Calculs de sommes de séries

Exercice 4.1 – Utilisation des séries de référence

Montrer que les séries de termes généraux ci-dessous convergent et donner leurs sommes : $\dfrac{1}{n(n+1)}$, $\dfrac{3+2^n}{4^{n+1}}$, $\dfrac{n+1}{3^n}$, $\dfrac{n^4+1}{n!}$.

Exercice 4.2 – (**) - Définition et reste d'une série convergente

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle positive décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$ *(on pourra comparer* $(2n)u_{2n}$ *et* $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k$*)*.
2. Montrer que la série $\sum n(u_n - u_{n+1})$ converge et a pour somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Études par comparaison

Exercice 4.3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Montrer que la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne la convergence de la série $\sum u_n^2$.

Exercice 4.4

Déterminer la nature des séries de termes généraux suivants :

$$\frac{n}{\ln(n)}\;;\quad \frac{1}{\sqrt{n\ln(n)}}\;;\quad \frac{1}{2^n - i3^n}\;;\quad \frac{\sin^2(n)}{n^2}\;;\quad \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^3\;;\quad \mathrm{e}^{-n^2}\;;$$

$$\frac{\cos\left(2\sqrt{n}\right)}{n^2}\;;\quad \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\;;\quad \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{3+x^2}}\mathrm{d}x\;;\quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}.$$

Exercice 4.5 – La règle de Raabe-Duhamel.

Soient $a\in\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{a}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left((n+1)^a u_{n+1}\right) - \ln\left(n^a u_n\right)$?
2. En déduire un équivalent simple de u_n, et discuter la nature de $\sum u_n$.

(mis à jour le 13 septembre 2024)

Exercice 4.6 – (*) - Oral Centrale

Déterminer les réels a, b et c pour que la série de terme général $a\ln(n)+b\ln(n+1)+c\ln(n+2)$ soit convergente, et calculer alors sa somme.

Exercice 4.7 – (**)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que les séries de termes généraux ci-dessous sont de mêmes natures :

$$u_n,\quad \frac{u_n}{1+u_n},\quad \ln(1+u_n),\quad \text{et}\quad \int_0^{u_n}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^e}.$$

Exercice 4.8 – Produit de Cauchy

Montrer la convergence et calculer la somme des séries de terme général

$$u_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2(n-p)!},\qquad \text{et}\qquad v_n=(n+1)3^{-n}.$$

Termes généraux de signe incontrôlable

Exercice 4.9

Justifier la convergence de chacune des séries suivantes, et donner de chacune de leur somme un encadrement de longueur 10^{-2} :

$$\sum\frac{(-1)^n}{n+2},\qquad \sum\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 4.10 – (*)

Étudier la nature des séries $\sum\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $\sum\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Exercice 4.11 – (**) Oral Mines-Telecom

Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n n^b}$, où a et b sont deux réels distincts.

Exercice 4.12

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum (-1)^n \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right), \quad \sum \frac{(-1)^n}{n} \tan\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 4.13 – La constante d'Euler-Mascheroni

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n)$.

1. Donner un équivalent de $u_n - u_{n+1}$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Quelle est la nature de la série $\sum (u_n - u_{n+1})$?
3. En déduire l'existence d'un réel γ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + \ln(n) + o(1)$.

Exercice 4.14 – (*) - Oral Mines-Ponts PC

Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que la série de terme général $(-1)^n n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ converge.

Exercice 4.15 – (**) - Oral Centrale

Déterminer la nature des séries de termes généraux

$$u_n = \sin\left(\pi \left(1 - \sqrt{2}\right)^n\right) \text{ et } v_n = \sin\left(\pi \left(1 + \sqrt{2}\right)^n\right).$$

Exercice 4.16 – (*) - Oral Mines-Ponts

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, on suppose que Q n'a pas de racine dans $\mathbb{N}$. Étudiez la nature de la série de terme général $(-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$.

Exercice 4.17 – (**) - Oral Mines-Ponts

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante dont la série converge.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$, puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Exhiber une suite positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la série converge, mais qui n'est pourtant pas dominée par $\frac{1}{n}$.

Exercice 4.18 – (**) - Oral Mines-Ponts PC

Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!}$ quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 4.19 – (**) Centrale

Soient (u_n) une suite réelle à termes positifs et (v_n) la suite définie par $v_n = \int_0^{u_n} \frac{dt}{1+t^3}$.

1. Montrer que (u_n) converge vers 0 si et seulement si (v_n) converge vers 0.
2. Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.
3. Le résultat de la question précédente reste-t-il valable si (u_n) est à valeurs dans $]-1,+\infty[$?

Exercice 4.20 – (*) Centrale : série convergente dont les puissances divergent

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{3n} = \frac{2}{\ln(n+3)}, \quad u_{3n+1} = -\frac{1}{\ln(n+3)}, \quad u_{3n+2} = -\frac{1}{\ln(n+3)}.$$

1. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ **une suite de réels positifs**. On suppose que la série de terme général a_n est convergente. La série de terme général a_n^2 est-elle convergente ?
3. Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant 2$. Montrer que la série de terme général u_n^p est divergente.

Solutions

Une correction de l'exercice 4.1 *énoncé*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, donc pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n+1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\mathrm{N}+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{\mathrm{N}+1} \xrightarrow[\mathrm{N}\longrightarrow+\infty]{} 1$$

donc la série converge et a pour somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

2. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{3+2^n}{4^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{3}{4^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{2^n}{4^{n+1}} = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

on reconnaît les sommes partielles des séries géométriques de raison $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$; ces séries sont convergentes, car $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, et ont pour sommes respectives $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$ et $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, donc

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{3+2^n}{4^{n+1}} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$$

ce qui prouve que la série $\sum \frac{3+2^n}{4^{n+1}}$ converge et a pour somme $\frac{3}{2}$.

3. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, grâce au changement d'indice $n' = n+1$:

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{n+1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}+1} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \xrightarrow[\mathrm{N}\longrightarrow+\infty]{} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{4}$$

en utilisant la première dérivée de la série géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Donc la série converge et a pour somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4}$.

4. Pour préparer les simplifications des numérateurs avec le dénominateur $n!$ on écrit n^4+1 sous la forme

$$a\,n(n-1)(n-2)(n-3) + b\,n(n-1)(n-2) + c\,n(n-1) + d\,n + e$$

Pour ça on développe, ça donne

$$an^4+(b-6a)n^3+(-3b+c+11a)n^2+(-c+d-6a+2b)n+e$$

et on identifie avec n^4+1, pour obtenir un système qui se résout en

$$a=1,\quad b=6,\quad c=7,\quad d=1,\quad e=1$$

donc $n^4+1=n(n-1)(n-2)(n-3)+6n(n-1)(n-2)+7n(n-1)+n+1$ et par conséquent, pour tout $p\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{p}\frac{n^4+1}{n!}\\
&=\sum_{n=0}^{p}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)+6n(n-1)(n-2)+7n(n-1)+n+1}{n!}\\
&=\sum_{n=0}^{p}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n!}+\sum_{n=0}^{p}\frac{6n(n-1)(n-2)}{n!}+\sum_{n=0}^{p}\frac{7n(n-1)}{n!}\\
&\qquad+\sum_{n=0}^{p}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{n!}\\
&=\sum_{n=4}^{p}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n!}+\sum_{n=3}^{p}\frac{6n(n-1)(n-2)}{n!}+\sum_{n=2}^{p}\frac{7n(n-1)}{n!}\\
&\qquad+\sum_{n=1}^{p}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{n!}\\
&=\sum_{n=4}^{p}\frac{1}{(n-4)!}+6\sum_{n=3}^{p}\frac{1}{(n-3)!}+7\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{n!}\\
&=\sum_{n=0}^{p-4}\frac{1}{n!}+6\sum_{n=0}^{p-3}\frac{1}{n!}+7\sum_{n=0}^{p-2}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{p-1}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{n!}\\
&\xrightarrow[p\to+\infty]{}(1+6+7+1+1)\mathrm{e}^1=16\mathrm{e}
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 4.2 *énoncé*

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on peut remarquer que

$$0\leqslant\sum_{k=n+1}^{2n}u_k=\sum_{k=1}^{2n}u_k-\sum_{k=1}^{n}u_k\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k-\sum_{k=1}^{+\infty}u_k=0,$$

donc $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

Puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide de la décroissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$0 \leqslant (2n)u_{2n} = 2\times(n\,u_{2n}) = 2\left(\sum_{k=n+1}^{2n} u_{2n}\right) \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

Bien observer que dans la somme $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_{2n}$, le terme additionné u_{2n} est indépendant de l'indice de sommation k.
Or cet indice va de $n+1$ à $2n$ donc prend n valeurs, donc cette somme vaut n « fois » u_{2n} : $n\times u_{2n}$.

Ensuite, $\sum u_n$ converge, donc $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, et en particulier $u_{2n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$,

$$0 < (2n+1)u_{2n+1} \leqslant (2n+1)u_{2n} = (2n)u_{2n} + u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (2n)u_{2n} &\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0 \\ \text{et } (2n+1)u_{2n+1} &\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

On peut alors conclure que $nu_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

2. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n(u_n - u_{n+1}) &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(nu_n - (n+1)u_{n+1} + u_{n+1}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(nu_n - (n+1)u_{n+1}\right) + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_{n+1} \\ &= u_1 - (\mathrm{N}+1)u_{\mathrm{N}+1} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_{n+1} \quad \textit{(par télescopage)} \\ &= u_1 - (\mathrm{N}+1)u_{\mathrm{N}+1} + \sum_{n=2}^{\mathrm{N}+1} u_n = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}+1} u_n - (\mathrm{N}+1)u_{\mathrm{N}+1} \\ &\xrightarrow[\mathrm{N}\longrightarrow+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \quad \text{C.Q.F.D} \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 4.3 *énoncé*

Première méthode : si $\sum u_n$ converge, alors u_n tend vers 0, donc à partir d'un certain rang, $|u_n| \leqslant 1$, et par conséquent, $|u_n|^2 \leqslant |u_n|$.
Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, et sa série converge, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, ainsi par domination, la suite $\left(u_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, donc $\sum u_n^2$ converge.

Deuxième méthode : on peut aussi remarquer que $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(u_n\right)$ car $\frac{u_n^2}{u_n} = u_n$ et $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$ car $\sum u_n$ converge.
Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, et sa série converge, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, ainsi par domination, la suite $\left(u_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, donc $\sum u_n^2$ converge.

Une correction de l'exercice 4.4 *énoncé*

(1) Par croissances comparées, $\frac{n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, donc la série de terme général $\frac{n}{\ln(n)}$ diverge grossièrement.

(2) $\frac{1}{n} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n\ln(n)}}\right)$, or $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable (Riemann), donc $\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable non plus, ce qui équivaut à la divergence de $\sum \frac{1}{\sqrt{n\ln(n)}}$ car pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{\sqrt{n\ln(n)}} > 0$.

(3) $\frac{1}{2^n - i3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - i}$ et $\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - i} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \frac{1}{-i} = i$, donc

$$\frac{1}{2^n - i3^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

or la suite de terme général $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ est une suite géométrique sommable, donc par domination, la suite de terme général $\frac{1}{2^n-i3^n}$ est aussi sommable, donc $\sum \frac{1}{2^n-i3^n}$ converge.

(4) En bref : $\left|\frac{\sin^2(n)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, donc sommabilité par domination.

(5) En bref : par croissances comparées, $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^3 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc sommabilité par domination.

(6) En bref : par croissances comparées, $\mathrm{e}^{-n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc sommabilité par domination.

(7) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{\cos\left(2\sqrt{n}\right)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2},$$

or $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Riemann sommable, donc par domination la suite $\left(\frac{\cos\left(2\sqrt{n}\right)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi sommable, et (comme la convergence absolue entraîne la convergence) $\sum \frac{\cos\left(2\sqrt{n}\right)}{n^2}$ converge.

(8) Comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n},$$

or la suite de terme général $\frac{1}{n}$ n'est pas sommable, donc par équivalence la suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ n'est sommable non plus, et comme elle est à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

(9) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \left[0\ ;\ \frac{1}{n}\right]$, $\sqrt[3]{3+x^2} \geqslant \sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{1} = 1$, donc

$$0 \leqslant \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{3+x^2}} \leqslant \sqrt{x}$$

d'où par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{3+x^2}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Or le terme dominant ci-dessus est celui d'une suite de Riemann sommable, donc par domination, la suite de terme général $\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{3+x^2}}\mathrm{d}x$ est aussi sommable, donc (comme la convergence absolue entraîne la convergence) est le terme général d'une série convergente.

(10) La série $\sum \frac{(-1)^k}{k^2+1}$ suit *(je ne détaille pas ici la justification que je juge évidente de cette affirmation)* les conditions du critère spécial des séries alternées qui nous permet d'affirmer que

- d'une part elle converge, ce qui nous assure de l'existence de la somme $\mathrm{R}_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$ qui est un reste de la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k^2+1}$;
- et d'autre part tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|\mathrm{R}_n| \leqslant \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2+1}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Riemann sommable, donc par domination la suite de terme général $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$ est aussi sommable, d'où (comme la convergence absolue entraîne la convergence) la convergence de la série de terme général $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$.

Une correction de l'exercice 4.5 *énoncé*

1. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \ln\left((n+1)^a u_{n+1}\right) - \ln\left(n^a u_n\right).$$

Grâce aux propriétés fondamentales du logarithme, on a

$$\begin{aligned} a_n &= a\ln(n+1) + \ln\left(u_{n+1}\right) - a\ln(n) - \ln(u_n) = a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{a}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \end{aligned}$$

et au développement limité

$$\ln(1+\square) \underset{\square\to 0}{=} \square + \mathrm{O}\left(\square^2\right)$$

on obtient

$$\begin{aligned} a_n &\underset{n\to+\infty}{=} a\left(\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \left(\left[-\frac{a}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + \mathrm{O}\left(\left[-\frac{a}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} a\left(\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \left(-\frac{a}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On en déduit par domination que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, donc que $\sum a_n$ converge.

2. On reconnaît dans l'expression de a_n la forme $v_{n+1} - v_n$, donc par la relation suite-série, on déduit de la convergence de $\sum a_n$ que la suite de terme général $v_n = \ln\left(n^a u_n\right)$ converge. En notant ℓ sa limite, on en déduit par composition des limites grâce à la continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ que $n^a u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^\ell$, qui entraîne que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^\ell}{n^a}.$$

Comme $\mathrm{e}^\ell \neq 0$, on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a > 1$.

Une correction de l'exercice 4.6

énoncé

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
&a\ln(n)+b\ln(n+1)+c\ln(n+2)\\
&=a\ln(n)+b\ln\left(n\times\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)+c\ln\left(n\times\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)\\
&=a\ln(n)+b\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)+c\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=}(a+b+c)\ln(n)+b\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+c\left(\frac{2}{n}-\frac{2^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=}(a+b+c)\ln(n)+(b+2c)\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, en notant $u_n=a\ln(n)+b\ln(n+1)+c\ln(n+2)$

- si $a+b+c\neq 0$, alors $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}(a+b+c)\ln(n)\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}\pm\infty$, et $\sum u_n$ diverge grossièrement ;
- si $a+b+c=0$ et $b+2c\neq 0$, alors $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}(b+2c)\frac{1}{n}$, donc par équivalence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable, or elle est de signe contant puisqu'équivalente à une suite de signe constant, donc $\sum u_n$ diverge ;
- si $a+b+c=0$ et $b+2c=0$, alors $u_n\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc par domination $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, donc $\sum u_n$ converge.

Ainsi, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a+b+c=0$ et $b+2c=0$, c'est-à-dire $b=-2c$ et $a=c$.

Dans ce cas, soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n &= c\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}(\ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)) \\
&= c\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\ln(n) - 2\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\ln(n+1) + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\ln(n+2)\right) \\
&= c\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\ln(n) - 2\sum_{n=2}^{\mathrm{N}+1}\ln(n) + \sum_{n=3}^{\mathrm{N}+2}\ln(n)\right) \\
&= c\left(\ln(2) - 2\ln(2) + \sum_{n=3}^{\mathrm{N}}\underbrace{(\ln(n) - 2\ln(n) + \ln(n))}_{=0}\right. \\
&\qquad \left. -2\ln(\mathrm{N}+1) + \ln(\mathrm{N}+1) + \ln(\mathrm{N}+2)\right) \\
&= c\left(\ln(2) - 2\ln(2) + \ln\left(\frac{(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}+2)}{(\mathrm{N}+1)^2}\right)\right) \\
&\xrightarrow[\mathrm{N}\longrightarrow+\infty]{} -c\ln(2) \\
&\textit{(car } \tfrac{(\mathrm{N}+1)(\mathrm{N}+2)}{(\mathrm{N}+1)^2} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\sim} \tfrac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{N}^2} = 1\textit{)}.
\end{aligned}$$

donc dans le cas où la série converge, sa somme vaut $-c\ln(2)$.

Une correction de l'exercice 4.7 *énoncé*

Tout d'abord, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{u_n}{1+u_n} \\
w_n &= \ln(1+u_n) \\
x_n &= \int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^e}.
\end{aligned}$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive, on remarque (par positivité de l'intégrale pour x_n) que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont aussi positives.
Ainsi on peut utiliser les critères de comparaison des séries à termes positifs pour comparer directement les natures des séries correspondantes.

- Si u_n tend vers 0.
  Alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{1} = u_n$, et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0\,;u_n],\quad \frac{1}{1+u_n^e} \leqslant \frac{1}{1+x^e} \leqslant 1$$

alors par croissance de l'intégrale

$$\int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+u_n^e} \leqslant \int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^e} \leqslant \int_0^{u_n} \mathrm{d}\,x$$

c'est-à-dire

$$\frac{u_n}{1+u_n^e} \leqslant x_n \leqslant u_n,$$

d'où u_n étant strictement positif,

$$\frac{1}{1+u_n^e} \leqslant \frac{x_n}{u_n} \leqslant 1,$$

ce dont on déduit que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Ainsi par le critère d'équivalence des séries à termes positifs les séries correspondantes sont de même nature.

➡ Si u_n ne tend pas vers 0, comme $u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$, et $u_n = \mathrm{e}^{w_n} - 1$, on peut en déduire (par l'absurde) que v_n et w_n ne tendent pas non plus vers 0, donc les trois séries divergent grossièrement, et en particulier sont de même nature.

Enfin, puisque u_n est strictement positif et ne tend pas vers 0, il existe $m > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant m$.

Dans ce cas, encore par croissance de l'intégrale

$$x_n = \int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^e} = \int_0^{m} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^e} + \int_m^{u_n} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^e} \geqslant \int_0^{m} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^e}.$$

Mais par stricte positivité de l'intégrale, $\int_0^m \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^e} > 0$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas tendre non plus vers 0.

En conclusion, dans le cas où u_n ne tend pas vers 0, les quatre séries sont grossièrement divergentes, donc sont de même nature.

Une correction de l'exercice 4.8 *énoncé*

1. $\sum u_n$ est le produit de Cauchy de $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n!}$, ces deux séries sont absolument convergentes, donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right) \qquad = \frac{\pi^2}{6} \times e^1.$$

2. $v_n = (n+1)3^{-n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$, donc
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\\ &= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)^2) = \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 4.9 *énoncé*

Ces deux séries vérifient le critère spécial des séries alternées, donc elles convergent, et leur somme est comprise entre deux sommes partielles consécutives S_{n-1} et S_n.
Ainsi ces deux sommes donnent un encadrement de longueur ε de la somme de la série dès que $\left|S_n - S_{n-1}\right|$, c'est-à-dire $|u_n|$, est inférieur à ε.

1. Pour $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$,
$$\begin{aligned}|u_n| \leqslant 10^{-2} &\Leftrightarrow \frac{1}{n+2} \leqslant 10^{-2}\\ &\Leftrightarrow n \geqslant 98,\end{aligned}$$
donc on a un encadrement de longueur 10^{-2} avec
$$\sum_{n=0}^{97} \frac{(-1)^n}{n+2} \simeq \textbf{??}$$
*(avec Python : **??**)*

et
$$\sum_{n=0}^{98} \frac{(-1)^n}{n+2} \simeq \textbf{??}$$
*(avec Python : **??**)*

2. Pour $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

$$\begin{aligned} |u_n| \leqslant 10^{-2} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 10^{-2} \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 10^4, \end{aligned}$$

donc on a un encadrement de longueur 10^{-2} avec

$$\sum_{n=0}^{9\,999} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \simeq \textbf{??}$$

(avec Python : ***??****)*

et

$$\sum_{n=0}^{10\,000} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \simeq \textbf{??}$$

(avec Python : ***??****)*

Une correction de l'exercice 4.10

énoncé

Grâce au développement limité $\ln(1+\square) \underset{n\to+\infty}{=} \square - \frac{1}{2}\square^2 + o\left(\square^2\right)$, on a en particulier

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \text{ et } \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$$

Attention ! Les critères de comparaison (équivalence, domination) ne permettent de comparer que les ***sommabilités*** *des suites, et non directement la nature des séries concernées !*
Bien entendu,

- *dans le cas où les suites sont sommables, les séries correspondantes sont convergentes ;*
- *ou bien si les termes généraux que l'on compare sont de signe constant à partir d'un certain rang (a fortiori lorsqu'elles sont à termes positifs) la sommabilité* ***équivaut*** *à la convergence de la série correspondante.*

Mais pour des suites de signe indéterminé, on ne peut pas conclure ! Par exemple $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *ne permet pas de conclure que, sous prétexte que* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge ! C'est le cas en prenant* $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ *comme on va le voir ci-dessous.*
La méthode consiste alors à enrichir l'équivalent en un petit développement asymptotique à deux termes.

1. $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ or
   - la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée convergente grâce au critère spécial des séries alternées,
   - et $-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$ n'est pas sommable et négative à partir d'un certain rang, donc $\sum \left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ diverge,

   par conséquent, on peut conclure que $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge par contraposée de la linéarité (proposition 4.7 (2)).
2. $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
   - or la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée convergente,
   - et $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ définit une suite sommable par domination, donc a fortiori est le terme général d'une série convergente,

   ainsi par linéarité $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

Une correction de l'exercice 4.11 *énoncé*

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n n^b}$, et rappelons qu'il est supposé que a et b sont deux réels distincts.

Si $a < b$: alors $n^a \underset{n\to+\infty}{=} o(n^b)$ donc

$$n^a + (-1)^n n^b \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n^b$$

$$\text{donc } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^b}.$$

Ainsi,

- d'une part u_n est positive à partir d'un certain rang, donc $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable,
- et par comparaison, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, $\left(\frac{1}{n^b}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est aussi, c'est-à-dire si, et seulement si, $b > 1$.

Donc si $a < b$, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $b > 1$.

Si $a > b$: alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^a}.$$

Attention ! Les critères de comparaison (équivalence, domination) ne permettent de comparer que les ***sommabilités*** *des suites, et non directement la nature des séries concernées !*
Bien entendu,

- *dans le cas où les suites sont sommables, les séries correspondantes sont convergentes ;*
- *ou bien si les termes généraux que l'on compare sont de signe constant à partir d'un certain rang (a fortiori lorsqu'elles sont à termes positifs) la sommabilité* ***équivaut*** *à la convergence de la série correspondante.*

Mais pour des suites de signe indéterminé, on ne peut pas conclure ! Par exemple $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ne permet pas de conclure que, sous prétexte que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, alors $\sum u_n$ converge ! C'est le cas en prenant $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ comme on va le voir ci-dessous.
La méthode consiste alors à enrichir l'équivalent en un petit développement asymptotique à deux termes.

Plus précisément,

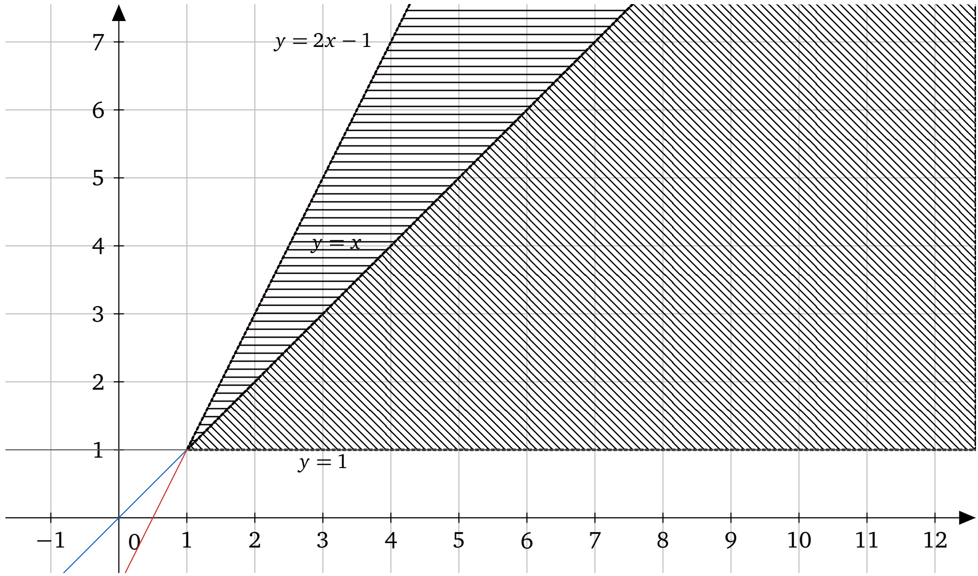
$$
\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^a} \times \frac{1}{1+(-1)^n n^{b-a}} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^a} \times \left(1-(-1)^n n^{b-a} + o\left(n^{b-a}\right)\right) \quad \textit{(car } b-a<0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{donc } (-1)^n n^{b-a} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0\textit{)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^a} \times \left(1-\frac{(-1)^n}{n^{a-b}} + o\left(\frac{1}{n^{a-b}}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{n^{2a-b}} + o\left(\frac{1}{n^{2a-b}}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^a} + r_n \ \textit{avec } r_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n^{2a-b}} + o\left(\frac{1}{n^{2a-b}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^{2a-b}}.
\end{aligned}
$$

Ainsi :

- si $a \leqslant 0$, alors u_n ne tend pas vers 0, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement ;
- si $a > 0$, alors par le critère spécial des séries alternées $\sum \frac{(-1)^n}{n^a}$ converge, donc (par linéarité, prop 4.6) $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum r_n$ converge.
  Or $r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^{2a-b}}$, donc :
  - d'une part r_n est négatif à partir d'un certain rang, donc $\sum r_n$ converge si, et seulement si, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable,
  - et par comparaison, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, $\left(\frac{1}{n^{2a-b}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est aussi, c'est-à-dire si, et seulement si, $2a-b>1$,

  donc finalement $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $2a-b>1$.

En synthèse, la suite $\sum u_n$ converge si, et seulement si, le point de cordonnées (a, b) appartient à la réunion des deux domaines ci-dessous, les trois demi-droites étant exclues.



Une correction de l'exercice 4.12

énoncé

(1) On pose

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^n \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \\ &= (-1)^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

alors

- la série $\sum u_n$ est alternée ;
- Pour tout $n \geqslant 2$,

$$|u_n| = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$$
$$\text{et } \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < 1,$$

  donc $|u_{n+1}| < |u_n|$, ce qui prouve que la suite $(|u_n|)_{n \geqslant 2}$ est décroissante ;
- pour tout $n \geqslant 2$,

$$|u_n| \leqslant \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} = \mathrm{e}^{(n-1)\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

or

$$(n-1)\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\sqrt{n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} -\infty$$

donc

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} = \mathrm{e}^{(n-1)\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$$

d'où par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

➟ Ainsi par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_n$ converge.

(2) Comme $\tan(\square) \underset{\square\to 0}{\sim} \square$,

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\times\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

d'où la convergence absolue de la série.

Une correction de l'exercice 4.13 *énoncé*

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
u_n - u_{n+1} &= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right) - \ln(n) - \left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}\right) + \ln(n+1)\\
&= \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\\
&= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\times\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{n}\right)}\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) - \frac{1}{n}\times\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)+o\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

donc on obtient $u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

2. Sachant que la suite de terme général $\frac{1}{n^2}$ est sommable, on en déduit par le critère

d'équivalence que $(u_n - u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi sommable, donc que la série $\sum(u_n - u_{n+1})$ est convergente.

3. La relation suite-série permet d'en déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. D'où en notant γ sa limite, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1) \\ \text{c'est-à-dire } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n) &\underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1) \\ \text{autrement dit } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} &\underset{n\to+\infty}{=} \gamma + \ln(n) + o(1). \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 4.14

énoncé

1. Grâce au développement limité en 0 de sin :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{n}\right)^3 + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^4\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{n}\right)^3 + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^4\right). \end{aligned}$$

2. Donc

$$u_n = (-1)^n n^\alpha \left[\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right] \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{6} \times \frac{1}{n^{3-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{4-\alpha}}\right).$$

Par conséquent :

- si $\alpha \geqslant 3$, alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^{3-\alpha}} = \frac{1}{6} n^{\alpha-3}$, donc u_n ne tend pas vers 0, et $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- si $\alpha < 3$, alors
  - $\sum \frac{(-1)^n}{6} \times \frac{1}{n^{3-\alpha}}$ converge par le critère spécial des séries alternées,
  - et $o\left(\frac{1}{n^{4-\alpha}}\right)$ est le terme général d'une série convergente par domination car $4 - \alpha > 1$,

  ainsi $\sum u_n$ converge.

Une correction de l'exercice 4.15 *énoncé*

On est censé savoir que $\left|1-\sqrt{2}\right|<1$.
On en déduit que $\left(1-\sqrt{2}\right)^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$ et que la suite géométrique de terme général $\left(1-\sqrt{2}\right)^n$ est sommable.
Ainsi $\sin\left(\pi\left(1-\sqrt{2}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\pi(1-\sqrt{2}\right)^n$, ce qui donne par équivalence la sommabilité de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Ensuite, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{2}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt{2}\right)^k = 1+n\sqrt{2}+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{2}\right)^{k-2}\\ &= 1+n\sqrt{2}+2\times\square,\text{où } \square\in\mathbb{Z},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}u_n=\sin\left(\pi\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right) &= \sin\left(\left(1+n\sqrt{2}+2\times\square\right)\pi\right)\\ &= \sin\left(n\sqrt{2}\pi+(1+2\times\square)\,\pi\right)\\ &= -\sin\left(n\sqrt{2}\pi\right).\end{aligned}$$

Mais on peut prouver de même que

$$v_n=\sin\left(\pi\left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)=\sin\left(n\sqrt{2}\pi\right).$$

Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=-u_n$, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tout aussi sommable que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Une correction de l'exercice 4.17 *énoncé*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante dont la série converge.

1. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 0$, puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Exhiber une suite positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la série converge, mais qui n'est pourtant pas dominée par $\frac{1}{n}$.

1. La série $\sum u_n$ converge, donc le reste $\mathrm{R}_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

   ➟ En particulier $\mathrm{R}_{n-1}-\mathrm{R}_{2n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.
   Or

$$\mathrm{R}_{n-1}-\mathrm{R}_{2n}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k-\sum_{k=2n+1}^{+\infty}u_k=\sum_{k=n+1}^{2n}u_k,$$

et comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, les n termes de cette somme sont supérieurs à u_n, d'où

$$\mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_{2n} = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geqslant n \times u_{2n}.$$

Ainsi, la suite étant positive, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant (2n)\, u_{2n} \leqslant 2\left(\mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_{2n}\right),$$

donc par encadrement, $\boxed{(2n)\, u_{2n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.}$

- En considérant $\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{2n+1}$, on montre de la même manière que

$$(2n)\, u_{2n+1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

donc en ajoutant u_{2n+1} qui tend aussi vers 0, puisque la série de terme général u_n converge, on obtient que $\boxed{(2n+1)\, u_{2n+1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.}$

- Ses suites extraites des termes de rang pair d'une part, et de rang impair d'autre part, convergent vers 0, donc la suite de terme général nu_n tend aussi vers 0.
Ainsi que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, et qui peut le plus peut le moins, donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. On comprend d'après la question précédente qu'on doit prendre une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive, qui tend vers 0 (condition nécessaire de convergence de la série), mais qui n'est pas monotone.

> *Parmi les préjugés de l'élève Chaprot au sujet des suites, il y le suivant, qui s'avère tenace : « toute suite positive qui tend vers 0 est forcément décroissante à partir d'un certain rang. »*
> *L'exemple qui suit sera aussi un contre-exemple de cette fausse généralité.*

- Notons $\mathbb{M}$ l'ensemble des entiers au cube, c'est-à-dire

$$\mathbb{M} = \left\{p^3 \mid p \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N}^*,\, n = p^3\right\},$$

et considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général u_n vaut

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } n \in \mathbb{M}, \\[2ex] \dfrac{1}{n^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{\substack{n=1\\ n\in\mathbb{M}}}^{N} u_n + \sum_{\substack{n=1\\ n\notin\mathbb{M}}}^{N} u_n \quad \textit{(grâce à l'associativité de l'addition dans une somme finie)}\\ &= \sum_{p=1}^{\lfloor N^{1/3}\rfloor} \frac{1}{\sqrt{p^3}} + \sum_{\substack{n=1\\ n\notin\mathbb{M}}}^{N} \frac{1}{n^2}\\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor N^{1/3}\rfloor} \frac{1}{p^{3/2}} + \sum_{\substack{n=1\\ n\notin\mathbb{M}}}^{N} \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

- La première somme est une somme partielle de la série de Riemann $\sum \frac{1}{p^{3/2}}$ qui converge, donc elle a une limite finie quand N tend vers $+\infty$,
- et la deuxième est une somme partielle d'une série dont le terme général est soit nul soit $\frac{1}{n^2}$, donc positif est majoré par $\frac{1}{n^2}$. Ainsi par domination, la deuxième somme aussi est une somme partielle d'une série convergente, donc admet une limite finie quand N tend vers $+\infty$.

Par conséquent $\sum_{n=0}^{N} u_n$ a une limite finie quand N tend vers $+\infty$, donc

$$\boxed{\text{la série à termes positifs } \sum u_n \text{ converge.}}$$

- De la suite de terme général $v_n = n\,u_n$, on peut extraire la suite des $v_{n^3} = n^3\,u_{n^3} = n^3 \times \frac{1}{\sqrt{n}} = n^2$. Cette suite extraite tend vers $+\infty$, donc la suite de terme général $v_n = \frac{u_n}{\frac{1}{n}}$ n'est pas bornée, ce qui prouve que

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas dominée par } \left(\tfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.}$$

Une correction de l'exercice 4.18

énoncé

Notons $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sommable, soit par le critère de d'Alembert avec

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0,$$

soit par domination par $\frac{1}{(n-1)!}$.

Ainsi on est sûr que pour tout $N \in \mathbb{N}$, la somme $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} u_n$ existe.

➟ On est ici dans le cas d'une suite positive qui tend assez rapidement vers 0 pour que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende vers 0.
Ainsi

$$\sum_{n=N}^{+\infty} u_n = u_N + \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = u_N \left(1 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{u_n}{u_N}\right).$$

Pour pouvoir conclure que $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} u_n \underset{N\to+\infty}{\sim} u_N$ il suffit de montrer que $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{u_n}{u_N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.
Prenons un réel $\varepsilon > 0$.
Alors, comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$, (rappelons que tous les u_n sont positifs).
Ainsi pour tout entier $N \geqslant n_0$ et tout $p \geqslant 1$, par un produit télescopique,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{u_{N+p}}{u_N} &= \frac{u_{N+1}}{u_N} \times \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \times \cdots \times \frac{u_{N+p}}{u_{N+p-1}} \\ &\leqslant \underbrace{\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) \times \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)}_{p \text{ termes}} = \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^p. \end{aligned}$$

On choisit à présent $\varepsilon < 1$, de façon à ce que $\left|\frac{1}{2}\varepsilon\right| < 1$, pour que la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^p$ soit convergente. On sait en outre *(n'hésitons pas à utiliser l'expression « en outre » qui est malheureusement en voie de disparition, à l'instar de sa quasi-homonyme la loutre. D'ailleurs « à l'instar » aussi est en voie de disparition… Quelle époque !…)* que $\sum u_n$ converge, donc par prolongement des inégalités larges à la limite,

$$0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{u_n}{u_N} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{u_{N+p}}{u_N} \leqslant \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^p = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}.$$

Remarquons que l'élève Chaprot aurait commis ci-dessus l'erreur de ne pas prêter garde à la borne inférieure de la somme, ce qui lui aurait fait confondre la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

avec la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x \times \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = x \times \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Or puisque $0 < \varepsilon < 1$, on a $2-\varepsilon > 1$, donc $\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} < \varepsilon$.
Ainsi on a prouvé que pour $0 < \varepsilon < 1$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $\mathrm{N} \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant \frac{\sum\limits_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} u_n}{u_\mathrm{N}} \leqslant \varepsilon.$$

Ceci prouve par définition de la limite d'une suite que

$$\frac{\sum\limits_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} u_n}{u_\mathrm{N}} \xrightarrow[\mathrm{N}\longrightarrow+\infty]{} 0$$

et boucle notre raisonnement.

Une correction de l'exercice 4.19 *énoncé*

Posons $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$, continue et strictement positive sur $\mathrm{I} =]-1\,;+\infty[$, et $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, la primitive de f sur I qui s'annule en 0. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur I, donc réalise une bijection continue (et même $\mathscr{C}^1$) de I sur $]\lim_{-1}\mathrm{F}\,;\lim_{+\infty}\mathrm{F}[$. Par définition,

$$v_n = \mathrm{F}(u_n) \quad \text{donc} \quad u_n = \mathrm{F}^{-1}(v_n).$$

1. Si $u_n \to 0$, alors par continuité de F, $v_n = \mathrm{F}(u_n) \to \mathrm{F}(0) = 0$.
   De même si $v_n \to 0$, alors par continuité de F^{-1}, $u_n = \mathrm{F}^{-1}(v_n) \to \mathrm{F}^{-1}(0) = 0$.
2. Par (a), l'une diverge grossièrement si et seulement si l'autre diverge grossièrement. Supposons donc que les deux tendent vers 0.

Le développement limité à l'ordre 1 de F en 0 donne $v_n = \mathrm{F}(u_n) = u_n + o(u_n)$ puisque $\mathrm{F}(0) = 0$ et $\mathrm{F}'(0) = f(0) = 1$. Donc les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, et comme elles sont à termes positifs, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

3. La réponse est non (l'équivalent de (b) est toujours valable, mais ne permet plus de conclure a priori) : on le voit en poursuivant le DL de F en 0. Après calcul des premières dérivées de f, on a $\mathrm{F}''(0) = f'(0) = 0$, $\mathrm{F}'''(0) = f''(0) = 0$ et $\mathrm{F}^{(4)}(0) = f'''(0) = -6$, donc par formule de Taylor-Young,

$$\mathrm{F}(x) = x - \frac{1}{4}x^4 + \mathrm{O}\left(x^5\right)$$

en 0. Posons alors $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/4}}$ et

$$v_n = \mathrm{F}(u_n) = \frac{(-1)^n}{n^{1/4}} - \frac{1}{4n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right).$$

La série $\sum u_n$ converge par critère spécial des séries alternées, et la série $\sum v_n$ est la somme de la série convergente $\sum u_n$, de la série divergente $-\frac{1}{4}\sum \frac{1}{n}$, et d'une série (absolument) convergente d'après le critère de Riemann, donc la série $\sum v_n$ diverge.

Une correction de l'exercice 4.20

énoncé

1. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, notons $\mathrm{S_N}$ la somme partielle $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n$.

   Alors pour tout entier N, en séparant les termes de la somme par groupes de trois termes consécutifs

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{3\mathrm{N}+2} &= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}}(u_{3k} + u_{3k+1} + u_{3k+2}) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\left(\frac{2}{\ln(k+3)} - \frac{1}{\ln(k+3)} - \frac{1}{\ln(k+3)}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} 0 = 0,\end{aligned}$$

   donc $\mathrm{S}_{3\mathrm{N}+2} = 0 \xrightarrow[\mathrm{N}\longrightarrow+\infty]{} 0$.

   Puis pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{S}_{3\mathrm{N}+1} = \mathrm{S}_{3\mathrm{N}+2} - u_{3\mathrm{N}+2} = 0 - \frac{1}{\ln(\mathrm{N}+3)} \xrightarrow[\mathrm{N}\longrightarrow+\infty]{} 0,$$

$$\mathrm{S}_{3\mathrm{N}} = \mathrm{S}_{3\mathrm{N}+2} - u_{3\mathrm{N}+2} - u_{3\mathrm{N}+1} = 0 - \frac{2}{\ln(\mathrm{N}+3)} \xrightarrow[\mathrm{N}\longrightarrow+\infty]{} 0,$$

   ainsi les trois suites extraites $(\mathrm{S}_{3\mathrm{N}})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$, $(\mathrm{S}_{3\mathrm{N}+1})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{S}_{3\mathrm{N}+2})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0, et ces trois suites regroupent tous les termes de la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$, donc $S_N \xrightarrow[N\longrightarrow+\infty]{} 0$, ce qui prouve que la série $\sum u_n$ converge, et a pour somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$.

2. *La suite de terme général $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est un exemple de suite de réels* (sans condition sur la positivité des termes) *pour laquelle $\sum a_n$ converge grâce au critère spécial des séries alternées, tandis que $\sum a_n^2 = \sum \frac{1}{n}$ diverge.*

Supposons que $\sum a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.
Comme $\sum a_n$ converge, il est nécessaire que $a_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, donc à partir d'un certain rang $a_n \leqslant 1$, et par conséquent $a_n^2 \leqslant a_n$.

Attention à la croyance que les réels sont plus petits que leurs carrés : c'est faux pour les réels de $[0\,;1]$ *!*

Mais alors par domination, la suite $\left(a_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi sommable, donc $\sum a_n^2$ converge.

3. Soit p un entier supérieur ou égal à 2.
On reprend les idées de la question (a), cette fois pour minorer S_{3n-1}, en minorant 2^p-2 par 2 : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
S_{3n-1} &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2^p}{[\ln(i+3)]^p}+\frac{(-1)^p}{[\ln(i+3)]^p}+\frac{(-1)^p}{[\ln(i+3)]^p}\right)\\
&\geqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2^p}{[\ln(i+3)]^p}-\frac{1}{[\ln(i+3)]^p}-\frac{1}{[\ln(i+3)]^p}\right)\\
&\geqslant \sum_{i=0}^{n-1}\frac{2}{[\ln(i+3)]^p}.
\end{aligned}$$

Or par croissances comparées $\frac{1}{i} \underset{i\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{[\ln(i+3)]^p}\right)$, donc la suite $\left(\frac{1}{[\ln(i+3)]^p}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable, et comme elle est positive, la série $\sum_i \frac{1}{[\ln(i+3)]^p}$ diverge, et le théorème de la limite monotone nous permet d'affirmer que

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2}{[\ln(i+3)]^p} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty,$$

donc par comparaison $S_{3n-1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, ce qui empêche la série de converger.