  - $|A+B| \leqslant |A| + |B|$;
  - $\left|A^\top\right| = |A|^\top$;
  - si $\gamma \in \mathbb{K}$, alors $|\gamma A| = |\gamma|\,|A|$;
  - si $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$, alors $AB \geqslant 0$.
- Le rayon spectral d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de spectre non vide, est le réel positif ou nul, noté $\rho(A)$, défini par

$$\rho(A) = \max\Big\{\, |\lambda| \;\mid\; \lambda \in \mathrm{sp}(A) \,\Big\}.$$

I - Résultats préliminaires

1. Soient $n \in \mathbb{N}$, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si $A > 0$, $X \geqslant 0$ et $X \neq 0$, alors $AX > 0$, et que

$$|A \times B| \leqslant |A| \times |B|.$$

2. Justifier que si n est un entier naturel et $z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n$ sont des nombres complexes, alors

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| \times |w_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)^{1/2} \times \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right)^{1/2}.$$

CC BY NC

3. Soit z un nombre complexe tel que $|1+z| = 1+|z|$, montrer que z est un réel positif.
   En déduire que, si les nombres complexes z et z' vérifient $\left|z+z'\right| = |z| + \left|z'\right|$ et $z \neq 0$, alors il existe un réel strictement positif α tel que $z' = \alpha z$.
4. Soient n un entier supérieur ou égal à 2, et $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes non tous nuls tels que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

   Montrer qu'il existe un réel θ tel que pour tout $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|z_k|$.

II - Théorème de Perron-Frobenius pour une classe de matrices symétriques positives

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, à coefficients positifs ou nuls.
On pose $r = \rho(A)$.

5. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire des sous-espaces propres de A ?
6. Montrer que $r > 0$.

On note μ la plus grande valeur propre de A.

7. Montrer que, pour tout vecteur $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, unitaire pour la norme euclidienne canonique,

$$X^\top AX \leqslant \mu.$$

   On pourra faire le calcul dans une base orthonormée convenablement choisie.
8. Montrer que cette inégalité est une égalité si, et seulement si, X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.
9. Montrer que, pour tout vecteur unitaire X,

$$\left|X^\top AX\right| \leqslant |X|^\top A|X| \leqslant \mu.$$

10. En déduire que, pour toute valeur propre λ de A, on a $|\lambda| \leqslant \mu$, et que $\mu = r$.

Dans les questions de 11 à 14, on suppose en outre que A est strictement positive.

11. Montrer que, si X est un vecteur propre de A, unitaire, associé à la valeur propre r, alors $|X|$ est un vecteur propre de A, unitaire, associé à la valeur propre r, et que $|X| > 0$.
12. Montrer que $X = |X|$ ou $X = -|X|$.
13. Montrer que le sous-espace propre $\ker(A - rI_n)$ est de dimension 1 .

    On pourra raisonner par l'absurde en considérant deux vecteurs propres de A orthogonaux associés à r.
14. Montrer que l'ordre de multiplicité algébrique de r vaut 1, et en déduire que $-r$ n'est pas valeur propre de A.

    Ainsi, r est l'unique valeur propre de A de module égal à r.
15. Montrer que cette propriété n'est pas forcément vérifiée si A est seulement supposée positive.

    On pourra chercher des exemples dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On suppose à présent qu'il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que A^p est strictement positive. D'après la question 10., r est une valeur propre de A.

16. Montrer que l'espace propre $\ker(A - rI_n)$ est de dimension 1 , engendré par un vecteur strictement positif.
17. Montrer que r est l'unique valeur propre de A de module égal à r.

    On pourra distinguer deux cas suivant la parité de p.

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

1. Les fonctions $u : t \mapsto \frac{1}{2k+1}t^{2k+1}$ et ln sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;\,1]$, et par croissances comparées leur produit tend vers 0 en 0, donc par intégration par parties, comme on sait déjà la convergence de I_k

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_k &= \left[\frac{1}{2k+1}t^{2k+1}\times\ln(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2k+1}t^{2k+1}\times\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{2k+1}\int_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2k+1}\times\left[\frac{1}{2k+1}t^{2k+1}\right]_0^1\\ &= -\frac{1}{(2k+1)^2}.\end{aligned}$$

> *Comme on vient de l'utiliser ci-dessus, la proposition qui établit la technique d'intégration par parties nous donne, en plus de son calcul, la convergence de l'intégrale étudiée.*
> *Mais comme l'énoncé semble spécifier de justifier l'existence de l'intégrale,* puis *de la calculer,* (et comme c'est un exercice que vous devez savoir faire à cloche-pied les yeux fermés) *je rajoute ci-dessous la preuve que l'intégrale existe, autrement dit est convergente.*

Soit $k \in \mathbb{N}$.

- La fonction $t \mapsto t^{2k\ln(t)}$ est continue sur $]0\,;\,1]$;
- $t^{2k}\ln(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{O}(\ln(t))$, et ln est intégrable sur $]0\,;\,1]$;

donc la fonction $t \mapsto t^{2k}\ln(t)$ est intégrable sur $]0\,;\,1]$, et qui prouve la convergence de I_k.

2. - Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k : t \mapsto -t^{2k}\ln(t)$ est continue sur $]0\,;\,1[$;
   - Pour tout $t \in]0\,;\,1[$,

$$f(t) = -\ln(t)\times\frac{1}{1-t^2} = -\ln(t)\times\sum_{k=0}^{+\infty}(t^2)^k = -\sum_{k=0}^{+\infty}t^{2k}\ln(t),$$

   donc la série des f_k converge simplement sur $]0\,;\,1[$,
   - et sa somme f est aussi continue sur $]0\,;\,1[$ comme rapport de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la première question

$$\int_0^1 |f_k| = -\mathrm{I}_k \quad (\textit{car sur }]0\,;\,1[,\ t^{2k}\ln(t) \leqslant 0)$$
$$= \frac{1}{(2k+1)^2} \underset{k\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

  donc par domination la suite de terme général $\int_0^1 |f_k|$ est sommable, ainsi la série $\sum \int_0^1 |f_k|$ converge.

Les conditions du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, donc celui-ci nous permet de conclure :

- non seulement que f est intégrable sur $]0\,;\,1[$ comme demandé,
- mais aussi que

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{I}_k$$
$$= -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Or on sait que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

et d'autre part, en effectuant une sommation par paquets,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

On en déduit que

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

CC BY NC

ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8},$$

d'où l'égalité demandée.

Ici aussi, le théorème d'intégration terme à terme nous donne, en plus de l'interversion somme-intégrale, l'intégrabilité de la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Mais comme c'est un exercice que vous devez savoir faire sans coup férir, je rajoute ci-dessous la preuve que la fonction f est intégrable.

- La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ est continue sur $]0\,;1[$ comme rapport de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;
- $f(t) = \frac{\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\ln(t)}{-1} = -\ln(t)$, et ln est intégrable en 0, donc par équivalence f est aussi intégrable en 0 ;
- $f(t) = \frac{\ln(t)}{t^2-1} = \frac{\ln(1+(t-1))}{(t+1)(t-1)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{(t-1)}{2(t-1)} = \frac{1}{2}$, donc f est prolongeable par continuité en 1, ce qui en fait une fonction intégrable en 1.

Donc f est intégrable sur $]0\,;1[$.

Une correction de l'exercice 2

énoncé

1. Soit $a > 1$, alors par croissances comparées

$$\frac{\frac{\ln(n)}{n^a}}{\frac{1}{n^{\frac{1+a}{2}}}} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{a-1}{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \text{ car } \frac{a-1}{2} > 0$$

donc $\frac{\ln n}{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{1+a}{2}}}\right)$.

Comme $\frac{a+1}{2} > 1$, la suite de Riemann de terme général $\frac{1}{n^{\frac{1+a}{2}}}$ est sommable, donc par domination, la suite de terme général $\frac{\ln n}{n^a}$ est aussi sommable, ce qui prouve que la série $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge.

2. - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x} = \mathrm{e}^{-x\ln n}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$, de dérivée $f_n' : x \mapsto -\frac{\ln n}{n^x}$.
   - On sait que $\sum f_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ comme série de Riemann convergente.

➟ Pour tout segment $[a\,;\,b] \subset]1\,;\,+\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \geqslant a$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall x \in [a\,;\,b],\ \ \left|f_n'(x)\right| = \frac{\ln(n)}{n^x} \leqslant \frac{\ln n}{n^a}$$

donc $\left\|f_n'\right\|_\infty^{[a\,;\,b]} \leqslant \frac{\ln n}{n^a}$, donc par domination avec la question précédente, $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $]1\,;\,+\infty[$.

Ainsi, le théorème de dérivation terme à terme permet de conclure que ζ est $\mathscr{C}^1$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

De plus sa dérivée est $\zeta' : x \mapsto -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} \leqslant 0$ donc ζ décroît.

3. Si $\sum f_n$ convergeait uniformément sur $]1,+\infty[$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que $\frac{1}{n^x} \xrightarrow[x\longrightarrow 1]{} \frac{1}{n}$, alors le théorème de la double limite s'appliquerait en 1, ce qui permettrait d'affirmer que la série de terme général $\lim\limits_{x\to+1} \frac{1}{n^x}$ converge, autrement dit que $\sum \frac{1}{n}$ est convergente, ce qui est faux.

   Donc $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.

4. En revanche sur $[2\,;\,+\infty[$, les fonctions f_n étant décroissantes sur $]0\,;\,+\infty[$, on en déduit que $\|f_n\|_\infty^{[2;+\infty[} = \frac{1}{n^2}$, donc que $\sum f_n$ converge normalement sur $[2\,;\,+\infty[$.

   Ainsi comme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n \geqslant 2, \end{cases}$$

   on peut conclure grâce au théorème de la double limite que

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1.$$

5. (a) Soit $x > 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[1,+\infty[$, donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall t \in [k\,;\,k+1],\ \ \frac{1}{(k+1)^x} \leqslant \frac{1}{t^x} \leqslant \frac{1}{k^x},$$

   donc par croissance de l'intégrale

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ \frac{1}{(k+1)^x} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^x}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^x}\mathrm{d}t = \frac{1}{k^x}.$$

CC BY NC

Ainsi pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, en additionnant pour k de 1 à $N-1$, grâce à la relation de Chasles

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^x} = \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x} - 1 \leqslant \int_1^N \frac{1}{t^x} \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^x},$$

et comme ces expressions ont toutes une limite finie quand N tend vers $+\infty$, on obtient par prolongement des inégalités larges à la limite que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} - 1 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x},$$

c'est-à-dire $\zeta(x) - 1 \leqslant I(x) \leqslant \zeta(x)$,

ce qui est peu ou prou le résultat escompté.

(b) Or

$$I(x) = \left[\frac{1}{(-x+1)t^{x-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1},$$

donc pour tout $x > 1$,

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant \frac{1}{x-1} + 1 \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{x-1} + o\left(\frac{1}{x-1}\right) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1},$$

d'où par encadrement

$$\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

6. *Quand on vous pose ce genre de question un peu nébuleuse sur X, c'est en général qu'il faut montrer que les $\mathbb{P}(X=k)$ sont positifs, et que leur somme donne 1.*

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{\zeta(s)\, k^s} \geqslant 0$;
- puis

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\zeta(s)\, k^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^s} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{\zeta(s)} \times \zeta(s) \quad (\text{car } s > 1)$$
$$= 1,$$

ainsi la série $\sum \mathbb{P}(X=k)$ converge et a pour somme 1, donc X définit bien une variable aléatoire.

7. Un entier strictement positif X est multiple de a si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $X = ka$, autrement dit $(X \in a\mathbb{N}^*) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = ak)$, et les événements de cette réunion sont deux à deux disjoints, donc par σ-additivité,

$$\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ak) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s) a^s k^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s) a^s} = \frac{1}{a^s}.$$

8. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

   - Si $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ divise N, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N = k \times a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$, ce qui prouve que chaque a_i divise N.
   - Notons $\mathscr{P}(n)$ la réciproque, autrement dit l'implication « si pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$ a_i divise N alors $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ divise N. »
     - pour $n = 2$, si a_1 et a_2 divisent N, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N = k a_1$, et comme a_1 et a_2 sont premiers entre eux, le fait que a_2 divise $N = k a_1$ entraîne grâce au lemme de Gauss que a_2 divise k, donc qu'il existe $k' \in \mathbb{N}^*$ tel que $k = k' a_2$, ce qui donne $N = k' a_2 a_1$, et prouve que $a_1 a_2$ divise N.

       Donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
     - Soit un $n \geqslant 2$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Prenons $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des diviseurs de N deux à deux premiers entre eux.

       Comme $a_1, \ldots, a_n$ sont des diviseurs de N deux à deux premiers entre eux, par hypothèse de récurrence, $a_1 \cdots a_n$ divise N.

       Mais $a_1 \cdots a_n$ et a_{n+1} sont premiers entre eux : en effet, aucun des a_i pour i entre 1 et n n'a de diviseur premier en commun avec a_{n+1} donc $a_1 \cdots a_n$ ne peut en avoir lui aussi.

       Ainsi, $a_1 \cdots a_n$ et a_{n+1} sont deux diviseurs premiers entre eux de N, donc d'après le cas $n = 2$, $a_1 \cdots a_{n+1}$ divise N, ce qui boucle la récurrence.

   On a directement que si $a_1, \ldots, a_n$ divise N, alors chacun des a_i divise N sans hypothèse de primalité relative.

   On montre l'autre sens par récurrence simple. Soit, pour $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}(n)$: « Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des diviseurs de n premiers entre eux deux à deux, alors $a_1 \cdots a_n$ divise N. ».

   - Pour $n = 2$, montrons que $\mathscr{P}(2)$ est vérifiée. Soient a_1 et a_2 des diviseurs de n premiers entre eux. On a $k \in \mathbb{N}$ tel que a_2 divise $N = a_1 k$. Comme $a_1 \wedge a_2 = 1$, le lemme de Gauss permet de conclure que a_2 divise k donc $a_1 a_2$ divise N.

➟ Soit un $n \geqslant 2$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ est vraie, soient $a_1, \dots, a_{n+1}$ des diviseurs de N deux à deux premiers entre eux.

Comme $a_1, \dots, a_n$ sont des diviseurs de N deux à deux premiers entre eux, par hypothèse de récurrence, $a_1 \times \cdots \times a_n$ divise N.

Mais $a_1 \times \cdots \times a_n$ et a_{n+1} sont premiers entre eux : en effet, aucun des a_i pour i entre 1 et n n'a de diviseur premier en commun avec a_{n+1} donc $a_1 \times \cdots \times a_n$ ne peut en avoir lui aussi.

Ainsi, $a_1 \times \cdots \times a_n$ et a_{n+1} sont deux diviseurs premiers entre eux de N, donc d'après le cas $n = 2$, $a_1 \times \cdots \times a_{n+1}$ divise N, ce qui établit la récurrence, et achève le raisonnement.

Le résultat n'est plus valable si on suppose seulement $a_1, \dots, a_n$ premiers entre eux dans leur ensemble comme on le voit avec le contre-exemple : $\boxed{6, 10, 15}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble (aucun diviseur premier en commun) mais pas deux à deux, ils divisent tous 30, mais pas leur produit.

9. Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux deux à deux, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(\mathrm{X} \in a_k\mathbb{N}^*)\right) &= \mathbb{P}(a_1|\mathrm{X}, \dots, a_r|\mathrm{X}) \\
&= \mathbb{P}(a_1 \cdots a_r|\mathrm{X}) \quad \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \mathbb{P}(\mathrm{X} \in (a_1 \cdots a_r)\mathbb{N}^*) \\
&= \frac{1}{(a_1 \cdots a_r)^s} \quad \textit{(par la question 6)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^s} = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X} \in a_k\mathbb{N}^*) \quad \textit{(encore la question 6),}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{les événements } (\mathrm{X} \in a_k\mathbb{N}^*), \text{ où } k \in [\![1, n]\!] \text{ sont indépendants.}}$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par définition de B_n,

$$\mathrm{B}_n = \bigcap_{k=1}^{n}(\mathrm{X} \notin p_k\mathbb{N}^*).$$

Or les $(\mathrm{X} \notin p_k\mathbb{N}^*)$ sont indépendants en tant que complémentaires des $(\mathrm{X} \in p_k\mathbb{N}^*)$ qui sont indépendants.

Donc $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{B}_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X} \notin p_k\mathbb{N}^*) = \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(\mathrm{X} \in p_k\mathbb{N}^*)) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).}$

11. Soit $\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n$. Alors $\mathrm{X}(\omega)$ est un élément de $\mathbb{N}^*$ divisible par aucun nombre premier $\boxed{\mathrm{X}(\omega) = 1,}$ et la réciproque est vraie. Donc

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n\right) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = 1) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Or $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille décroissante pour l'inclusion, donc par continuité décroissante,

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n\right) = \frac{1}{\zeta(s)},$$

On obtient donc, d'après le résultat de la question précédente,

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(s).}$$

12. Supposons que $\sum \frac{1}{p_k}$ converge, autrement dit que la suite $\left(\frac{1}{p_k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}\right) = -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

et p_k tend vers $+\infty$, donc $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p_k}$, donc par équivalence, la suite de terme général $\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ est aussi sommable, donc $\sum_k \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ converge, et par continuité de l'exponentielle, la suite de terme général $\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$ est aussi convergente.

CC BY NC

Notons ℓ sa limite.

Soit $s > 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $1 < p_k \leqslant p_k^s$ donc $\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \geqslant \dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}} \geqslant 0$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \geqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$ et par prolongement des inégalités larges à la limite, $\boxed{\forall s > 1,\ \ell \geqslant \zeta(s).}$

Mais $\zeta(s) \xrightarrow[s \to 1]{} +\infty$ d'après la question 5, donc le réel ℓ devrait être supérieur à $+\infty$? Ha ha ha ! Mais c'est absurde mon pauvre ami !

C'est donc que $\boxed{\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p_k} \text{ diverge.}}$

Une correction de l'exercice 3

énoncé

Adapté de E3A MP 2021.

1. Dans cet exercice, f est un endomorphisme autoadjoint de E non inversible et non nul.

   ➟ Puisque f est non inversible, en particulier f n'est pas injective.

   > *Dire d'une application qu'elle est inversible (terme normalement réservé aux matrices dans notre programme) équivaut à dire qu'elle est bijective.*

   Ainsi par définition, $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f}$.

   ➟ Puisque f est autoadjoint, par le théorème spectral f est diagonalisable dans une base orthonormale de ses vecteurs propres.

   Par l'absurde, si 0 est la seule valeur propre de f, alors dans une telle base de vecteurs propres, f aurait pour matrice la matrice diagonale dont les termes diagonaux seraient les valeurs propres de f, c'est-à-dire 0, donc f aurait pour matrice la matrice nulle, ce qui n'est possible que si f est l'endomorphisme nul, et contredit une hypothèse de la question.

   Donc $\boxed{f \text{ admet au moins une valeur propre non nulle.}}$

2. ➟ Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$.

   Puisque $x \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $f(x) = 0$; et comme $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $z \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(z)$.

Ainsi, comme f est un endomorphisme autoadjoint,

$$\langle x \mid y \rangle = \langle x \mid f(z) \rangle = \langle f(x) \mid z \rangle = \langle 0_{\mathrm{E}} \mid z \rangle = 0.$$

On a bien montré que $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont orthogonaux.}}$

➟ Ils sont orthogonaux, donc en particulier, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe. De plus par le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{E}) = n,$$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont supplémentaires}}$.

3. Soit $x \in \mathrm{E}$.
Puisque f est autoadjoint, le théorème spectral nous dit que f est diagonalisable, donc ses sous-espaces propres sont supplémentaires dans E. Par conséquent il existe un unique $(x_0, \ldots, x_k) \in \mathrm{E}_0 \times \ldots \times \mathrm{E}_k$ tel que $x = \sum_{j=0}^{k} x_j$.
Soit $i \in [\![0, k]\!]$, x_i est dans E_i, et p_i est un proiecteur sur E_i, donc $p_i(x_i) = x_i$; et comme f est autoadjoint, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, pour $j \neq i$, $x_i \in \mathrm{E}_i \subset \mathrm{E}_j^{\perp} = \mathrm{Ker}\left(p_j\right)$ donc $p_j(x_i) = 0_{\mathrm{E}}$.
Ainsi

$$p_i(x) = p_i\left(\sum_{j=0}^{k} x_j\right) = \sum_{j=0}^{k} p_i(x_j) = p_i(x_i) = x_i,$$

D'où

$$x = \sum_{j=0}^{k} x_j = \sum_{j=0}^{k} p_j(x) = \left(\sum_{j=0}^{k} p_j\right)(x),$$

On a bien prouvé que $\boxed{\mathrm{id}_{\mathrm{E}} = \sum_{j=0}^{k} p_j}$.

4. Soit $(i, j) \in [\![0, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
Puisque f est autoadjoint, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, donc $\mathrm{E}_j \subset \mathrm{E}_i^{\perp}$.
Soit $x \in \mathrm{E}$, alors $p_j(x) \in \mathrm{E}_j \subset \mathrm{E}_i^{\perp} = \mathrm{Ker}(p_i)$ donc

$$\left(p_i \circ p_j\right)(x) = p_i(p_j(x)) = 0_{\mathrm{E}}, \text{ C.Q.F.D.}$$

5. Soit $x \in E$.
Pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, $p_j(x) \in E_j$ donc $f(p_j(x)) = \lambda_j p_j(x)$, et ainsi

$$x = \mathrm{id}_E(x) = \sum_{j=0}^{k} p_j(x),$$

D'où

$$f(x) = f\left(\sum_{j=0}^{k} p_j(x)\right) = \sum_{j=0}^{k} f(p_j(x))$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \lambda_j p_j(x) = \left(\sum_{j=0}^{k} \lambda_j p_j\right)(x), \quad \text{C.Q.F.D.}$$

6. D'après la question 2, $\mathrm{Ker}(f)$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Im}(f)$ donc, comme p est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$, p est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.
Soit $x \in E$, que l'on écrit $x = \sum_{j=0}^{k} p_j(x)$.

- $p_0(x) \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $p(p_0(x)) = 0_E$.
- Soit $j \in [\![1,k]\!]$, $p_j(x) \in E_j$ donc $f(p_j(x)) = \lambda_j p_j(x)$. Montrons que $p_j(x) \in \mathrm{Im}(f)$:

$$p_j(x) = \frac{1}{\lambda_j}\lambda_j p_j(x) = \frac{1}{\lambda_j} f(p_j(x)) = f\left(\frac{1}{\lambda_j} p_j(x)\right) \in \mathrm{Im}(f).$$

On en déduit que pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, $p_j(x) \in \mathrm{Im}(f)$, donc $p(p_j(x)) = p_j(x)$.
On obtient finalement :

$$p(x) = p\left(\sum_{j=0}^{k} p_j(x)\right) = \sum_{j=0}^{k} p(p_j(x)) = \underbrace{p(p_0(x))}_{=0} + \sum_{j=1}^{k} \underbrace{p(p_j(x))}_{=p_j(x)} = \sum_{j=1}^{k} p_j(x).$$

Ainsi $\boxed{p = \sum_{j=0}^{k} p_j}$.

Quelques propriétés de l'inverse généralisé.

7. Puisque $\lambda_0 = 0$, on a $f = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j p_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j p_j$. D'après la question 4, si $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$, et puisque p_i est un projecteur, $p_i^2 = p_i$. Ainsi

$$\begin{aligned} f \circ f^{\mathrm{I}} &= \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} p_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} p_i \circ p_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_i} p_i^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i = p, \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

attention à bien prendre des indices différents dans les deux sommes !

8. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$,

$$f\left(x - f^{\mathrm{I}}(y)\right) = f(x) - f \circ f^{\mathrm{I}}(y) = f(x) - p(y).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x - f^{\mathrm{I}}(y) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f\left(x - f^{\mathrm{I}}(y)\right) = 0_{\mathrm{E}} \\ &\iff f(x) = p(y), \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

9. Soit $y \in \mathrm{E}$.

- On est dans un espace de dimension finie, et p est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$, donc d'après le cours, la distance de y à $\mathrm{Im}(f)$ est donnée par

$$d(y, \mathrm{Im}(f)) = \inf_{u \in \mathrm{Im}(f)} \|u - y\| = \inf_{z \in \mathrm{E}} \|f(z) - y\| = \|y - p(y)\|.$$

Donc si $x - f^{\mathrm{I}}(y) \in \mathrm{Ker}(f)$, alors par la question précédente $f(x) = p(y)$, d'où $\|f(x) - y\| = \inf_{z \in \mathrm{E}} \|f(z) - y\|$.

- Réciproquement, si $\|f(x) - y\| = \inf_{z \in \mathrm{E}} \|f(z) - y\|$.

D'une part,

$$\|f(x) - y\|^2 = \|(f(x) - p(y)) + (p(y) - y)\|^2$$

CC BY NC

or $f(x)$ et $p(y)$ sont dans $\mathrm{Im}(f)$, et par définition du projeté orthogonal, $y - p(y) \in \mathrm{Im}(f)^\perp$, donc grâce à notre ami Pythagore,

$$\|f(x) - y\|^2 = \|f(x) - p(y)\|^2 + \|p(y) - y\|^2$$

Mais par hypothèse Alors

$$\|f(x) - y\| = \inf_{z \in \mathrm{E}} \|f(z) - y\| = d(y, \mathrm{Im}(f)) = \|p(y) - y\|.$$

Donc

$$\|f(x) - p(y)\|^2 = \|f(x) - y\|^2 - \|p(y) - y\|^2 = 0.$$

Ainsi $f(x) = p(y)$, et par la question précédente, $x - f^{\mathrm{I}}(y) \in \mathrm{Ker}(f)$, C.Q.F.D.

Application à un exemple.

10. $\mathrm{A} = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

➟ la matrice A de f est symétrique dans la base $\mathscr{B}$ qui est une base orthonormale

Sans préciser que la base concernée est une base orthonormale, l'argument de la matrice symétrique ne vaut rien !

donc f est un endomorphisme autoadjoint.

➟ La matrice $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est non nulle donc f est non nul.

➟ La matrice A possède deux colonnes liées (les colonnes 2 et 4), donc $\det(\mathrm{A}) = 0$, A n'est pas inversible et f est non inversible.

11. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.

$$\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_4 = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

cette matrice est de rang 2 *(à l'œil nu !)*, donc par le théorème du rang, son noyau est de dimension $4 - 2 = 2$. Ainsi 2 est valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé vaut 2.

Puisque A est diagonalisable, pour chaque valeur propre λ de A, l'ordre de multiplicité géométrique est égal à l'ordre de multiplicité algébrique de λ. Donc 2 est valeur propre double de A.

12. L'endomorphisme f est non inversible donc 0 est valeur propre de f. De plus $\mathrm{rg}(A) = 3$ donc par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 4 - 3 = 1$, ainsi 0 est valeur propre de f d'ordre de multiplicité géométrique 1.

Puisque f est diagonalisable, 0 est valeur propre simple de f.

La valeur propre $\lambda_0 = 0$ est une valeur propre simple de f, et $\lambda_1 = 2$ est valeur propre double de f. Il reste donc une seule valeur propre simple λ_2 à dénicher. Mais la trace de f, qui vaut $\mathrm{Tr}(A) = 8$, est égale, puisque f est diagonalisable, à $\lambda_0 + 2\lambda_1 + \lambda_2$, d'où $\lambda_2 = 4$.

L'endomorphisme f admet exactement trois valeurs propres distinctes :

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 = 2 < \lambda_2 = 4.$$

13. Puisque f est un endomorphisme autoadjoint, non nul et non inversible, on peut appliquer les résultats de la question 5 :

$$f = \sum_{j=0}^{2} \lambda_j p_j = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 2p_1 + 4p_2.$$

Pour $j \in [\![0,2]\!]$, M_j est la matrice de p_j dans la base $\mathscr{B}$. Donc

$$\begin{aligned} A &= \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(2p_1 + 4p_2) = 2\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(p_1) + 4\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(p_2) \\ &= 2M_1 + 4M_2. \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

14. Puisque f est diagonalisable, la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à $\dim(E) = 4$, donc $\dim(E_2) = 1$.

$$A - 4I_4 = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f - 4\,\mathrm{id}_E) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

donc

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 4I_4),$$

et il suffit de prendre pour v_2 le vecteur, normalisé, de coordonnées $(1,0,-1,0)$ dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3).$$

Attention à ne pas confondre le vecteur $e_1 - e_3$, qui est bien un vecteur de E, avec sa colonne de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, qui est dans $\mathbb{R}^4$, ou plutôt $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

15. Le vecteur v_2 forme à lui tout seul une base orthonormale de E_2, et p_2 est la projection orthogonale sur E_2, donc d'après le cours, tout $x \in E$ a pour projeté orthogonal $p_2(x) = \langle x \mid v_2 \rangle v_2$ sur E_2.
16. On rappelle que $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$. Donc

$$\begin{aligned}
p_2(e_1) &= \langle e_1 | v_2 \rangle v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle e_1 | e_1 - e_3 \rangle v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_3). \\
p_2(e_2) &= \langle e_2 | v_2 \rangle v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle e_2 | e_1 - e_3 \rangle v_2 = 0. \\
p_2(e_3) &= \langle e_3 | v_2 \rangle v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle e_3 | e_1 - e_3 \rangle v_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} v_2 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_3). \\
p_2(e_4) &= \langle e_4 | v_2 \rangle v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle e_4 | e_1 - e_3 \rangle v_2 = 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$M_2 = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(p_2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

17. On a $f^{\mathrm{I}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} p_j$, donc

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f^{\mathrm{I}}) = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}\left(\sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\lambda_j} p_j\right) = \frac{1}{2}\mathrm{M}_1 + \frac{1}{4}\mathrm{M}_2.$$

Or d'après la question 13, $\mathrm{A} = 2\mathrm{M}_1 + 4\mathrm{M}_2$, donc

$$\mathrm{M}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A} - 2\mathrm{M}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f^{\mathrm{I}}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Une correction de l'exercice 4

énoncé

1. Le terme général de AX est $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

Par hypothèse, pour tous i, j, $a_{i,j} > 0$ et $x_j \geqslant 0$. Comme $\mathrm{X} \neq 0$, l'un des x_j est strictement positif, donc le terme général de AX est strictement positif comme somme de réels positifs dont l'un au moins est strictement positif.

Le terme général de $|\mathrm{A} \times \mathrm{B}|$ est $\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{kj}\right|$ que l'on peut majorer, grâce à l'inégalité triangulaire par $\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}||b_{kj}|$ qui est le terme général de $|\mathrm{A}| \times |\mathrm{B}|$.

CC BY NC

Par conséquent le terme général de $|A| \times |B| - |A \times B|$ est positif ce qui prouve que $|A \times B| \leqslant |A| \times |B|$.

2. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, avec les vecteurs $(|z_i|)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(|w_i|)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
|1+z| = 1+|z| &\iff |1+z|^2 = (1+|z|)^2 \\
&\iff (1+z)\times(1+\overline{z}) = 1+2|z|+z\times\overline{z} \quad \begin{array}{l}\textit{(car pour tout } u\in\mathbb{C},\\ u\times\overline{u} = |u|\,2\textit{)}\end{array} \\
&\iff 1+z+\overline{z}+z\overline{z} = 1+2|z|+z\times barz \\
&\iff z+\overline{z} = 2|z| \\
&\iff \mathbb{R}\mathrm{e}(z) = |z| = \sqrt{\mathbb{R}\mathrm{e}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2} \\
&\implies \mathbb{R}\mathrm{e}(z) \geqslant 0 \text{ et } \mathbb{R}\mathrm{e}(z)^2 = \mathbb{R}\mathrm{e}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2 \\
&\implies \mathbb{R}\mathrm{e}(z) \geqslant 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 0 \\
&\implies z \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

Comme $|z| \neq 0$, $|z+z'| = |z|+|z'|$ devient $|z|\left|1+\dfrac{z'}{z}\right| = |z|\left(1+\dfrac{|z'|}{|z|}\right)$, qui nous ramène en multipliant par l'inverse de $|z|$ au cas précédent dont on déduit que $\dfrac{z'}{z}$ est un réel positif, d'où le résultat voulu.

4. Quitte à changer les numéros, on peut supposer que $z_1 \neq 0$. Alors pour tout $j \in [\![2\,;\,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}|z_k| = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &\quad \textit{(par hypothèse)} \\
\leqslant |z_1+z_j| + \sum_{\substack{k=2\\k\neq j}}^{n}|z_k| &\quad \textit{(avec l'inégalité triangulaire utilisée de façon étrange)} \\
\leqslant \sum_{k=1}^{n}|z_k| &\quad \textit{(avec l'inégalité triangulaire utilisée de façon normale).}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$|z_1 + z_j| + \sum_{\substack{k=2 \\ k\neq j}}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|,$$

donc

$$\left|z_1 + z_j\right| = |z_1| + \left|z_j\right|,$$

ce qui donne par la question précédente qu'il existe un réel positif α_j tel que $z_j = \alpha_j z_1$.

Notons $z_1 = re^{i\theta}$ la forme exponentielle de z_1, alors $z_j = \alpha_j re^{i\theta}$, d'où $\left|z_j\right| = \alpha_j r$, ce qui donne bien $z_j = \left|z_j\right| e^{i\theta}$.

5. La matrice A est symétrique réelle, donc par le théorème spectral, non seulement elle est diagonalisable, mais ces sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

6. La matrice A est non nulle, car elle a des coefficients strictement positifs, et elle est diagonalisable, donc elle a au moins a deux valeurs propres distinctes, et l'une d'entre elles admet une valeur absolue strictement positive, ce qui prouve que le rayon spectral r de A est strictement positif.

7. Notons μ la plus grande valeur propre de A.

   Le théorème spectral nous permet de prendre une base orthonormée $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.

   Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ unitaire, alors ses coordonnées dans cette base orthonormée sont ses produits scalaires avec les vecteurs de la base :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \langle X \mid X_i \rangle X_i = \sum_{i=1}^{n} \left(X^\top X_i\right) X_i.$$

   Ainsi

$$\begin{aligned} AX = A\left(\sum_{i=1}^{n} \left(X^\top X_i\right) X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \left(X^\top X_i\right) AX_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(X^\top X_i\right) \lambda_i X_i \quad \textit{(en notant } \lambda_i \textit{ la valeur propre associée à chaque } X_i\textit{).} \end{aligned}$$

En multipliant à gauche par $X^\top$, on obtient

$$X^\top AX = X^\top \sum_{i=1}^{n} \left(X^\top X_i\right) \lambda_i X_i = \sum_{i=1}^{n} \left(X^\top X_i\right) \lambda_i X^\top X_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(X^\top X_i\right)^2 \lambda_i.$$

Or par définition de μ, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\lambda_i \leqslant \mu$, donc en multipliant par $\left(X^\top X_i\right)^2$ qui est positif, puis en additionnant terme à terme :

$$X^\top AX \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(X^\top X_i\right)^2 \mu = \mu \times \sum_{i=1}^{n} \left(X^\top X_i\right)^2$$
$$= \mu \times \sum_{i=1}^{n} (\langle X \mid X_i \rangle)^2$$
$$= \mu \, \|X\|^2 \quad \textit{(car } (X_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]} \textit{ est une base orthonormée)}$$
$$= \mu \quad \textit{(par hypothèse sur } X\textit{)} \text{ C.Q.F.D.}$$

8. ➟ Si X est un vecteur propre associé à μ, avec $\|X\| = 1$, alors

$$X^\top AX = X^\top \mu X = \mu \, \|X\|^2 = \mu.$$

➟ Réciproquement, si X est un vecteur unitaire qui n'est pas vecteur propre associé à μ, alors une (au moins) de ses coordonnées sur un autre vecteur de la base $(X_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ est non nul. Quitte à changer la numérotation des X_i, supposons que X_1 est un vecteur propre associé à λ_1, avec $\lambda_1 < \mu$, et que $X^\top X_1 \neq 0$.

Alors $\left(X^\top X_1\right)^2 > 0$, donc $\left(X^\top X_1\right)^2 \lambda_1 < \left(X^\top X_1\right)^2 \mu$, donc en reprenant le calcul de la question précédente à l'étape

$$X^\top AX = \sum_{i=1}^{n} \left(X^\top X_i\right)^2 \lambda_i$$

on peut dire que

$$\begin{aligned} X^\top AX &= \sum_{i=1}^{n} \left(X^\top X_i\right)^2 \lambda_i \\ &= \left(X^\top X_i\right)^2 \lambda_i + \sum_{i=2}^{n} \left(X^\top X_i\right)^2 \lambda_i \\ &< \left(X^\top X_i\right)^2 \mu + \sum_{i=2}^{n} \left(X^\top X_i\right)^2 \lambda_i \\ &< \left(X^\top X_i\right)^2 \mu + \sum_{i=2}^{n} \left(X^\top X_i\right)^2 \mu = \mu \end{aligned}$$ *(comme dans la question précédente),*

donc $X^\top AX < \mu$, et notre raisonnement est bouclé.

9. Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire et de réutiliser la technique de la question 7 pour majorer ensuite par μ.

10. Soit X un vecteur propre unitaire associé à une valeur propre λ, alors comme dans le premier point de la question 4, $X^\top AX = \lambda \|X\|^2 = \lambda$, donc $\left|X^\top AX\right| = |\lambda|$.
Ainsi la question 9 nous donne directement $|\lambda| \leqslant \mu$, dont on déduit que $\rho(A) \leqslant \mu$.
Or μ est une valeur propre de A donc $\mu \leqslant \rho(A)$ et finalement $\mu = \rho(A) = r$.

11. Soit X un vecteur propre unitaire de A associé à r, alors a fortiori $X \neq 0$, et comme ci-dessus $\left|X^\top AX\right| = |r| = r$, et d'après la question 9

$$\left|X^\top AX\right| \leqslant |X|^\top A\,|X| \leqslant r.$$

Ainsi $|X|^T A|X| = r$, d'où comme $r = \mu$, par la question 4, $|X|$ est un vecteur propre associé à r.
Montrons maintenant que $|X| > 0$, autrement dit que toutes les cordonnées de X sont non nulles.
On sait que $A\,|X| = r\,|X|$, donc pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \left|x_j\right| = r\,|x_i|$.
Ainsi, si l'une des coordonnées de $|X|$ était nulle, disons $|x_i|$, alors la somme $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \left|x_j\right|$ serait nulle.
Or on a supposé que $A > 0$, donc la somme ci-dessus serait une somme nulle de termes positifs, d'où pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{i,j} \left|x_j\right| = 0$, et comme les coordonnées

de A sont strictement positives, cela entrainerait que tous les x_i sont nuls ce qui contredit l'hypothèse de départ.

12. La question revient à montrer que tous les coefficients de X sont de même signe. On vient de prouver que $|X| > 0$ donc aucun coefficient de X n'est nul.
Mais $AX = rX$, donc $|AX| = |rX| = r|X| = A|X|$, autrement dit pour tout i entre 1 et n :

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j|, \quad \textit{(car les } a_{i,j} \textit{ sont strictement positifs).}$$

On peut donc appliquer la question 4.
Comme les x_i sont réels, $e^{i\theta} = \pm 1$, ce qui signifie que tous les x_i sont de même signe.

13. Si $\mathrm{Ker}(A - rI_n)$ est de dimension $p \geqslant 2$, alors en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux deux premiers vecteurs d'une base quelconque de $\mathrm{Ker}(A - rI_n)$, on obtient deux vecteurs propres orthogonaux X_1 et X_2 associés à r.
En notant $X_1 = (x_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ et $X_2 = (y_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$, ${X_1}^{\top}X_2 = 0$ donne $\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i = 0$.
D'après la question précédente, tous les x_i sont de même signe, ainsi que tous les y_i, donc $\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i$ est une somme de termes tous positifs, ou tous négatifs, donc elle est nulle si, et seulement si, donc tous les produits sont nuls, ce qui contredit le résultat de la question précédente qui dit que X_1 et X_2 sont strictement positifs.
Donc $\mathrm{Ker}(A - rI_n)$ est de dimension inférieure à 1, donc de dimension 1.

14. Comme A est diagonalisable, les ordres de multiplicité de chaque valeur propre de A, donc de r, sont égales, donc d'après la question précédente, l'ordre de multiplicité algébrique de r est 1.
Considérons λ tel que $|\lambda| = r$ et $AX = \lambda X$ alors $A|X| = r|X|$. Or $X = \pm|X|$. Donc on a $AX = rX$ c'est-à-dire que X est aussi vecteur propre associé à r. Donc $\lambda = r$.

15. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est positive, et admet pour valeurs propres -1 et 1.

16. Soit X une vecteur propre de A associé à r, alors $AX = rX$, puis par récurrence $A^pX = r^pX$, et comme $A^p > 0$ on peut appliquer le résultat des questions 11 à 14 : $X = \pm|X|$ et $|X| > 0$ et on obtient bien le sous espace propre de dimension 1 engendré par un vecteur positif.

17. ➟ Si p est impair $\rho(A^p) = r^p$ et par la question 10 appliquée à A^p, r^p est l'unique valeur propre de module r^p de A^p, donc par stricte croissance de $x \mapsto x^p$, r est l'unique valeur propre de A de module r.

➟ Si p est pair, on a toujours $\rho(A^p) = r^p$, et par la question 30 r^p est l'unique valeur propre de module r^p de A^p. Il faut montrer que $-r$ n'est pas valeur propre de A. Or comme A est diagonalisable, A^p aussi et :

$$\dim(\mathrm{Ker}(A^p - r^p I_n)) = \dim(\mathrm{Ker}(A - rI_n)) + \dim(\mathrm{Ker}(A + rI_n)).$$

Par la question 9 on sait que la dimension de l'espace propre de gauche est 1, et celle de $\mathrm{Ker}(A - rI_n)$ vaut également 1 par la question 12, donc nécessairement $\dim(\mathrm{Ker}(A + rI_n)) = 0$ et $-r \notin \mathrm{Sp}(A)$. Donc r est l'unique valeur propre de module r de A.