

*Le candidat devra partout utiliser
Les mêmes notations que celles de l'énoncé.
La clarté des copies, leur lisibilité,
La rigueur du discours, l'orthographe usitée
Seront des correcteurs grandement appréciées.
De chaque question préalable utilisée
Le numéro sera clairement précisé.*

Le rapport du Jaury

Mes abréviations

- | | |
|---------------------------------------|---|
| « TE » : Type-Error ; | « ASP » : affirmation sans preuve ; |
| « AI » : argumentation insuffisante ; | « CP » : je ne comprends pas ; |
| « VC » : voir le corrigé ; | « MF » : mauvaise foi ; |
| « AR » : améliorer la rédaction ; | « N'importe quoi ! » : n'importe quoi ! |

Les zoulies pitites images : les questions marquées par un 🎁 font partie de la voiture balai de la difficulté mathématique de PC ; les questions marquées par un 🧐 sont des questions récurrentes qu'il faut savoir faire par cœur les yeux fermés sans hésiter ; et parfois, certaines questions difficiles peuvent être signalées par 🔥.

Remarques générales connues... mais qu'on oublie.

- ➡ Vous devez être la première personne à corriger votre copie.
- ➡ Sauf cas d'urgence, on utilise des inégalités larges ! Si on vous demande de montrer qu'une fonction décroît, il n'y a aucune raison d'utiliser des inégalités strictes !
- ➡ Ne pas utiliser de symboles mathématiques tels « $\implies$ », ou autres, ailleurs qu'au sein d'une phrase mathématique.
- ➡ Citer au maximum les théorèmes et formules utilisées par leur nom, notamment la formule du binôme, ou le théorème de transfert.
- ➡ Parler (au moins) de « récurrence » lorsque votre démonstration nécessite de répéter une opération un nombre indéfini de fois.
- ➡ Ne pas écrire de trucs archi-faux ou dénués de sens sur sa copie, dans la plupart des cas en se doutant que c'est archi-faux. C'est se priver de la possibilité de trouver la solution ou la formulation rigoureuse en cherchant un peu plus fort

ou un peu plus longtemps. Et en plus ça énerve beaucoup la personne qui corrige qui perd en bienveillance.

Par exemple, « les polynômes $p_{k,n} = \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}$ sont de degrés deux à deux distincts », ou « par la linéarité de la variance », ou « une variable est une succession d'épreuves », ou « on peut décrire cette probabilité par la loi binomiale », ou... j'arrête.

➡ **NE PAS OUBLIER LA VALEUR ABSOLUE** :

« $1 - \frac{1}{n} < 1$ donc $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} 0$ » n'est pas un raisonnement valable car $-10^{10} < 1$, mais les puissances de ce réel ne tendent pas vers 0.

➡ Ne pas appliquer de formule sans vérifier auparavant qu'on est dans son domaine de validité (voir l'utilisation dans la question 8(b) du résultat de la question 8(a))

Remarques pour ce sujet mais à méditer :

➡ Il est impossible de conclure la convergence uniforme sans avoir parlé de norme infini !

➡ Pour déduire de « $\varphi_n(p_{k,n}) = k p_{k,n}$ » que k est valeur propre de φ_n , il faut préciser que $p_{k,n}$ est (un polynôme) non nul.

➡ Arrêter de penser que $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré n , autrement dit que $P \in \mathbb{R}_n[X] \iff \deg(P) = n$.

De la même manière, si on veut que $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ soit de degré égal à n , il faut préciser que $a_n \neq 0$.

Et pour finir, $\deg(P + Q)$ est **inférieur ou égal** à $\max(\deg(P), \deg(Q))$!

➡ Ce n'est pas parce que des vecteurs sont non nuls qu'ils forment une famille libre, malgré le piège du raisonnement ci-dessous dans lequel l'élève Chaprot tombe fréquemment :

~~$$\sum_{k=0}^n f\left(\frac{f}{k}\right) p_{k,n} = 0, \text{ or } p_{k,n} \neq 0, \text{ donc } \forall k, f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$~~

➡ Lorsqu'une valeur propre est une valeur propre simple, autrement dit d'ordre de multiplicité algébrique m_λ égal à 1, il suffit de rappeler que $1 \leq d_\lambda = \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$ (d_λ et m_λ ne sont pas des notations standards !) pour conclure que $d_\lambda = 1$. Ne pas perdre du temps à chercher une base de $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$.

Sujet de type PC

Problème 1

La partie 4 est indépendante des autres parties. La partie 2 dépend seulement de la partie 1 et cela uniquement pour la question 2 faisant intervenir les probabilités. La partie 3 dépend seulement de la partie 2 et uniquement par la question 8.d).

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, on note $p_{k,n}(X)$ le polynôme $\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$. Ce problème propose d'étudier quelques aspects géométriques, algébriques, probabilistes et analytiques de cette famille de polynômes appelés « polynômes de Bernstein ».

PARTIE 1. ALGÈBRE LINÉAIRE ET PROBABILITÉS

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

On note $\mathcal{F}$ la famille $(p_{0,n}(X), p_{1,n}(X), \dots, p_{n,n}(X))$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit les polynômes

$$\varphi_n(P)(X) = nXP(X) + X(1-X)P'(X),$$

$$B_n(P)(X) = \sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(X).$$

1. (a)  Montrer que φ_n et B_n sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.
 (b) Vérifier que, pour tout $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, $\varphi_n(p_{k,n})(X) = k p_{k,n}(X)$.
 (c) En déduire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que φ_n est diagonalisable.
 (d)  Montrer que φ_n n'est pas bijectif et que B_n est bijectif.

2. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$.

On considère une variable aléatoire T_r sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(r, t)$. On note $\overline{T}_r = \frac{1}{r} T_r$.

Pour Y une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(Y)$ l'espérance de Y et $\mathbb{V}(Y)$ la variance de Y .

- (a) Donner un exemple de situation probabiliste qui peut être décrite par une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(r, t)$.
 (b)  Donner $T_r(\Omega)$ et vérifier que, pour tout $k \in \llbracket 0 ; r \rrbracket$, on a $\mathbb{P}(T_r = k) = p_{k,r}(t)$.

(c) Donner l'expression simplifiée des quantités suivantes :

$$\mathbb{E}(T_r), \mathbb{E}(\overline{T_r}), \mathbb{V}(T_r), \mathbb{V}(\overline{T_r}), \mathbb{E}(T_r^2) \text{ et } \mathbb{E}((\overline{T_r})^2);$$

vérifier en particulier que $\mathbb{E}((\overline{T_r})^2) = \frac{t}{r} + \frac{t^2}{r}(r-1)$.

(d) En déduire que les égalités suivantes sont valables pour tout $t \in [0,1]$:

$$\sum_{k=0}^r p_{k,r}(t) = 1, \sum_{k=0}^r \frac{k}{r} p_{k,r}(t) = t, \text{ et } \sum_{k=0}^r \left(\frac{k}{r}\right)^2 p_{k,r}(t) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)t^2 + \frac{1}{r}t.$$

(e) Justifier que les trois égalités précédentes sont encore valables pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est stable par B_n . On note $\tilde{B}_n$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ induit par B_n , et A_n la matrice de $\tilde{B}_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note aussi $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

4. Montrer que $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) I_3 + \frac{1}{n} H$.

5. (a) La matrice H est-elle diagonalisable ?

(b) Soient a et b deux réels, et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Justifier que Q est inversible.

(c) Déterminer (sans chercher à calculer Q^{-1}) deux réels a et b pour lesquels $H = Q D Q^{-1}$.

6. On suppose dans toute la fin de cette partie que les réels a et b ont été choisis de telle sorte que $H = Q D Q^{-1}$ pour $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n) = I_3$.

- (b)  Montrer que l'application ψ définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par $\psi(M) = Q M Q^{-1}$ est linéaire.
- (c)  En déduire que si $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (M_\ell) = M$, alors, $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (Q M_\ell Q^{-1}) = Q M Q^{-1}$.
- (d) Montrer que $A_n = Q D_n Q^{-1}$.
- (e) Pour tout entier $n \geq 2$, déterminer explicitement $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (A_n^\ell)$.
- (f) Déterminer explicitement $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n^n)$.

PARTIE 2. ANALYSE ET PROBABILITÉS

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour f une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(x).$$

On reprend les notations de la question 2 avec $r = n$.

On remarque que dans ce cas, pour tout $t \in [0,1]$, le théorème de transfert nous donne

$$f(t) - B_n(f)(t) = \mathbb{E}\left(f(t) - f\left(\overline{T}_n\right)\right) = \sum_{k=0}^n \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) p_{k,n}(t).$$

On pourra utiliser sans démonstration les résultats de cette question 2.

7. (a) Montrer que pour toute variable aléatoire discrète Y admettant une variance, on a l'inégalité $\mathbb{E}(Y) \leq \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$.
- (b) En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$, $\mathbb{E}\left(|t - \overline{T}_n|\right) \leq \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$.
8. On suppose dans toute cette question que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

- (a)  Justifier l'existence d'un réel M_f tel que

$$\forall (a, b) \in [0,1]^2, |f(b) - f(a)| \leq M_f |a - b|.$$

- (b) Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\mathbb{E}\left(|f(t) - f(\overline{T}_n)|\right) \leq M_f \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$.

- (c) En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t) - B_n(f)(t)| \leq \frac{M_f}{2\sqrt{n}}$.

- (d)  Montrer que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

PARTIE 3. INTÉGRALES

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

On reprend les notations de la partie 2 pour $B_n(f)$. On pourra utiliser sans démonstration le résultat de la question 8.(d).

9.  Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 B_n(f)(x) dx \right) = \int_0^1 f(x) dx$.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(a)  Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \frac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b+1} dx.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, le réel $\int_0^1 p_{k,n}(x) dx$ est indépendant de l'entier k avec

$$\int_0^1 p_{k,n}(x) dx = \frac{1}{(n+1)}.$$

(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x) dx$.

11. Montrer que le résultat de la question 10.(c) reste vrai pour la seule hypothèse que f est continue sur $[0,1]$.

12. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a + b \leq c - 2$.

(a)  Montrer pour tout $x \in [0,1]$ la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^a (1+xu)^b}{(1+u)^c} du.$$

(b) Pour tout réel $b \geq 1$, montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{u^a (1+xu)^b}{(1+u)^c} du$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

(c) Justifier la validité du changement de variable $u = \frac{t}{1-t}$, et en déduire $F(0)$.
En déduire la valeur de $F(1)$.

PARTIE 4. SÉRIES DE FONCTIONS

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on note

$$f_n(t) = \begin{cases} p_{k,n}(t), & \text{si } n \geq k \\ 0, & \text{si } n < k, \end{cases}$$

13. Déterminer pour tout $t \in]0,1[$, un équivalent de $f_n(t)$ quand n tend vers $+\infty$.

14. Établir que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

Pour $t \in [0,1]$, on note $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.

15. Déterminer $S(t)$ pour $t = 0$ et pour $t = 1$.

16. (a)  Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $u \mapsto \frac{1}{1-u}$.

(b) En déduire que, pour tout $u \in [0,1[$,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)u^{n-k} = \frac{k!}{(1-u)^{k+1}}.$$

(c) En déduire que, pour tout $t \in]0,1]$, $S(t) = \frac{1}{t}$.

(d)  La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,1]$?

Sujet de type PC*

Problème 2

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, I_m la matrice unité d'ordre m et e_j le j -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ dont les composantes sont les $\delta_{i,j}$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ (on rappelle que $\delta_{i,j}$ est nul si $i \neq j$ et vaut 1 si $i = j$).

Les vecteurs de $\mathbb{R}^m$ seront assimilés à des matrices colonnes, ainsi un vecteur u de

$$\mathbb{R}^m \text{ est } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \text{ ou encore } u = (u_1 \dots u_m)^\top.$$

On note $\langle u | v \rangle = u^\top \times v$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^m$.

Tridiagonalisation.

Soit u un vecteur **unitaire** (de norme 1) de $\mathbb{R}^m$: on appelle **matrice de Householder d'ordre m associée au vecteur u** , la matrice

$$H = I_m - 2u \times u^\top.$$

1. Montrer que si $\langle u | v \rangle = 0$, alors $Hu = -u$ et que $Hv = v$.
2. Démontrer que H est une matrice symétrique et orthogonale.
3. Soit $w = (w_1 \dots w_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ un vecteur unitaire non colinéaire à e_1 .
Montrer que le vecteur $u = \frac{1}{\sqrt{2(1-w_1)}}(w - e_1)$ est unitaire, et que $Hw = e_1$.
4. En déduire que si $x \in \mathbb{R}^m$ est non colinéaire à e_1 , alors il existe un vecteur unitaire u et une matrice de Householder associée H telle que $Hx = \|x\|e_1$.

Soient c un réel, Q une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_{m-1}(\mathbb{R})$, $q_{2,1}$ un vecteur de

$\mathbb{R}^{m-1}$ et $\widehat{Q} = \left(\begin{array}{c|c} c & q_{2,1}^\top \\ \hline q_{2,1} & Q \end{array} \right)$ une matrice définie par blocs.

Si H_1 est une matrice de Householder d'ordre $m-1$, on pose :

$$\rightarrow \widehat{H}_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta^\top \\ \hline \zeta & H_1 \end{array} \right) \text{ où } \zeta \text{ est le vecteur nul dans } \mathbb{R}^{m-1},$$

$$\rightarrow \text{ainsi que } \widehat{S} = \widehat{H}_1 \times \widehat{Q} \times \widehat{H}_1 = (\widehat{\sigma}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}.$$

5. Montrer que $\widehat{S}$ est semblable à $\widehat{Q}$ et qu'on peut choisir H_1 de telle sorte que $\widehat{\sigma}_{i,1} = \widehat{\sigma}_{1,i} = 0$ pour $i \in \llbracket 3, m \rrbracket$.

- On dit qu'une matrice $T = (\tau_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ est **tridiagonale** si $\tau_{i,j} = 0$ dès que $|i-j| > 1$.
6. En déduire un procédé permettant de déterminer une matrice tridiagonale symétrique semblable à $\widehat{Q}$.

Matrices de Jacobi.

On appelle matrice de Jacobi une matrice tridiagonale symétrique réelle d'ordre m , autrement dit de la forme

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m-1} & b_m \end{pmatrix}.$$

- On considère une telle matrice de Jacobi d'ordre m que l'on note J . On pose $a_0 = a_m = 0$ et on suppose que pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $a_i \neq 0$.
7. Soit $x = (x_1 \cdots x_m)^\top$ un vecteur propre de J , montrer que $x_m \neq 0$.
8. Démontrer que les sous-espaces propres de J sont de dimension 1. Combien J a-t-elle de valeurs propres ?

Problème 3

On dira qu'une fonction réelle f est une densité (de probabilité) sur un intervalle I si elle est **continue, positive, intégrable** sur I , et vérifie

$$\int_I f(x) dx = 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit qu'une densité f est **de moment d'ordre n fini** lorsque la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur I ; et on définit ce **moment d'ordre n** par

$$m_n(f) = \int_I x^n f(x) dx.$$

On admet que la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité sur $\mathbb{R}$ nommée *densité gaussienne*.

I – Quelques exemples

1. Montrer que $g : x \mapsto e^{-x}$ est une densité sur $[0, +\infty[$, que tous ses moments sont finis, et calculer $m_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que tous les moments de la densité gaussienne φ sont finis.
3. Que vaut $m_{2p+1}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$?
4. Calculer $m_{2p}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$. (On exprimera le résultat sous forme compacte avec des factorielles.)
5. Donner un exemple de densité $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont le moment d'ordre 1 n'est pas fini.

Dans ce problème, on va s'intéresser à la question suivante : si deux densités f et g ont tous leurs moments finis et vérifient $m_n(f) = m_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f et g sont-elles sur I?

On va notamment voir dans la partie III que c'est vrai si $I = [0,1]$, mais dans la partie IV que c'est faux si $I = \mathbb{R}$.

II – Théorème de Stone-Weierstrass sur $[0 ; 1]$

6. Justifier que, pour tous $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$
7. Montrer que, pour tous $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$
8. Montrer que, pour tous $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.$$

9. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq C n,$$

pour une constante $C > 0$ à préciser.

DS 6. (Lundi 10 mars 2025)

On se donne maintenant $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, et $\varepsilon > 0$.

On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [0,1]^2$,

$$|x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pour $x \in [0,1]$ on note

$$X = \left\{ k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \alpha \right\} \quad \text{et} \quad Y = \left\{ k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket : \left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \alpha \right\}.$$

10. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2 \|f\|_{\infty}^{[0;1]} \times \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

11. En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que :

$$\|B_n - f\|_{\infty}^{[0;1]} \leq 2\varepsilon.$$

On a donc démontré le théorème de Stone-Weierstrass : **toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.**

III – Le problème des moments sur $[0,1]$

On considère ici deux densités f et g sur $I = [0,1]$ et on suppose donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m_n(f) = m_n(g).$$

12. Montrer que, pour toute fonction polynomiale P ,

$$\int_0^1 (f(x) - g(x)) P(x) dx = 0.$$

On sait par la partie II qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $f - g$ sur $[0,1]$.

13. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (f(x) - g(x)) P_n(x) dx = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx.$$

14. Montrer alors que $f = g$ sur $[0,1]$.

IV – Transformée de Fourier de la densité gaussienne

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} \varphi(t) dt,$$

où φ est la densité gaussienne définie en préambule.

15. L'application $\hat{\varphi}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

16. L'application $\hat{\varphi}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{\varphi}'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

17. Montrer que $\hat{\varphi}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.

18. Montrer que $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Une correction du problème 1

énoncé

CC(IN)P PC 2016

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, $p_{k,n}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$.

PARTIE 1. ALGÈBRE LINÉAIRE ET PROBABILITÉS

Soient $n \geq 2$, et $\mathcal{F} = (p_{0,n}(X), p_{1,n}(X), \dots, p_{n,n}(X))$.

1. (a) Soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_n(\lambda P + \mu Q) &= nX(\lambda P + \mu Q)(X) + X(1-X)(\lambda P + \mu Q)'(X) \\ &= \lambda (nXP(X) + X(1-X)P'(X)) \quad (\text{par bilinéarité du produit des polynômes, et} \\ &\quad + \mu (nXQ(X) + X(1-X)Q'(X)) \quad \text{linéarité de la dérivation}) \\ &= \lambda \varphi_n(P) + \mu \varphi_n(Q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } B_n(\lambda P + \mu Q)(X) &= \sum_{k=0}^n (\lambda P + \mu Q) \left(\frac{k}{n} \right) p_{k,n}(X) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^n P \left(\frac{k}{n} \right) p_{k,n}(X) + \mu \sum_{k=0}^n Q \left(\frac{k}{n} \right) p_{k,n}(X) \\ &= \lambda B_n(P) + \mu B_n(Q). \end{aligned}$$

Donc φ_n et B_n sont linéaires.

De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $B_n(P)$ est une combinaison linéaire des $p_{k,n}$ qui sont dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc $B_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ ce qui prouve que B_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Quant à φ_n , pour tout $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$,

$$\varphi_n(X^k) = nX^{k+1} + X(1-X)kX^{k-1} = \begin{cases} (n-k)X^{k+1} + kX^k & \text{si } k < n, \\ nX^n & \text{si } k = n, \end{cases}$$

donc $\varphi_n(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$, et φ_n étant linéaire, on peut conclure que

$$\varphi_n(\mathbb{R}_n[X]) = \varphi_n \left(\text{Vect} \left((X^k)_{k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket} \right) \right) = \text{Vect} \left((\varphi_n(X^k))_{k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket} \right) \subset \mathbb{R}_n[X],$$

ce qui prouve que φ_n est aussi un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Soit $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, d'une part

$$\begin{aligned} p'_{k,n}(X) &= \binom{n}{k} \left(kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - X^k(n-k)(1-X)^{n-k-1} \right) \\ &= \binom{n}{k} X^{k-1}(1-X)^{n-k-1} (k(1-X) - (n-k)X) \\ &= \binom{n}{k} X^{k-1}(1-X)^{n-k-1} (k - nX), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \varphi_n(p_{k,n})(X) &= nX p_{k,n}(X) + X(1-X) p'_{k,n}(X) \\ &= nX \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} + X(1-X) \times \binom{n}{k} X^{k-1} (1-X)^{n-k-1} (k - nX) \\ &= n \binom{n}{k} X^{k+1} (1-X)^{n-k} + \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} (k - nX) \\ &= n \binom{n}{k} X^{k+1} (1-X)^{n-k} + k \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} - n \binom{n}{k} X^{k+1} (1-X)^{n-k} \\ &= k p_{k,n}(X), \quad \text{c.Q.F.D.} \end{aligned}$$

(c) D'après la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, le polynôme non nul $p_{k,n}$ est un vecteur propre de B_n associé à la valeur propre k .

La famille $\mathcal{F}$ est donc une famille libre, puisque ce sont $n+1$ vecteurs propres de φ_n associés à $n+1$ valeurs propres distinctes. Or $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, donc la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et même une base de vecteurs propres, donc φ_n est diagonalisable.

(d) φ_n n'est pas bijectif, car il admet 0 comme valeur propre.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $B_n(P) = 0$, alors $\sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(X) = 0$, donc $\mathcal{F}$ étant une base, pour tout $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, $P\left(\frac{k}{n}\right) = 0$.

Ainsi P possède donc $n+1$ racines distinctes, mais il est de degré au plus n , donc c'est le polynôme nul. Par conséquent, B_n est injectif, et comme c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, B_n est bijectif.

2. (a) La variable aléatoire qui compte le nombre de succès d'un événement de probabilité t au cours de r expériences identiques et indépendantes suit la loi binomiale $\mathcal{B}(r, t)$.

(b) On sait que $T_r(\Omega) = \llbracket 0 ; r \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 0 ; r \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(T_r = k) = \binom{r}{k} t^k (1-t)^{r-k} = p_{k,r}(t).$$



L'énoncé veut-il qu'on redémontre l'expression de la probabilité? Tant pis pour lui...

(c) Comme la variable T_r suit la loi $\mathcal{B}(r, t)$, le cours nous donne $\mathbb{E}(T_r) = rt$, puis par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\overline{T_r}) = \frac{1}{r} \mathbb{E}(T_r) = t$.

De même, $\mathbb{V}(T_r) = rt(1-t)$, et par règles de calcul sur la variance, $\mathbb{V}(\overline{T_r}) = \frac{1}{r^2} \mathbb{V}(T_r) = \frac{t(1-t)}{r}$.

D'après la formule de kœnig-Huygens, $\mathbb{V}(T_r) = \mathbb{E}(T_r^2) - \mathbb{E}(T_r)^2$, donc

$$\mathbb{E}(T_r^2) = \mathbb{V}(T_r) + \mathbb{E}(T_r)^2 = rt(1-t) + r^2 t^2,$$

ainsi

$$\mathbb{E}(\overline{T_r}^2) = \frac{1}{r^2} \mathbb{E}(T_r^2) = \frac{t(1-t)}{r} + t^2 = \frac{t}{r} + \frac{t^2}{r}(r-1).$$

(d) Pour tout $t \in [0,1]$:

⇒ d'abord $\sum_{k=0}^r p_{k,r}(t) = \sum_{k=0}^r \mathbb{P}(T_r = k) = 1$ car T_r est une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0 ; r \rrbracket$;

⇒ puis $\sum_{k=0}^r \frac{k}{r} p_{k,r}(t) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^r k \mathbb{P}(T_r = k) = \frac{1}{r} \mathbb{E}(T_r) = \frac{1}{r} \times rt = t$;

⇒ en enfin,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^r \left(\frac{k}{r}\right)^2 p_{k,r}(t) &= \frac{1}{r^2} \sum_{k=0}^r k^2 \mathbb{P}(T_r = k) = \frac{1}{r^2} \mathbb{E}(T_r^2) \quad (\text{par le théorème de transfert}) \\ &= \frac{1}{r^2} \times (rt(1-t) + r^2 t^2) \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{r}\right) t^2 + \frac{1}{r} t. \end{aligned}$$

(e) Les trois relations obtenues à la question précédente donnent des égalités entre polynômes valables sur tout l'intervalle $[0 ; 1]$, donc les différences

entre ces polynômes sont des polynômes qui ont une infinité de racines (tous les réels de $[0 ; 1]$), donc ce sont des polynômes nuls.

Ainsi, les polynômes sont égaux, et a fortiori, les égalités sont valables pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. D'une part, $\mathbb{R}_2[X]$ est déjà un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, et $\mathbb{R}_2[X]$ est inclus dans $\mathbb{R}_n[X]$ puisque $n \geq 2$, donc $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

De plus, d'après la question précédente,

$$B_n(1) = \sum_{k=0}^n P_0 \left(\frac{k}{n} \right) p_{k,n}(X) = 1 \in \mathbb{R}_2[X],$$

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^n P_1 \left(\frac{k}{n} \right) p_{k,n}(X) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} p_{k,n}(X) = X \in \mathbb{R}_2[X],$$

$$B_n(X^2) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 p_{k,n}(X) = \left(1 - \frac{1}{n} \right) X^2 + \frac{1}{n} X \in \mathbb{R}_2[X],$$

donc

$$B_n(\mathbb{R}_2[X]) = B_n(\text{Vect}(1, X, X^2)) = \text{Vect}(B_n(1), B_n(X), B_n(X^2)) \subset \mathbb{R}_2[X], \text{c.Q.F.D.}$$

4. Par définition,

$$\begin{aligned} A_n &= \text{Mat}_{(1, X, X^2)}(B_n) = \text{Mat}_{(1, X, X^2)}(B_n(1), B_n(X), B_n(X^2)) \\ &= \text{Mat}_{(1, X, X^2)}\left(1, X, \frac{1}{n}X + \left(1 - \frac{1}{n}\right)X^2\right) \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} + \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) I_3 + \frac{1}{n} H \end{aligned}$$

5. (a) La matrice H est une matrice triangulaire, on voit donc sur sa diagonale que ses valeurs propres sont 0 et 1, et par conséquent H est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme $X(X-1)$ annule H .

Et c'est bien le cas puisqu'un calcul simple donne $H^2 = H$.



On pouvait aussi déduire du polynôme caractéristique que d'une part 0 est une valeur propre simple donc d'ordres de multiplicité égaux tous deux égaux à 1; puis que 1 est une valeur propre d'ordre de multiplicité algébrique 2, et le rang de $H - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est 1, donc, par théorème du rang la dimension de l'espace propre associé à (autrement dit l'ordre de multiplicité géométrique de) la valeur propre 1 est $3 - \text{rg}(H - I) = 2$.
On pouvait ainsi conclure que la matrice H est donc diagonalisable.

- (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, Q est une matrice triangulaire, son déterminant est égal à 1, qui est un nombre extrêmement différent de 0, donc Q est une matrice inversible.
- (c) Cherchons une base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(H) = D$, autrement dit telle que $HX_1 = X_1$, $HX_2 = X_2$, et $HX_3 = 0$.

D'une part, on note que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ conviennent.

De plus, il suffit de prendre $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour avoir $HX_3 = 0$.

Enfin, la matrice Q des coordonnées dans la base canonique de ces trois vecteurs X_1, X_2, X_3 est $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui est bien inversible, donc (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi, par la formule de changement de base, on a bien

$$H = QDQ^{-1}, \quad c.Q.F.D.$$

6. (a) Grâce à l'expression de A_n vue en question 4, $A_n - I_3 = \frac{1}{n}(-I_3 + H)$, donc pour toute norme $\|\cdot\|$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, par homogénéité

$$\|A_n - I_3\| = \frac{1}{n} \|-I_3 + H\|$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n - I_3\| = 0$, ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = I_3$.



Il suffisait aussi de prendre les limites coordonnée par coordonnée pour conclure.

- (b) Je me contenterai de dire que l'application ψ est linéaire par bilinéarité du produit matriciel $(A, B) \mapsto A \times B$.
- (c) L'application ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc c'est une application continue sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{\ell \rightarrow +\infty} (QM_\ell Q^{-1}) &= \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \psi(M_\ell) = \psi \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} M_\ell \right) \text{ (par continuité de } \psi) \\ &= \psi(M) = QMQ^{-1}, \text{ c.Q.F.D.} \end{aligned}$$

- (d) Encore grâce à l'expression de A_n vue en question 4, on a

$$\begin{aligned} Q^{-1}A_nQ &= Q^{-1} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) I_3 + \frac{1}{n}H \right) Q \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) Q^{-1}I_3Q + \frac{1}{n}QHQ^{-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) I_3 + \frac{1}{n}D = D_n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

- (e) Soit $n \geq 2$. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence que $A_n^\ell = QD_n^\ell Q^{-1}$.

Or D_n est diagonale, donc $D_n^\ell = \text{Diag} \left(1, 1, \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\ell \right)$.

Comme $\left|1 - \frac{1}{n}\right| < 1$, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} 0$, d'où $D_n^\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} I_3$.

Il suffit alors d'appliquer les résultats des questions (a) et (c) ci-dessus pour conclure que

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} A_n^\ell = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} QD_n^\ell Q^{-1} = Q \times D \times Q^{-1} = H.$$

- (f) En revanche, pour $n \geq 2$, $A_n^n = QD_n^n Q^{-1} = Q \text{Diag} \left(1, 1, \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right) Q^{-1}$.

Et dans ce cas

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \times \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{n \times \left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-1 + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}.$$

Ainsi,

$$D_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$$

puis avec le même raisonnement que ci-dessus

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} A_n^\ell = Q \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \times Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}.$$

PARTIE 2. ANALYSE ET PROBABILITÉS

7. (a) Soit Y une variable aléatoire discrète Y admettant une variance, alors d'une part $\mathbb{V}(Y) \geq 0$, et d'autre part, d'après la formule de Kœnig-Huyghens,

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}((Y - (\mathbb{E}(Y))^2) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2,$$

donc $\mathbb{E}(Y^2) \geq (\mathbb{E}(Y))^2$, puis par croissance sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction $\square \mapsto \sqrt{\square}$,

$$\mathbb{E}(Y) \leq |\mathbb{E}(Y)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}.$$

- (b) Pour tout $t \in [0,1]$, la variable $|t - \overline{T}_n|$ est, comme $\overline{T}_n$, une variable finie, donc elle admet une variance, ainsi par la question précédente

$$\mathbb{E}(|t - \overline{T}_n|) \leq \sqrt{\mathbb{E}((t - \overline{T}_n)^2)}.$$

Mais par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((t - \overline{T}_n)^2) &= \mathbb{E}(t^2 - 2t\overline{T}_n + \overline{T}_n^2) = t^2 - 2t\mathbb{E}(\overline{T}_n) + \mathbb{E}(\overline{T}_n^2) \\ &= t^2 - 2t \times t + \left(1 - \frac{1}{n}\right)t^2 + \frac{1}{n}t \quad (\text{par la question 2(c)}) \\ &= \frac{t - t^2}{n} = \frac{t(1-t)}{n}, \end{aligned}$$

d'où le résultat demandé.

8. On suppose dans toute cette question que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

- (a) La fonction f' est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée sur cet intervalle, d'où d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $(a, b) \in [0,1]^2$,

$$|f(b) - f(a)| \leq \|f'\|_\infty^{[0;1]} |b - a|,$$

ce qui est l'inégalité voulue avec $M_f = \|f'\|_\infty^{[0;1]}$.

- (b) Pour tout $t \in [0,1]$, T_n est à valeurs dans $\llbracket 0 ; n \rrbracket$, donc comme $\bar{T}_n = \frac{1}{n}T_n$, on en déduit que $\bar{T}_n$ est à valeurs dans $\subset [0,1]$.

On peut donc appliquer l'inégalité obtenue à la question précédente :

$$|f(t) - f(\bar{T}_n)| \leq M_f |t - \bar{T}_n|,$$

puis par croissance et linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(|f(t) - f(\bar{T}_n)|) \leq \mathbb{E}(M_f |t - \bar{T}_n|) = M_f \mathbb{E}(|t - \bar{T}_n|).$$

Ainsi, d'après la question 7.(b),

$$\mathbb{E}(|f(t) - f(\bar{T}_n)|) \leq M_f \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}.$$

- (c) Pour tout $t \in [0,1]$, d'après la remarque en préambule de cette partie,

$$|f(t) - B_n(f)(t)| = |\mathbb{E}(f(t) - f(\bar{T}_n))|.$$

Or pour toute variable Y qui admet une espérance, comme $Y \leq |Y|$ et $-Y \leq |Y|$, on a par croissance et linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(|Y|) \text{ et } -\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(|Y|),$$

autrement dit $|\mathbb{E}(Y)| \leq \mathbb{E}(|Y|)$.

On en déduit que

$$|f(t) - B_n(f)(t)| \leq \mathbb{E}(|f(t) - f(\bar{T}_n)|),$$

donc grâce à la question précédente, que

$$|f(t) - B_n(f)(t)| \leq M_f \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}.$$

De plus,

$$t(1-t) = -(t^2 - t) = -\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4},$$

donc $\sqrt{t(1-t)} \leq \frac{1}{2}$, dont on déduit l'inégalité demandée.

- (d) L'inégalité établie dans la question précédente étant vraie pour $t \in [0 ; 1]$, on en déduit que

$$\|B_n(f) - f\|_{\infty}^{[0;1]} \leq \frac{M_f}{2\sqrt{n}},$$

donc par domination, $\|B_n(f) - f\|_{\infty}^{[0;1]} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qui prouve que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

PARTIE 3. INTÉGRALES

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $B_n(f)$ est polynomiale donc continue sur $[0,1]$, et $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Donc la limite f est encore continue sur $[0 ; 1]$, et on peut intervertir limite et intégrale :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 B_n(f)(x) dx \right) = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n(f)(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

10. (a) Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}$, les fonctions $u : x \mapsto x^a$ et $v : x \mapsto v(x) \frac{1}{b+1} (1-x)^{b+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0 ; 1]$, avec $u'(x) = ax^{a-1}$ et $v'(x) = (1-x)^b$. Ainsi par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^a (1-x)^b dx &= [u(x)v(x)]_0^1 + \frac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b+1} dx \\ &= \frac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b+1} dx \quad (\text{car } a \in \mathbb{N}^*, \text{ donc } 0^a = 0). \end{aligned}$$

- (b) **Calcul préalable :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 p_{k,n}(t) dt &= \binom{n}{k} \int_0^1 t^k (1-t)^{n-k} dt \\ &= \binom{n}{k} \times \frac{k}{n-k+1} \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{n-k+1} dt, \end{aligned}$$

or

$$\binom{n}{k} \times \frac{k}{n-k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k}{n-k+1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \binom{n}{k-1},$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 p_{k,n}(t) dt &= \binom{n}{k-1} \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{n-(k-1)} dt \\ &= \int_0^1 \binom{n}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{n-(k-1)} dt \\ &= \int_0^1 p_{k-1,n}(t) dt \quad (\text{fin du calcul préalable}). \end{aligned}$$

Ainsi par récurrence,

⇒ pour $k = 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 p_{0,n}(t) dt &= \int_0^1 \binom{n}{0} (1-t)^n dt = \int_0^1 (1-t)^n dt \\ &= \left[-\frac{1}{n+1} (1-t)^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

⇒ et si au rang $k-1 \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket$, on a $\int_0^1 p_{k-1,n}(t) dt = \frac{1}{n+1}$, alors au rang suivant, d'après le calcul préalable, on a encore $\int_0^1 p_{k,n}(t) dt = \int_0^1 p_{k-1,n}(t) dt = \frac{1}{n+1}$, c.Q.F.D.



Sur le brouillon :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^a (1-x)^b dx &= \frac{a}{b+1} \times \frac{a-1}{b+2} \times \cdots \times \frac{1}{b+a} \int_0^1 (1-x)^{a+b} dx \\ &= \frac{a \times \cdots \times 1}{(b+1) \times \cdots (b+a)} \times \left[-\frac{1}{a+b+1} (1-x)^{a+b+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{a \times \cdots \times 1}{(b+1) \times \cdots (b+a) \times (a+b+1)} \\ &= \frac{a! b!}{(a+b+1)!},\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^1 p_{k,n}(t) dt = \binom{n}{k} \int_0^1 t^k (1-t)^{n-k} dt = \binom{n}{k} \times \frac{k! (n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 B_n(f) dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(t) dt = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 p_{k,n}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n+1} = S_n(f),\end{aligned}$$

donc le résultat de la question 9 nous donne la limite voulue.

11. Si f est continue sur $[0,1]$, le résultat sur les sommes de Riemann nous donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx,$$

or

$$\begin{aligned}
 S_n(f) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + f(1) \right) \\
 &= \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{f(1)}{n+1} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \times \int_0^1 f(x) dx + 0 = \int_0^1 f(x) dx, \text{ c.Q.F.D.}
 \end{aligned}$$

12. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a + b \leq c - 2$.

(a) Soit $x \in [0, 1]$, la fonction $g : u \mapsto \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$ est continue par morceaux sur $[0 ; +\infty[$.

De plus,

- $\Rightarrow$ si $x \neq 0$, $g(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u^a(xu)^b}{u^c} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^b}{u^{c-a-b}} \underset{u \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{u^{c-a-b}}\right)$, or $c - a - b \geq 2$, donc $u \mapsto \frac{1}{u^{c-a-b}}$ est intégrable en $+\infty$, et par domination, g est aussi intégrable en $+\infty$;
- $\Rightarrow$ si $x = 0$, $g(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u^{c-a}}$ et $c - a \geq b + 2 \geq 2$, donc g est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, g est intégrable sur $[0 ; +\infty[$, donc a fortiori l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c} du$ est convergente.

(b) Soit $b \geq 1$.

- $\Rightarrow$ Pour tout $u \in [0 ; +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x, u) = \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
- $\Rightarrow$ Pour tout $x \in [0, 1]$, $u \mapsto h(x, u) = \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $a + b \leq c - 2$.
- $\Rightarrow$ Pour tout $x \in [0, 1]$, $u \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, u) = \frac{u^a b u(1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c} = \frac{u^a b u(1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c}$ est continue par morceaux.

⇒ Pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $u \in [0 ; +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, u) \right| = \left| b \cdot \frac{u^{a+1}(1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c} \right| \leq b \frac{u^{a+1}(1+u)^{b-1}}{(1+u)^c},$$

et on prouve comme dans la question précédente que $u \mapsto \frac{u^{a+1}(1+u)^{b-1}}{(1+u)^c}$ est intégrable sur $[0 ; +\infty[$, en particulier car $b-1 \in \mathbb{N}$.

On peut donc conclure grâce au théorème de dérivation des intégrales à paramètre que la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c} du$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

- (c) La fonction $t \mapsto \frac{t}{1-t} = \frac{1}{1-t} - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$, strictement croissante, et donc bijective de $[0 ; 1[$ sur $[0, +\infty[$. Le changement de variable $u = \frac{t}{1-t}$ est donc valide.

Il se retourne en $t = 1 - \frac{1}{1+u}$ (c'est plus pratique pour le changement de bornes), donne $du = \frac{1}{(1-t)^2} dt$, et transforme l'intégrale convergente

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u)^c} du$$

en

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^1 \frac{\left(\frac{t}{1-t}\right)^a}{\left(1 + \frac{t}{1-t}\right)^c} \times \frac{1}{(1-t)^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^a}{(1-t)^{a+2-c}} dt = \int_0^1 t^a (1-t)^{c-2-a} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\binom{c-2}{a}} p_{a, c-2}(t) dt \quad (\text{car } c-2-a \geq b \geq 0) \\ &= \frac{1}{\binom{c-2}{a}} \times \frac{1}{(c-2)+1} \quad (\text{d'après la question 10(b)}) \\ &= \frac{a!(c-2-a)!}{(c-1)!}. \end{aligned}$$

De la même manière, le même calcul sur $F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u)^{c-b}} dx$, avec $c -$

$b - a - 2 \geq 0$, donne

$$F(1) = \int_0^1 \frac{1}{\binom{c-b-2}{a}} P_{a,c-b-2}(t) dt = \frac{a!(c-b-a-2)!}{(c-b-1)!}.$$

PARTIE 4. SÉRIES DE FONCTIONS

13. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$, ainsi

$$f_n(t) = p_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^k}{k!(1-t)^k} \times n^k (1-t)^n.$$

14. $\Rightarrow$ Pour $t = 0$ et $t = 1$, $f_n(t) = 0$, donc $\sum f_n(t)$ converge.

$\Rightarrow$ Pour tout $t \in]0, 1[$, comme $|1-t| < 1$, on a par croissances comparées

$$f_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^k}{k!(1-t)^k} \times n^k (1-t)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc par domination, la suite de terme général $f_n(t)$ est sommable, et a fortiori $\sum f_n(t)$ converge.

En conclusion, $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

15. D'une part

$$\begin{aligned} S(0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = \sum_{n=k}^{+\infty} p_{k,n}(0) \text{ (par définition des } f_n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} 0^k = 0 \text{ (car } k \in \mathbb{N}^*). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} S(1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(1) = \sum_{n=k}^{+\infty} p_{k,n}(1) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} 0^{n-k} \\ &= 1 + \sum_{n=k+1}^{+\infty} 0 = 1. \end{aligned}$$

16. (a) Pour tout $u \in]-1 ; 1[$, $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

(b) La fonction $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1 ; 1[$ avec pour dérivées successives

$$u \mapsto \frac{k!}{(1-u)^{k+1}}.$$

On sait d'autre part que la somme d'une série entière est $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence (ce que l'on savait déjà ici), et qu'on la dérive terme à terme, ainsi pour tout $u \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} \frac{k!}{(1-u)^{k+1}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (u^n)^{(k)} \quad (\text{notation abusive}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)u^{n-k}. \end{aligned}$$



Cette égalité est peu ou prou la formule du binôme négatif, et on peut aussi retrouver ce résultat avec le développement en série entière de la fonction puissance (voir la [remarque 15.9](#)).

(c) D'après la définition de f_n ($f_n(t) = 0$ si $n < k$) et la question précédente, pour tout $t \in]0 ; 1]$,

$$S(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \times n(n-1)\cdots(n-k+1)(1-t)^{n-k} = \frac{t^k}{k!} \times \frac{k!}{(1-(1-t))^{k+1}} = \frac{1}{t}.$$

(d) Si la série $\sum f_n$ convergerait normalement sur $[0,1]$, elle convergerait uniformément sur $[0,1]$, et les fonctions f_n étant continues sur $[0 ; 1]$, la somme S serait encore continue sur $[0 ; 1]$, et en particulier en 0. On aurait alors $\lim_{t \rightarrow 0} S(t) = S(0)$, ce qui est faux puisque

$$\forall t \in]0 ; 1], \quad S(t) = \frac{1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{>} +\infty.$$

Donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

Une correction du problème 2

énoncé

D'après Mines-Ponts PC 2013.

Tridiagonalisation.

1. Comme le vecteur u est unitaire, $u^\top \times u = \langle u | u \rangle = \|u\|^2 = 1$. Ainsi

$$Hu = u - 2u (u^\top \times u) = u - 2u\|u\|^2 = u - 2u = -u.$$

Et si $\langle u | v \rangle = 0$, alors $u^\top \times v = 0$, donc

$$Hv = v - 2u (u^\top \times v) = v.$$

2. On rappelle que la transposition est linéaire, vérifie $(A^\top)^\top = A$ (la transposition est une symétrie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$!), et $AB^\top = B^\top A^\top$ dès que le produit AB existe. Par conséquent,

$$H^\top = I^\top - 2(u^\top)^\top u^\top = I - 2uu^\top = H,$$

donc H est bien une matrice symétrique.

De plus

$$\begin{aligned} H^2 &= (I - 2uu^\top) \times (I - 2uu^\top) = I - 4uu^\top + 4u (u^\top u) u^\top \\ &= I - 4uu^\top + 4uu^\top \text{ (car } u \text{ est unitaire)} \\ &= I - 4uu^\top + 4u (\|u\|^2) u^\top = I \text{ C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

3. l'hypothèse selon laquelle (w, e_1) est une famille libre permet d'affirmer qu'il existe $i > 1$ tel que $w_i \neq 0$, donc que

$$w_1^2 = \|w\|^2 - \sum_{k=2}^m w_k^2 < 1$$

ce qui donne en particulier $1 - w_1 \neq 0$ et assure que u est bien défini.

On rappelle que le produit scalaire dans $\mathbb{R}^m$ est bilinéaire et symétrique, donc

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \langle u | u \rangle = \frac{1}{2(1-w_1)} \langle w - e_1 | w - e_1 \rangle \\ &= \frac{1}{2(1-w_1)} (\|w\|^2 - 2\langle w | e_1 \rangle + \|e_1\|^2) \\ &= \frac{1}{1-w_1} (1 - \langle w | e_1 \rangle) \quad (\text{car } w \text{ et } e_1 \text{ sont unitaires})\end{aligned}$$

Mais par ailleurs,

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \text{ et } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\leftarrow 1^e \text{ ligne})$$

donc $\langle w | e_1 \rangle = w_1$. Par conséquent

$$\|u\|^2 = \frac{1-w_1}{1-w_1} = 1 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

D'autre part,

$$Hw = w - 2uu^T w,$$

or

$$\begin{aligned}u^T w &= \frac{1}{\sqrt{2(1-w_1)}} (w - e_1)^T \times w = \frac{1}{\sqrt{2(1-w_1)}} (w^T w - e_1^T w) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(1-w_1)}} (\|w\|^2 - \langle e_1 | w \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2(1-w_1)}} (1 - w_1) \\ &= \sqrt{\frac{1-w_1}{2}}.\end{aligned}$$

donc

$$Hw = w - 2\sqrt{\frac{1-w_1}{2}} \frac{w - e_1}{\sqrt{2(1-w_1)}} = e_1 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

4. Soit $x \notin \text{Vect}(e_1)$. Alors $w = \frac{1}{\|x\|}x$ est unitaire et non colinéaire à e_1 , et d'après la question précédente, en notant w_1 la première coordonnée de w , le vecteur $u = \frac{w-e_1}{\sqrt{2(1-\gamma_1)}}$ et la matrice $H = I - 2uu^T$ donnent

$$Hx = \|x\|Hg = \|x\|e_1, \text{ c.q.f.d.}$$

5. $\Rightarrow$ On commence par remarquer que par un produit par blocs, en rappelant bien que ζ est le vecteur nul,

$$\widehat{H_1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \zeta^T \\ \zeta & H_1^2 \end{pmatrix},$$

or d'après la question 2, qui est valable pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $H_1^2 = I_{m-1}$, d'où

$$\widehat{H_1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \zeta^T \\ \zeta & I_{m-1} \end{pmatrix} = I_m.$$

et on a donc $\widehat{H_1} = \widehat{H_1}^{-1}$, ainsi l'égalité

$$\widehat{S} = \widehat{H_1} \widehat{Q} \widehat{H_1}$$

justifie que $\widehat{S}$ est semblable à $\widehat{Q}$.

$\Rightarrow$ En effectuant un produit par blocs

$$\begin{aligned} \widehat{S} &= \widehat{H_1} \widehat{Q} \widehat{H_1} = \begin{pmatrix} 1 & \zeta^T \\ \zeta & H_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & q_{2,1}^T \\ q_{2,1} & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \zeta^T \\ \zeta & H_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c & q_{2,1}^T H_1 \\ H_1 q_{2,1} & H_1 Q H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & (H_1 q_{2,1})^T \\ H_1 q_{2,1} & H_1 Q H_1 \end{pmatrix} \text{ (car } H_1 \text{ est symétrique)} \end{aligned}$$

Distinguons maintenant deux cas.

⊕ Si $q_{2,1} = \zeta$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^{m-1}$, alors $H_1 q_{2,1} = \zeta$, et $\widehat{\sigma_{i,1}} = \widehat{\sigma_{1,i}} = 0$ pour $i \in \llbracket 2, m \rrbracket$, et donc a fortiori pour $i \in \llbracket 3, m \rrbracket$.

⊕ Si $q_{2,1} \neq 0$, la question 4. utilisée avec $x = q_{2,1}$ donne une matrice H_1 telle que $H_1 q_{2,1} = \|q_{2,1}\|e'_1$, où e'_1 est le premier vecteur de la base canonique

de $\mathbb{R}^{m-1}$, autrement dit $H_1 q_{2,1}$ est de la forme $\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dans ce cas,

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} c & * & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ * & & & & \\ 0 & & H_1 Q H_1 & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

donc $\widehat{\sigma}_{i,1} = \widehat{\sigma}_{1,i} = 0$ pour $i_{in[[3,m]]}$.

6. On vient de voir qu'il existe une matrice de Householder H_1 de taille $m - 1$ telle que

$$\widehat{H}_1 \widehat{Q} \widehat{H}_1 = \begin{pmatrix} * & * & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ * & & & & \\ 0 & & H_1 Q H_1 & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

De même, $H_1 Q H_1$ étant une matrice symétrique d'ordre $m - 1$, on trouve une matrice de Householder H_2 de taille $m - 2$. En posant cette fois

$$\widehat{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & H_2 & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

on calcule $\widehat{H}_2 \widehat{H}_1 \widehat{Q} \widehat{H}_1 \widehat{H}_2$ et on vérifie que l'on obtient une matrice du type

$$\widehat{H}_2 \widehat{H}_1 \widehat{Q} \widehat{H}_1 \widehat{H}_2 = \begin{pmatrix} * & * & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ * & * & * & 0 & \dots\dots 0 \\ 0 & * & & & \\ \vdots & 0 & & S & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

où S est encore une matrice symétrique. On a ainsi réussi à obtenir une seconde ligne et une seconde colonne convenable (sans perdre les zéros apparus à l'étape précédente). On obtient ainsi par récurrence (il y a $m - 2$ étapes) des matrices symétriques et orthogonales, autrement dit dont l'inverse est la transposée, $\widehat{H}_1, \dots, \widehat{H}_{m-2}$ telles que

$$\widehat{H}_{m-2} \dots \widehat{H}_1 \widehat{Q} \widehat{H}_1 \dots \widehat{H}_{m-2}$$

est tridiagonale symétrique. Comme $\widehat{H}_1 \dots \widehat{H}_{m-2}$ admet $\widehat{H}_{m-2} \dots \widehat{H}_1$ pour inverse, on a bien la relation de similitude voulue.

Remarque : on pourrait bien sûr démontrer par récurrence la stratégie précédente mais il est difficile de savoir ce que veut exactement l'énoncé.

Matrices de Jacobi.

7. L'égalité $T_0 x = \lambda x$ donne un système de n équations qui s'écrivent

$$\begin{cases} (b_1 - \lambda)x_1 + a_1 x_2 = 0 \\ \forall k \in \llbracket 2, m-1 \rrbracket, a_{k-1}x_{k-1} + (b_k - \lambda)x_k + a_k x_{k+1} = 0 \\ a_{m-1}x_{m-1} + (b_m - \lambda)x_m = 0 \end{cases}$$

Supposons, par l'absurde, que $x_m = 0$. Comme $a_{m-1} \neq 0$, la dernière équation donne $x_{m-1} = 0$. Comme $a_{m-2} \neq 0$, la précédente donne alors $x_{m-2} = 0$. On poursuit par récurrence ce processus jusqu'à exploiter la seconde équation qui, comme $a_1 \neq 0$, donne $x_1 = 0$. On obtient alors que $x = 0$ ce qui contredit le fait que x est supposé non nul.

(Ici aussi, on pourrait proprement montrer par récurrence descendante la nullité des x_i , mais je suis sûr qu'un correcteur, fût-il aussi pointilleux que moi-même, se contenterait de la mention « par récurrence » placée au bon moment.)

8. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de T_0 , et prenons

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

deux vecteurs propres associés à λ .

D'après la question précédente, on sait que u_m et v_m sont non nuls. Par ailleurs, $E_\lambda(T_0)$ est un sous-espace vectoriel, donc $v_m u - u_m v \in E_\lambda(T_0)$, et ce vecteur a pour dernière coordonnée $v_m u_m - u_m v_m = 0$.

Derechef, grâce à la question précédente, on en déduit que le vecteur $v_n u - u_n v$ est nul, donc que la famille (u, v) est liée.

Par conséquent $E_\lambda(T_0)$, qui n'est pas réduit au vecteur nul par définition d'une valeur propre, ne contient pas de famille libre de plus de 2 vecteurs, par conséquent, sa seule issue est malheureusement d'être une pauvre petite droite vectorielle.

Ainsi $\dim(E_\lambda(T_0)) = 1$.

La matrice T_0 est diagonalisable grâce au théorème spectral, puisqu'elle est symétrique réelle. La somme des dimensions de ses sous-espaces propres est donc égale à m (qui est la dimension de $\mathbb{R}^m$). Et comme toutes ces dimensions valent 1, on en déduit que T_0 possède m sous-espaces propres, donc exactement m valeurs propres distinctes.

Une correction du problème 3

énoncé

D'après Mines-Ponts PSI 2019

I – Quelques exemples

1. $\Rightarrow$ Il est un résultat de cours que $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \int_0^{+\infty} e^{-1 \times x} dx = \frac{1}{1} \\ &= 1, \end{aligned}$$

donc g est une densité sur $[0, +\infty[$.

- $\Rightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n g(x) = x^n e^{-x}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$, et dominée, par croissances comparées, par $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$. Or cette dernière est intégrable sur $[1 ; +\infty[$, donc par comparaison $x \mapsto x^n g(x)$ est aussi intégrable sur $[0 ; +\infty[$.

On en déduit que tous les moments sur $[0 ; +\infty[$ de g sont finis.

- $\Rightarrow$ De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications $u : x \mapsto x^{n+1}$ et $-g$ sont $\mathcal{C}^1$ sur

$[0 ; +\infty[$, et par croissances comparées

$$\lim_{+\infty} u \times (-g) = 0,$$

on peut donc effectuer l'intégration par parties suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-x} dx &= \left[-x^{n+1} e^{-x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1)x^n (-e^{-x}) dx \\ &= (n+1) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, \end{aligned}$$

et on en déduit facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m_n(g) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $x \mapsto x^n \varphi(x) = x^n e^{-x^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, paire ou impaire (mais jamais ni l'un ni l'autre) car φ est paire, et négligeable en $+\infty$, par croissances comparées, devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, qui est intégrable sur $[1 ; +\infty[$. Donc par domination, elle est intégrable sur $[1 ; +\infty[$, puis sur $[0 ; +\infty[$ par continuité, et enfin sur $\mathbb{R}$ par parité.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, comme φ est paire, l'application $x \mapsto x^{2p+1} \varphi(x)$ est impaire, donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad m_{2p+1}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p+1} \varphi(x) dx = 0.$$

- On admet d'après l'énoncé que φ est effectivement une densité sur $\mathbb{R}$, et donc que $m_0(\varphi) = 1$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} m_{2p}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} \varphi(x) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^{2p} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (\text{car } x \mapsto x^{2p} \varphi(x) \text{ est paire}) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^{2p-1} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx. \end{aligned}$$

Or

⇒ $x \mapsto x^{2p-1}$ et $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$ (la seconde ayant pour dérivée $x \mapsto -xe^{-\frac{x^2}{2}}$),

⇒ et par croissances comparées leur produit tend vers 0 en $+\infty$,
donc par une intégration par parties

$$\begin{aligned} m_{2p}(\varphi) &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[x^{2p-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (2p-1)x^{2p-2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \\ &= 0 - 0 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (2p-1) \int_0^{+\infty} x^{2p-2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= (2p-1)m_{2p-2}(\varphi). \end{aligned}$$

On déroule cette relation de récurrence en

$$\begin{aligned} m_{2p}(\varphi) &= (2p-1) \times (2p-3) \times \cdots \times 3 \times 1 \times \underbrace{m_0(\varphi)}_{=1} \\ &= \frac{(2p)!}{(2p)(2p-2)\cdots 2} = \frac{(2p)!}{2^p p!}. \end{aligned}$$

Et on devrait pour bien faire démontrer par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ cette égalité, mais se contente de persuader le correcteur qu'on sait le faire.

5. Prenons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4x^2} & \text{si } |x| \geq 1, \\ \frac{1}{4} & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $[1; +\infty[$ grâce à l'intégrabilité de la fonction de Riemann $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, donc intégrable sur $]-\infty; -1]$ car elle est paire, et enfin intégrable sur $\mathbb{R}$ par sa continuité.

De plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} \right) = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$$

Tout ceci démontre que f est bien une densité sur $\mathbb{R}$.

En revanche, pour $x \geq 1$, $x \times f(x) = \frac{1}{4x}$, et la fonction de Riemann $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$, donc f n'admet pas de moment d'ordre 1.

II – Théorème de Stone-Weierstrass

Rappelons la formule du binôme de Newton, qu'on utilisera dans les trois prochaines questions,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x + y)^n.$$

6. Soient $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. En prenant $y = 1 - x$ dans la formule du binôme de Newton, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = 1 = (x + (1 - x))^n = 1^n = 1,$$

d'où le résultat.

7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{R}$, en dérivant la fonction polynomiale $x \mapsto (x + y)^n$, puis, pour tout réel x , en multipliant le résultat par x , on obtient

$$(\text{Newton2}) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^k y^{n-k} = n x (x + y)^{n-1}.$$

Enfin, pour tout $x \in [0, 1]$, on prend $y = 1 - x$ et on obtient bien

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = n x (x + (1 - x))^{n-1} = n x \times 1^n = n x, \quad \text{c.Q.F.D.}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, de nouveau on dérive (Newton2) par rapport à x , et on multiplie le résultat par x , et on obtient

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 x^k y^{n-k} = n x (x + y)^{n-1} + n(n-1) x^2 (x + y)^{n-2}.$$

Puis encore une fois, pour tout $x \in [0, 1]$, on prend $y = 1 - x$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} &= n x (x + (1 - x))^{n-1} \\ &\quad + n(n-1) x^2 (x + (1 - x))^{n-2} \\ &= n x + n(n-1) x^2, \quad \text{c.Q.F.D.} \end{aligned}$$

9. Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad - 2nx \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + (nx)^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

En simplifiant cette expression grâce aux trois identités démontrées dans les questions précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= (nx + n(n-1)x^2) - 2(nx)^2 + (nx)^2 \\ &= nx(1-x) \begin{cases} \leq n \text{ (car } x \leq 1 \text{ et } 1-x \leq 1 \text{ donc } 0 \leq x(1-x) \leq 1), \\ \text{ou au choix,} \\ = n \times \left(\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \leq \frac{1}{4}n. \end{cases} \end{aligned}$$

D'où le résultat voulu avec au choix $C = 1$ ou $C = \frac{1}{4}$.

10. Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} B_n(x) - f(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{=1} \times f(x) \text{ (qu. 6.)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \end{aligned}$$

D'après la propriété admise dans l'énoncé, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [0,1]^2$ vérifiant $|x - y| < \alpha$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Or, en définissant X et Y

comme dans le préambule, on peut séparer la somme en deux :

$$\begin{aligned} B_n(x) - f(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \\ &= \sum_{k \in X} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \\ &\quad + \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right). \end{aligned}$$

donc grâce à l'inégalité triangulaire, et sachant que $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$,

$$\begin{aligned} |B_n(x) - f(x)| &\leq \sum_{k \in X} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \\ &\quad + \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|. \end{aligned}$$

Par définition de X , pour tout $k \in X$ $\left| x - \frac{k}{n} \right| < \alpha$, donc $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \varepsilon$, et par les règles de calcul sur les inégalités ($\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$)

$$\begin{aligned} |B_n(x) - f(x)| &\leq \varepsilon \sum_{k \in X} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|. \end{aligned}$$

Comme nous additionnons des termes positifs et que $X \subseteq \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\sum_{k \in X} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

De plus, pour tout $k \in Y$, encore par l'inégalité triangulaire,

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + |f(x)| \leq 2\|f\|_{\infty}.$$

On en déduit en compilant tous ces résultats que

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_{\infty} \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad \text{c.Q.F.D.} \quad (6.2)$$

11. Soit $x \in [0,1]$. Par définition de Y , pour tout $k \in Y$,

$$1 = \frac{\left|x - \frac{k}{n}\right|^2}{\left|x - \frac{k}{n}\right|^2} \leq \frac{\left|x - \frac{k}{n}\right|^2}{\alpha^2} = \frac{(nx - k)^2}{n^2 \alpha^2}$$

donc comme on ne manipule que des réels positifs

$$\sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\alpha^2 n^2} \sum_{k \in Y} (nx - k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Or d'après la question 9., il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\sum_{k=0}^n (nx - k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq Cn,$$

et donc :

$$\sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\alpha^2 n^2} \sum_{k=0}^n (nx - k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{C}{\alpha^2 n}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C}{\alpha^2 n} = 0$. Donc, par définition de la limite, pour tout n suffisamment grand on a :

$$0 \leq \frac{C}{\alpha^2 n} \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}.$$

En utilisant cette majoration, et l'inégalité établie dans la question précédente, on obtient finalement que pour tout n suffisamment grand :

$$\|B_n - f\|_\infty \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \times \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty} = 2\varepsilon, \quad \text{c.Q.F.D.}$$

III – Le problème des moments sur $[0,1]$

12. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))x^n dx = m_n(f) - m_n(g) = 0$$

par hypothèse sur f et g .

Ainsi, pour toute fonction polynomiale $P = \sum_{n=0}^{\deg(P)} a_n X^n$ (où a_n est nul à partir d'un certain rang), l'intégrale étant linéaire,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(x) - g(x)) P(x) dx &= \int_0^1 (f(x) - g(x)) \sum_{n=0}^{\deg(P)} a_n x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\deg(P)} a_n \int_0^1 (f(x) - g(x)) x^n dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= 0, \text{ c.Q.F.D.} \end{aligned}$$

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par les inégalités classiques sur les intégrales,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (f(x) - g(x)) P_n(x) dx - \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx \right| &= \left| \int_0^1 (f(x) - g(x)) (P_n(x) - (f(x) - g(x))) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot |P_n(x) - (f(x) - g(x))| dx \\ &\leq \|P_n - (f - g)\|_\infty \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx. \end{aligned}$$

Par hypothèse $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers $f - g$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n - (f - g)\|_\infty = 0$, d'où par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (f(x) - g(x)) P_n(x) dx = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx.$$

14. D'après la question 12, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 (f(x) - g(x)) P_n(x) dx = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc, d'après la question précédente, par unicité de la limite

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx = 0.$$

Or la fonction $(f - g)^2$ est continue sur $[0,1]$ (car f et g sont des densités positive, et d'intégrale nulle, donc par stricte positivité de l'intégrale, on peut en déduire que $(f - g)^2 = 0$, donc que $f = g$).

IV – Transformée de Fourier de la densité gaussienne

15. Nous allons démontrer simultanément l'existence et la continuité de $\widehat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$, grâce au théorème de continuité des intégrales à paramètre. Posons :

$$\forall (\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \phi(\xi, t) = e^{it\xi} \varphi(t).$$

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \phi(\xi, t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$ (par continuité de φ , et par continuité de l'exponentielle complexe en tant que somme de série entière de rayon de convergence infini par exemple), et pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'application $\xi \mapsto \phi(\xi, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour la même raison. De plus :

$$\forall (\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |\phi(\xi, t)| = \varphi(t) \leq \varphi(t), \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

et l'application φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, puisqu'il s'agit d'une densité sur $\mathbb{R}$.

Les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètre sont donc vérifiées ; on en déduit que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \phi(\xi, t) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} \varphi(t) dt$ converge absolument, donc converge, et l'application $\widehat{\varphi} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} \varphi(t) dt$ est continue sur $\mathbb{R}$: ce qu'il fallait démontrer.

16. Cette fois-ci, nous utilisons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Avec les notations de la question précédente :

→ pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $\xi \mapsto \phi(\xi, t)$ est manifestement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi, t) = ite^{it\xi} \varphi(t);$$

- pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, les applications $t \mapsto \phi(\xi, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi, t)$ sont continues (par morceaux) sur $\mathbb{R}$ par continuité des exponentielles et applications polynomiales, et l'application $t \mapsto \phi(\xi, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente ;
- pour tout $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a :

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi, t) \right| = t\varphi(t), \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

et l'application $t \mapsto t\varphi(t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question 2 (où nous montrons en particulier l'existence d'un moment d'ordre 1).

Les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre sont donc vérifiées ; on en déduit que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ l'application $t \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et l'application $\widehat{\varphi} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} \varphi(t) dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi, t) dt = \int_{\mathbb{R}} ite^{it\xi} \varphi(t) dt = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} te^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

17. Soit $\xi \in \mathbb{R}$.

Les applications $t \mapsto e^{it\xi}$ et $t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2}}$ sont de classe C^1 sur le segment $\mathbb{R}$, et leur produit a pour module $e^{-\frac{t^2}{2}}$ qui tend vers 0 en $\pm +\infty$, donc on peut effectuer une intégration par parties

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi} te^{-\frac{t^2}{2}} dt = +i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

et après multiplication par $\frac{i}{\sqrt{2\pi}}$, on obtient :

$$\widehat{\varphi}'(\xi) = -\xi \varphi(\xi),$$

donc $\widehat{\varphi}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (selon la variable ξ) $y' = -\xi y$.

18. On sait (à force de l'avoir dérivée) que la fonction $\xi \mapsto e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ est aussi une solution sur $\mathbb{R}$ de cette même équation différentielle. Or comme $\xi \mapsto \xi$ (qui est

un coefficient de cette équation différentielle) est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que l'ensemble des solutions de $y' = -\xi y$ est une droite vectorielle, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = \lambda e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

On sait de plus que

$$\widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = 1$$

parce que φ est une densité sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\lambda = 1$, et donc que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$