Exercice 11.1

Une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{4}{k}\mathbb{P}(X = k-1).$$

Trouver $\mathbb{P}(X = 0)$, puis la loi de X.

Exercice 11.2

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n+2) = 5\mathbb{P}(X = n+1) - \mathbb{P}(X = n)$. Déterminer la loi de X.

Exercice 11.3

Si X suit une loi géométrique, comparer la probabilité que X soit pair, et la probabilité que X soit impair.
Faire la même chose dans le cas où X suit une loi de Poisson.

Exercice 11.4

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que pour tout entier $n > \lambda - 1$,

$$\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \mathbb{P}(X = n) \times \frac{n+1}{n+1-\lambda}.$$

2. En déduire que $\mathbb{P}(X \geqslant n) \underset{n\to\infty}{\sim} \mathbb{P}(X = n)$, puis $\mathbb{P}(X > n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\mathbb{P}(X = n))$.

Exercice 11.5 – Oral CCINP

On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X_n le rang du premier tirage où l'on obtient une boule différente de la première boule tirée.

1. Justifier que X_n est bien une variable aléatoire discrète et donner sa loi.
2. On note Y_n le rang du premier tirage à l'issue duquel toutes les boules ont été tirées au moins une fois. Donner la loi de Y_2 puis celle de Y_3.

(mis à jour le 18 octobre 2024)

Exercice 11.6 – (*) Quelques applications pratiques

1. Sachant qu'il y a en moyenne une faute toutes les deux pages dans un cours de six cents pages, quelle est la probabilité qu'il y ait effectivement une erreur dans une page donnée ?
2. Sachant qu'il y a en moyenne cinq défauts sur cent mètres de tissus et que le tissu est débité en coupons de trois mètres, quelle est la proportion de coupons sans défaut que l'on peut espérer ?
3. Par un soir d'été on observe en moyenne une étoile filante toutes les dix minutes. Quelle est la probabilité d'en observer deux en un quart d'heure ?

Exercice 11.7

Soient $p \in]0\,;1[$, et $q = 1-p$. On effectue des lancers successifs d'une pièce qui donne *Pile* avec la probabilité p, et *Face* avec la probabilité q.

1. Donner la loi de probabilité de la variable X qui donne le nombre de *Face* obtenus avant le premier *Pile*.

Soient deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant la loi obtenue dans la question précédente.
On considère les variables $Z = \sup(X, Y)$ et $T = \inf(X, Y)$.

2. Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $\mathbb{P}((Z = m) \cap (T = n))$ *(on pourra distinguer les cas $m > n$, $m < n$, et $m = n$).*
3. En déduire la loi de la variable aléatoire Z.

Exercice 11.8

On lance indéfiniment une pièce équilibrée, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note P_k (*resp.* F_k) l'événement « obtenir pile (*resp.* face) au $k^{\text{ème}}$ lancer ».
On note T la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k, et qui prend la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

(Par exemple, la séquence $F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4 \cap F_5$ réalise l'événement $(T = 5)$.)

1. Préciser $T(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}(T = 2)$ et $\mathbb{P}(T = 3)$.
2. (a) Soit $k \geqslant 3$, écrire $(T = k)$ comme réunion de $k-1$ événements incompatibles deux à deux et en déduire $\mathbb{P}(T = k)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(T = 0)$. Interpréter le résultat.

3. (a) Soit $k \geqslant 3$. Montrer que si le premier lancer donne pile, alors l'événement $P_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap F_k$ est réalisé si et seulement si $(T = k)$ est aussi réalisé.
   (b) En déduire avec la formule des probabilités totales que
$$\mathbb{P}(T = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T = k-1) + \frac{1}{2^k}$$
   (c) Retrouver la loi de T obtenue en question 2.

Exercice 11.9 – Oral Centrale

Une urne contient n boules numérotées que l'on pioche une à une avec remise, jusqu'à obtenir une deuxième fois une boule déjà tirée. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Soit $i \in [\![2 \ ; n+1]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}(X > i \mid X > i-1)$.
2. Soit $k \in [\![1 \ ; n+1]\!]$. Montrer que $\mathbb{P}(X > k) = \prod_{i=2}^{k} \mathbb{P}(X > i \mid X > i-1)$.
3. Donner la loi de X.

Exercice 11.10

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ de paramètre $p \in]0 \ ; 1[$. Soit Y la variable aléatoire égale à $X/2$ si X est pair, à 0 sinon. Déterminer la loi de Y.

Exercice 11.11

On effectue une suite de lancers avec une pièce qui donne « Pile » avec la probabilité p, où $0 < p < 1$. On note X la longueur de la première « série » de lancers identiques, et Y la longueur de la deuxième « série ».

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. En déduire la loi de Y.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 11.12

Soit (X, Y) un couple aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, tel que
$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X = m) \cap (Y = n)) = \frac{k}{(n+m+1)!}.$$
Déterminer la loi de $Z = X + Y$ et en déduire le calcul de k.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 11.13

Une variable aléatoire N suit la loi de Poisson $P(\lambda)$, où $\lambda \in]0,+\infty[$.
On considère une variable X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(N=n)$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. On note $Y = N - X$.

1. Montrer que X suit $P(p\lambda)$.
2. Quelle est la loi de Y ?
3. Donner la loi conjointe de X et Y.
4. Sont-elles indépendantes ?

Exercice 11.14

Soient n un entier strictement positif, X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$ puis $\mathbb{P}(X \geqslant Y)$.
2. Déterminer la loi de $D = X - Y$.

Exercice 11.15 – ENS

1. Soient $\varepsilon > 0$, et pour tout $\lambda \in]0\,;+\infty[$, soit X_λ une variable suivant la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Montrer que $P(|X_\lambda - \lambda| \geqslant \varepsilon\lambda) \xrightarrow[\lambda\longrightarrow+\infty]{} 0$.
2. Soient, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*, A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer la limite, lorsque $\lambda \to +\infty$, de la probabilité que le polynôme $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ ait toutes ses racines réelles.

Exercice 11.16

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que $X \leqslant Y$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de X par rapport à l'événement $(Y=n)$ est la loi uniforme sur $[\![1\,;\,n]\!]$.
Montrer que $Y - X + 1$ et X suivent la même loi.

Exercice 11.17 – Oral Centrale

Soit $(X_i)_{0\leqslant i\leqslant n+1}$ une famille de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes, qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0\,;\,1[$.
Pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, on pose $Y_k = \left(X_k - X_{k+1}\right)^2$.
Déterminer la loi des variables Y_k, et étudier si $(Y_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes.

Solutions

Une correction de l'exercice 11.1 *énoncé*

1. De la relation de récurrence $\mathbb{P}(X=k)=\frac{4}{k}\mathbb{P}(X=k-1)$, qui est valable pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on conjecture que pour tout $k\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{4}{k}\times\frac{4}{(k-1)}\times\cdots\times\frac{4}{1}\mathbb{P}(X=0)=\frac{4^k}{k!}\mathbb{P}(X=0),$$

et on dit qu'on le prouve par récurrence.

2. X est une variable aléatoire donc $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=1$. Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4^k}{k!}\mathbb{P}(X=0)=1\\ \Longleftrightarrow \mathbb{P}(X=0)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4^k}{k!}=1\\ \Longleftrightarrow \mathbb{P}(X=0)\times \mathrm{e}^4=1\\ \Longleftrightarrow \mathbb{P}(X=0)=\mathrm{e}^{-4}.\end{aligned}$$

3. On récapitule donc que $X(\Omega)=\mathbb{N}$, et que $\mathbb{P}(X=n)=\frac{\mathrm{e}^{-4}4^n}{n!}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, où l'on reconnaît une loi de Poisson de paramètre 4.

Une correction de l'exercice 11.2 *énoncé*

La suite de terme général $u_n=\mathbb{P}(X=n)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique $x^2-5x+1=0$ a pour discriminant 21 et pour solutions $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

On en déduit qu'il existe deux réels λ et μ qui vérifient pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X=n)=\lambda\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n+\mu\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^n.$$

Il faut
- d'une part que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n)$ soit positif ;
- d'autre part, que $\sum\mathbb{P}(X=n)$ soit une série convergente de somme 1.

La première condition est vérifiée dès que λ et μ sont positifs.

De plus, en remarquant que $4<\sqrt{21}<5$, on prouve que $0<\frac{5-\sqrt{21}}{2}<1<\frac{5+\sqrt{21}}{2}$. Donc on sait que la série $\sum\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n$ est convergente, et que $\sum\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^n$ est divergente. Ainsi $\sum \mathbb{P}(X=n)$ n'est convergente que si $\mu=0$.
Du coup $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)=1$ donne $\lambda\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n=1$, d'où grâce aux séries géométriques $\lambda=1-\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)=\frac{\sqrt{21}-3}{2}$.
Ainsi

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ \mathbb{P}(X=n)=\frac{\sqrt{21}-3}{2}\times\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n$$

$$\text{soit }\ \mathbb{P}(X=n)=p(1-p)^n \text{ avec } p=\frac{\sqrt{21}-3}{2}.$$

On en déduit que la variable $X+1$ à pour ensemble de valeurs $\mathbb{N}^*$, et que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, comme $k-1\in\mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(X+1=k)=\mathbb{P}(X=k-1)=p(1-p)^{k-1},$$

donc $X+1$ suit la loi géométrique de paramètre $p=\frac{\sqrt{21}-3}{2}$.

Une correction de l'exercice 11.3

énoncé

1. Supposons que X suit $\mathcal{G}(p)$, alors $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, donc

$$\text{« X est pair »}=\bigcup_{k=1}^{+\infty}(X=2k)$$

donc par $\sigma-$additivité de la probabilité :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{« X est pair »}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-1} p \\
&= p(1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-2} \\
&= p(1-p) \sum_{k=0}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^k \\
&= p(1-p) \times \frac{1}{1-(1-p)^2} \quad \textit{(on suppose } p \in]0\,;1[\textit{, donc } \left|(1-p)^2\right| < 1\textit{)} \\
&= p(1-p) \times \frac{1}{p(2-p)} = \frac{1-p}{2-p}.
\end{aligned}$$

et comme « X est impair »$=\overline{\text{« X est pair »}}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{« X est impair »}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{« X est pair »}) \\
&= 1 - \frac{1-p}{2-p} = \frac{1}{2-p}.
\end{aligned}$$

ou comme ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{« X est impair »}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{2k} p \\
&= p \sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^k \\
&= p \times \frac{1}{1-\left((1-p)^2\right)} \quad \textit{(en supposant } p \in]0\,;1[\textit{, donc } \left|(1-p)^2\right| < 1\textit{)} \\
&= p \times \frac{1}{2p-p^2} = \frac{1}{2-p}.
\end{aligned}$$

Ainsi la différence des deux donne $\frac{1-p}{2-p} - \frac{1}{1-p} = \frac{-p}{2-p} < 0$, d'où

$$\mathbb{P}(\text{« X est impair »}) > \mathbb{P}(\text{« X est pair »}).$$

2. Si X suit $\mathscr{P}(\lambda)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{« X est pair »}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \quad \textit{(ceci est la somme des termes d'indices pairs de la suite } \left(\tfrac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}\textit{)} \\
&= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} 1 \times \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} 0 \times \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \quad \textit{(en rajoutant zéro fois les termes impairs, ça ne change rien)} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \square \times \frac{\lambda^n}{n!} \quad \left(\textit{avec } \square = \begin{cases} 1 & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ 0 & \textit{si } n \textit{ est impair} \end{cases} \right) \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \left(\tfrac{1+(-1)^n}{2} \textit{ joue très bien le rôle de } \square \right) \\
&= e^{-\lambda} \times \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \right) \\
&= e^{-\lambda} \times \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \\
&= e^{-\lambda} \operatorname{ch}(\lambda).
\end{aligned}$$

De même, $\mathbb{P}(\text{« X est impair »}) = e^{-\lambda} \operatorname{sh}(\lambda)$.
Ici la différence des deux donne $e^{-2\lambda}$, donc

$$\mathbb{P}(\text{« X est impair »}) < \mathbb{P}(\text{« X est pair »}).$$

Une correction de l'exercice 11.4 *énoncé*

1. Soit n un entier strictement supérieur à $\lambda - 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant n) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=n}^{+\infty}(X=i)\right) &= \sum_{i=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i) = \sum_{i=n}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\ &= \sum_{i=n}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \times \frac{\lambda^{i-n}n!}{i!} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\sum_{i=n}^{+\infty}\frac{\lambda^{i-n}n!}{i!} = \mathbb{P}(X=n)\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i n!}{(i+n)!} \\ &= \mathbb{P}(X=n)\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{(i+n)(i+n-1)\cdots(1+n)}\end{aligned}$$

or pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, $(i+n)(i+n-1)\cdots(1+n) \geqslant (n+1)^i > 0$, d'où

$$0 \leqslant \frac{\lambda^i}{(i+n)(i+n-1)\cdots(1+n)} \leqslant \frac{\lambda^i}{(n+1)^i} = \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^i.$$

Or par hypothèse $0 < \frac{\lambda}{n+1} < 1$, donc la série de terme général $\left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^i$ converge, d'où par prolongement des inégalités larges à la limite,

$$\begin{aligned}0 \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{(i+n)(i+n-1)\cdots(1+n)} &\leqslant \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^i \\ &= \frac{1}{1-\frac{\lambda}{n+1}} = \frac{n+1}{n+1-\lambda},\end{aligned}$$

ce qui donne, à condition de multiplier les deux membres de cette inégalité par le réel positif $\mathbb{P}(X=n)$ la conclusion voulue.

2. Or d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant n) = \sum_{i=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i) &= \mathbb{P}(X=n) + \sum_{i=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i) \\ &\geqslant \mathbb{P}(X=n)\end{aligned}$$

donc grâce à la question précédente, pour $n > \lambda - 1$, comme $\mathbb{P}(X=n) > 0$ on en déduit que :

$$1 \leqslant \frac{\mathbb{P}(X \geqslant n)}{\mathbb{P}(X=n)} \leqslant \frac{n+1}{n+1-\lambda}$$

donc par encadrement

$$\frac{\mathbb{P}(X \geqslant n)}{\mathbb{P}(X = n)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1$$

ce qui prouve que $\mathbb{P}(X \geqslant n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathbb{P}(X = n)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(X \geqslant n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathbb{P}(X = n+1)& \\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!} \times \frac{\lambda}{(n+1)} \\ &= \mathbb{P}(X = n) \times \frac{\lambda}{(n+1)} \\ &= \underset{n\to+\infty}{o}\left(\mathbb{P}(X = n)\right).\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 11.5 *énoncé*

1.

> *Ici, montrer que X est bien une variable aléatoire revient à montrer que les valeurs possibles de X, à première vue $[\![2\ ;\ +\infty[\![$, recouvrent tous les résultats possibles non négligeables ; ce pourquoi on se contentera comme d'habitude de montrer que la somme des probabilités de la loi qu'on va obtenir vaut 1.*

Au minimum, le premier tirage qui donnera une boule différente de la première sera le second, et au maximum... ben y a pas de maximum.
Donc $X_n(\Omega) = [\![2\ ;\ +\infty[\![$.
Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, notons Y_j le numéro de la boule piochée au j^e tirage : il est clair que Y_j suit la loi uniforme sur $[\![1\ ;\ n]\!]$
Soit $k \geqslant 2$. Appliquons la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par la variable Y_1 du numéro du premier tirage.

Il est clair que Y suit la loi uniforme sur $[\![1\ ;\ n]\!]$, et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y = i) \times \mathbb{P}_{Y=i}(X_n = k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \mathbb{P}_{Y=i}(X_n = k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \mathbb{P}_{Y=i}\big((Y_2 = i) \cap \cdots \cap (Y_{k-1} = i) \cap (Y_k \neq i)\big) \\
&\quad \textit{(je vous laisse vous convaincre de cette égalité)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \mathbb{P}(Y_2 = i) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(Y_{k-1} = i\right) \times \mathbb{P}(Y_k \neq i) \\
&\quad \textit{(par indépendance des tirages qui se font sans remise)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \times \frac{n-1}{n} \quad \textit{(car les } Y_j \textit{ suivent } \mathscr{U}\left([\![1\ ;\ n]\!]\right)\textit{)} \\
&= n \times \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \times \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^{k-1}}.
\end{aligned}$$

Autre méthode : appelons, à partir du second tirage, « succès » le fait de tirer une boule différente de la première. Par équiprobabilité des tirages, la probabilité de succès est $\frac{n-1}{n}$, et $T_n = X_n - 1$ mesure le temps d'attente d'un premier succès dans une suite d'épreuves indépendantes les unes des autres. Donc T_n est une variable aléatoire discrète de loi géométrique $\mathscr{G}\left(\frac{n-1}{n}\right)$.
On en déduit que $X_n = T_n + 1$ est une variable aléatoire discrète de loi donnée par $X_n(\Omega) = [\![2\ ;\ +\infty[\![$ et pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$P(X_n = k) = P(T_n = k-1) = \frac{n-1}{n}\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^{k-2} = \frac{n-1}{n^{k-1}}.$$

Vérification :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) &= (n-1) \times \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n-1} = 1,
\end{aligned}$$

donc X_n est bien une variable aléatoire, ou plutôt notre loi est bien une loi de probabilité.

2. Il est clair que $Y_2 = X_2$.

   Pour Y_3 : la plus petite valeur possible de Y_3 est 3, et il n'y a pas de limite supérieure pour ces valeurs, donc

$$Y_3(\Omega) = [\![3\ ;\ +\infty[\![.$$

   Soit k un entier tel que $k \geqslant 3$. Alors, en appliquant la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par X_3, on obtient

$$\mathbb{P}(Y_3 = k) = \sum_{i=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X_3 = i) \times \mathbb{P}_{(X_3=i)}(Y_3 = k).$$

   Or

   - on sait par la première question que $\mathbb{P}(X_3 = i) = \frac{3-1}{3^{k-1}} = \frac{2}{3^{k-1}}$.
   - De plus, pour tout $i \geqslant 2$, sachant $(X_3 = i)$ on a déjà eu 2 boules différentes, ainsi l'événement $(Y_3 = k)$ est réalisé lorsque

     - du $(i+1)^e$ tirage jusqu'au $(k-1)^e$, ce qui fait $k-1-(i+1)+1 = k-i-1$ tirages, on obtient une des deux boules déjà obtenues, avec la probabilité $\frac{2}{3}$ à chaque fois ;
     - et le k^e donne la boule qui n'a pas encore été piochée, avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

     Cette situation est évidemment impossible dans le cas où $i \geqslant k$, et pour $i \leqslant k-1$, les tirages étant effectués avec remise, on obtient pour probabilité

$$\mathbb{P}_{(X_3=i)}(Y_3 = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-i-1} \times \frac{1}{3}.$$

     Ainsi

$$\begin{aligned}
P(Y_3 = k) &= \sum_{i=2}^{k-1} \mathbb{P}(X_3 = i) \times \mathbb{P}_{(X_3=i)}(Y_3 = k) \\
&= \sum_{i=2}^{k-1} \frac{2}{3^{i-1}} \times \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-i-1} \\
&= \frac{2}{3^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-3} 2^j = \frac{2}{3^{k-1}} \left(2^{k-2} - 1\right) = \frac{2^{k-1} - 2}{3^{k-1}}.
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 11.6 *énoncé*

1. On estime, d'après l'énoncé, que 300 fautes sont réparties dans ce livre, et que le nombre X de fautes sur une page prise au hasard suit la loi binomiale $\mathscr{B}(300, \frac{1}{600})$.
   En effet, prenons une page au hasard : distribuer les 300 fautes (que l'on estime présentes dans le livre) sur les pages du livre revient alors à répéter 300 fois l'opération consistant à prendre une faute et à choisir, pour placer cette faute, soit notre page avec la probabilité 1/600, soit une des 599 autres pages.
   Ainsi la probabilité que cette page soit entachée d'une faute (au moins) est
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{600}\right)^{300}\\ \simeq 0{,}394.\end{aligned}$$
   Ou si on décide d'approcher la loi $\mathscr{B}(300,1/600)$ par la loi de Poisson de paramètre $300 \times \frac{1}{600} = \frac{1}{2}$ (ce qui est légitime vu la faiblesse de $p = 1/600$ et la taille de $n = 300$),
   $$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = 1 - e^{-1/2} \simeq 0{,}393.$$
2. Il y a en moyenne cinq défauts sur cent mètres de tissus, donc 0,15 défaut pour 3 mètres, autrement dit chaque coupon a une probabilité 0,15 d'avoir un défaut.
   La proportion p de coupons sans défaut est le nombre de coupons sans défaut divisé par le nombre total de coupons, cette proportion correspond, pour un coupon pris au hasard, à la probabilité de ne pas avoir de défaut.
   Prenons un coupon quelconque, et notons X le nombre de défaut de ce coupon, alors $p = \mathbb{P}(X=0)$.
   Mais au vu de l'énoncé, on se permet d'approcher la loi de X par la loi de Poisson de paramètre 0,15, d'où :
   $$p = \mathbb{P}(X=0) = \frac{e^{-0{,}15}(0{,}15)^0}{0!} = e^{-0{,}15} \simeq 0{,}861.$$
3. En moyenne, il passe une étoile filante toutes les 10 minutes, donc 1,5 par quart d'heure. Par conséquent on décide d'approcher le nombre d'étoiles filantes par quart d'heure par la loi de Poisson de paramètre 1,5, et la probabilité cherchée est alors
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=2) = \frac{e^{-1{,}5}(1{,}5)^2}{2!} \simeq 0{,}251\\ \text{ou bien } \mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) = 1 - e^{-1{,}5} - e^{-1{,}5} \times 1{,}5\\ \simeq 0{,}442.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 11.7 *énoncé*

1. ➟ La variable X peut prendre la valeur 0, dans le cas où *Pile* est obtenu dès le premier lancer, et n'a pas de limite supérieure, donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$ *(Tu es contente Elisa ?)*.

   ➟ Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, F_i l'événement « le i^e lancer donne *Face* », et P_i l'événement « le i^e lancer donne *Pile* ».

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $(X = n)$ est réalisé lorsque le premier Pile apparaît au $n+1^e$ lancer, les précédents étant des *Face*, autrement dit

$$(X = n) = F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1},$$

   donc avec la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}_{F_1}(F_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1}}(F_n) \times \mathbb{P}_{F_1 \cap \cdots \cap F_n}(P_{n+1}) \\
&= \underbrace{q \times \cdots \times q}_{n \text{ fois}} \times p \ \ \textit{(d'après l'énoncé)} \\
&= p\,q^n.
\end{aligned}$$

   ➟ Comme $0 < p < 1$, alors $0 < q = 1 - p < 1$, donc la suite $(\mathbb{P}(X = n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable, car $\mathbb{P}(X = n) \underset{n \to +\infty}{=} O(q^n)$, et $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique sommable.

   De plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = p \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = p \times \frac{1}{1-q} = p \times \frac{1}{p} = 1,$$

   donc on peut conclure que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, car le cas où *Pile* n'apparaît jamais a une probabilité nulle.

   ➟ Récapitulons : la loi de probabilité de X est
   - $X(\Omega) = \mathbb{N}$,
   - $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(X = n) = p\,q^n$.

1. Soit (m, n) un couple d'entiers naturels,

   ➟ si $m < n$, $\mathbb{P}((Z = m) \cap (T = n)) = 0$, car par définition $Z \geqslant T$;

   ➟ si $m > n$, alors

$$(Z = m) \cap (T = n) = (X = m) \cap (Y = n) \cup (X = n) \cap (Y = m),$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left((Z=m)\cap(T=n)\right) &= \mathbb{P}\left((X=m)\cap(Y=n)\right)+\mathbb{P}\left((X=n)\cap(Y=m)\right)\\ &\qquad \textit{(par } \sigma\textit{-additivité de } \mathbb{P}\textit{)}\\ &= \mathbb{P}(X=m)\mathbb{P}(Y=n)+\mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=m)\\ &\qquad \textit{(par indépendance de X et Y)}\\ &= p\,q^m\times p\,q^n+p\,q^n\times p\,q^m = 2\,p^2\,q^{m+n}\,;\end{aligned}$$

➟ si $m=n$, en bref

$$\mathbb{P}\left((Z=n)\cap(T=n)\right)=\mathbb{P}\left((X=n)\cap(Y=n)\right)=p^2\,q^{2n}.$$

2. D'après les valeurs de X et Y, il est clair que $Z(\Omega)=T(\Omega)=\mathbb{N}$.
   Pour tout $m\in\mathbb{N}$, il ne nous reste plus qu'à appliquer la sempiternelle formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par T, pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Z=m\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left((T=n)\cap(Z=m)\right)=\sum_{n=0}^{m-1}\mathbb{P}\left((T=n)\cap(Z=m)\right)\\ &\qquad +\mathbb{P}\left((T=n)\cap(Z=m)\right)\\ &\qquad +\sum_{n=m+1}^{+\infty}\mathbb{P}\left((T=n)\cap(Z=m)\right)\\ &= \sum_{n=0}^{m-1}2\,p^2\,q^{n+m}+p^2q^{2m}+\sum_{n=m+1}^{+\infty}0 \quad \textit{(d'après la question précédente)}\\ &= 2\,p^2\,q^m\sum_{n=0}^{m-1}q^n+p^2q^{2m}\\ &= 2\,p^2\,q^m\times\frac{1-q^m}{1-q}+p^2q^{2m}\quad \textit{(car } q\neq 1\textit{)}\\ &= 2\,p^2\,q^m\times\frac{1-q^m}{p}+p^2q^{2m}\\ &= 2\,p\,q^m(1-q^m)+p^2q^{2m}\quad \textit{(que je laisse comme ça faute de simplification vraiment intéressante).}\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 11.8 *énoncé*

1. Par définition, T peut prendre la valeur 0 si on n'a jamais PF, sinon $P_1 \cap F_2$ donne au mieux $(T=2)$ et il n'y a pas de limite maximale pour T. On obtient donc $T(\Omega) = \mathbb{N} - \{1\}$.

   Par ailleurs $(T=2) = P_1 \cap F_2$ d'où $\mathbb{P}(T=2) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(F_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ car les lancers sont indépendants.

2. (a) On a $(T=3) = (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)$ et ces deux événements sont incompatibles. Ainsi

$$\mathbb{P}(T=3) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap F_3) + \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap F_3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

   (b) Pour avoir $(T=k)$, il est nécessaire d'avoir $P_{k-1} \cap F_k$.
   Par ailleurs, si P_i est réalisé pour $i < k-1$, alors nécessairement pour $j \in [\![i, k-1]\!]$, P_j l'est aussi.
   On donc la décomposition

$$(T=k) = (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap F_k) \cup \left[\bigcup_{i=1}^{k-2} (F_1 \cap \cdots \cap F_i \cap P_{i+1} \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap F_k)\right].$$

   On obtient donc une réunion de $k-1$ événements incompatibles et ayant chacun une probabilité de $\left(\frac{1}{2}\right)^k$, on en déduit que

$$\mathbb{P}(T=k) = (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

   (c) $(T=0)$ est réalisé si et seulement si aucun des événements $(T=k)$, pour $T \geqslant 2$, n'est réalisé, donc

$$\overline{(T=0)} = \bigcup_{k=2}^{+\infty} (T=k),$$

   et cette réunion est disjointe. On en déduit par σ-additivité de la probabilité que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=0) &= 1-\sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 1-\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\\ &= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad \textit{(on reconnaît la première dérivée de la série géométrique de raison } 1/2\textit{).}\\ &= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2}}\right)\\ &= 1-1=0.\end{aligned}$$

On obtient donc presque sûrement « pile » suivi de « face » à un certain rang.

3. (a) Soit $k \geqslant 3$. Supposons que le premier lancer donne « pile ». Si l'événement $P_2 \cap P_3 \cap \ldots \cap P_{k-1} \cap F_k$ se réalise alors par définition de T on a effectivement $(T=k)$.
Réciproquement si $(T=k)$, cela signifie d'une part que l'on a F_k, et d'autre part que pour $i \in [\![1,k-2]\!]$, on n'a pas $P_i \cap F_{i+1}$. Comme l'événement P_1 est vrai, on doit donc avoir P_2, et par suite P_3 etc... jusqu'à P_{k-1}, ce qui réalise l'événement $P_2 \cap P_3 \cap \ldots \cap P_{k-1} \cap F_k$.

(b) En utilisant le système complet d'événement $\{P_1, F_1\}$, la formule des probabilités totales (deuxième version) donne

$$\mathbb{P}(T=k)=\mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(X=k \mid P_1)+\mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(X=k \mid F_1)$$

D'après la question précédente, $\mathbb{P}(T=k \mid P_1)=\frac{1}{2^{k-1}}$.
Par ailleurs si l'on obtient d'abord F_1 alors $(T=k)$ est réalisé si et seulement si la première occurrence du type $P_i \cap F_{i+1}$ entre le $2^{\text{ème}}$ tirage et le $k^{\text{ème}}$ tirage est en $i=k-1$ (puisque l'événement $P_1 \cap F_2$ ne peut pas se produire). On en déduit que $\mathbb{P}(T=k \mid F_1)=\mathbb{P}(T=k-1)$. Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}\forall k \geqslant 3,\ \ \mathbb{P}(T=k) &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2}\times\mathbb{P}(T=k-1)\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(T=k-1)+\frac{1}{2^{k}}\end{aligned}$$

(c) En multipliant la relation précédente par 2^k on trouve

$$\forall k \geqslant 3,\ \ 2^{k}\mathbb{P}(T=k)=2^{k-1}\mathbb{P}(T=k-1)+1,$$

c'est-à-dire $u_k = u_{k-1} + 1$.
La suite $(u_k)_{k\geqslant 2}$ est donc arithmétique de raison 1, d'où pour tout $k \geqslant 2$, $u_k = u_2 + k - 2 = k - 1$, et donc

$$\mathbb{P}(X = k) \quad = \tfrac{1}{2^k} u_k = \tfrac{k-1}{2^k}.$$

Une correction de l'exercice 11.9 *énoncé*

On commence par remarquer qu'on ne peut obtenir une deuxième fois une boule déjà tirée qu'à partir du 2^e tirage, et que la plus grande valeur de X est obtenue lorsqu'on a pioché chacune des n boules lors des n prmeiers tirages, et dans ce cas le $(n+1)^e$ tirage donnera une boule déjà tirée.
Ainsi $X(\Omega) = [\![2 \,;\, n+1]\!]$.

1. Soit $i \in [\![2 \,;\, n+1]\!]$. Sachant $(X > i-1)$, les $i-1$ premiers tirages ont donné $i-1$ boules différentes, donc dans ces conditions, $(X > i)$ est réalisé si, et seulement si, le i^e tirage donne encore une boule différente de celles qu'on a obtenues auparavant, ce qui correspond à $n-(i-1) = n-i+1$ cas favorables sur n cas possibles équiprobables. Ainsi

$$\mathbb{P}(X > i \mid X > i-1) = \mathbb{P}_{(X>i-1)}(X > i) = \frac{n-i+1}{n}.$$

2. On sait que pour tout tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X > i \mid X > i-1) = \frac{\mathbb{P}((X > i) \cap (X > i-1))}{\mathbb{P}(X > i-1)} = \frac{\mathbb{P}(X > i)}{\mathbb{P}(X > i-1)},$$

donc

$$\begin{aligned}\prod_{i=2}^{k} \mathbb{P}(X > i \mid X > i-1) &= \prod_{i=2}^{k} \frac{\mathbb{P}(X > i)}{\mathbb{P}(X > i-1)} = \frac{\prod_{i=2}^{k} \mathbb{P}(X > i)}{\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X > i)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > k)}{\mathbb{P}(X > 1)} \quad \textit{(ce sont des « produits télescopiques »)} \\ &= \mathbb{P}(X > k) \quad \textit{(car } X(\Omega) = [\![2 \,;\, +\infty[\![\textit{, donc } (X > 1) \textit{ est (quasi-)certain).}\end{aligned}$$

3. On a vu que $X(\Omega) = [\![2 \,;\, +\infty[\![$.

Pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(X>k-1) - \mathbb{P}(X>k) \\ &= \prod_{i=2}^{k-1} \mathbb{P}(X>i \mid X>i-1) \\ &\qquad - \prod_{i=2}^{k} \mathbb{P}(X>i \mid X>i-1) \\ &= \prod_{i=2}^{k-1} \frac{n-i+1}{n} - \prod_{i=2}^{k} \frac{n-i+1}{n} \quad \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+2}{n} \times \left(1 - \frac{n-k+1}{n}\right) \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+2}{n} \times \frac{k-1}{n} \\ &= (k-1) \times \frac{\frac{(n-1)!}{(n-k+1)!}}{n^{k-1}}.\end{aligned}$$

On peut toujours vérifier que cette formule nous donne $\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{n}$, ce qui correspond bien à la probabilité d'obtenir la même boule aux 2 premiers tirages. C'est toujours ça…

Une correction de l'exercice 11.10 *énoncé*

1. J'estime évident que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

   Parmi les valeurs de Y, la valeur 0 est singulière, on va la traiter séparément.

   ➟ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par définition de Y, on a $(Y=n) = (X=2n)$, donc

   $$\mathbb{P}(Y=n) = \mathbb{P}(X=2n) = p(1-p)^{2n-1}.$$

   ➟ En revanche $(Y=0) =$ « X est impair » $= \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X=2n+1)$.

Ici en général, l'élève Chaprot écrit l'égalité fallacieuse mais classique suivante :

$$\text{« X est impair »} = (X = 2n+1).$$

Quand le professeur lui demande « mais qui est ce n ? », il rajoute $n \in \mathbb{N}$ à droite de l'égalité incriminée :

$$\text{« X est impair »} = (X = 2n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Que donne tout cela égalité pour $n = 82$?
Pourquoi pas « X est impair »$= (X = 2n-1)$? Voire « X est impair »$=$ $(X = 2k+17)$?
Pourquoi l'événement « X est impair » dont l'intitulé ne contient aucun paramètre, dépendrait-il d'un paramètre entier n ?

Donc par σ-additivité de la probabilité,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^{2n+1-1} = p\sum_{n=0}^{+\infty}\left((1-p)^2\right)^n \\ &= p \times \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 11.11 *énoncé*

1. La variable X est le nombre de lancers de la première série, donc l'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   Soit $i \in \mathbb{N}^*$, $(X = i)$ est réalisé si les i premiers lancers donnent « Face » et le suivant « Pile » ou si les i premiers lancers donnent « Pile » et le suivant « Face ». Autrement dit, en notant $A_i =$« le $i^{\text{ème}}$ lancer donne "Face" »,

   $$(X = i) = \left(A_1 \cap \ldots \cap A_i \cap \overline{A}_{i+1}\right) \cup \left(\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_i \cap A_{i+1}\right)$$

   Ces deux cas sont incompatibles et les lancers sont indépendants, donc

   $$\mathbb{P}(X = i) = (1-p)^i p + p^i(1-p)$$

2. Remarquons d'emblée qu'à l'instar de X, Y a pour ensemble de valeurs $\mathbb{N}^*$.
   Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^*$, avec les mêmes notations que dans la question précédente, on peut écrire

   $$\begin{aligned}(X = i) \cap (Y = j) = &\left(A_1 \cap \ldots \cap A_i \cap \overline{A}_{i+1} \cap \ldots \overline{A}_{i+j} \cap A_{i+j+1}\right) \\ &\cup \left(\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_i \cap A_{i+1} \cap \ldots A_{i+j} \cap \overline{A}_{i+j+1}\right)\end{aligned}$$

ce dont on déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) &= p^i\times(1-p)^j\times p+(1-p)^i\times p^j\times(1-p)\\ &= p^{i+1}(1-p)^j+(1-p)^{i+1}p^j\end{aligned}$$

La loi de Y est alors la loi marginale du couple (X,Y), on a donc pour tout $j\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=j) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j))\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}\left(p^{i+1}(1-p)^j+(1-p)^{i+1}p^j\right)\\ &= (1-p)^jp^2\sum_{i=1}^{+\infty}p^{i-1}+(1-p)^2p^j\sum_{i=1}^{+\infty}(1-p)^{i-1}\\ &= (1-p)^jp^2\times\frac{1}{1-p}+(1-p)^2p^j\times\frac{1}{1-(1-p)} \quad \textit{(séries géométriques convergentes car } |p|<1 \textit{ et } |1-p|<1)\\ &= (1-p)^{j-1}p^2+(1-p)^2p^{j-1}.\end{aligned}$$

3. ➟ Grâce à une modeste factorisation, on peut écrire

$$\mathbb{P}((X=1)\cap(Y=1))-\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)=-p(1-p)(1-2p)^2,$$

et comme $p\in\,]0,1[$, cette quantité n'est nulle que pour $p=\frac{1}{2}$, ce qui prouve d'ores et déjà que si $p\neq\frac{1}{2}$, alors X et Y ne sont pas indépendantes.

➟ D'autre part, si $p=\frac{1}{2}$, alors pour tout $(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left(1-\frac{1}{2}\right)^j+\left(1-\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^j=\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j},\\ \mathbb{P}(X=i) &= \left(1-\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(1-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^i,\\ \mathbb{P}(Y=j) &= \left(1-\frac{1}{2}\right)^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^j.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)=\mathbb{P}(X=i)\times\mathbb{P}(Y=j)$$

ce qui prouve que dans ce cas, X et Y sont indépendantes.

Une correction de l'exercice 11.12 *énoncé*

(i) Les variables X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc $Z(\Omega)=\mathbb{N}$.
Pour tout entier $j\in\mathbb{N}$, on applique la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par X :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=j) &= \sum_{m\in\mathbb{N}} P\big((X=m)\cap(X+Y=j)\big)\\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X=m)\cap(Y=j-m))\\
&= \sum_{m=0}^{j} \mathbb{P}((X=m)\cap(Y=j-m))\\
&\textit{(car } \mathbb{P}((X=m)\cap(Y=j-m))=0 \textit{ si } j-m<0\textit{)}\\
&= \sum_{m=0}^{j}\frac{k}{(m+j-m+1)!} = k\sum_{m=0}^{j}\frac{1}{(j+1)!}\\
&= k\times(j+1)\times\frac{1}{(j+1)!} = \frac{k}{j!}.
\end{aligned}$$

Et la loi de probabilité de $X+Y$ doit vérifier

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X+Y=j)=1\\
\text{c'est-à-dire}\quad &\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{k}{j!}=1\\
\text{ce qui nous donne}\quad & k\times e^1=1\\
\text{d'où}\quad & k=e^{-1}.
\end{aligned}$$

(ii) On a obtenu $k=e^{-1}$.
On sait d'une part que $\mathbb{P}((X=0)\cap(Y=0))=e^{-1}$.
Mais

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}((X=0)\cap(Y=n)) \quad \textit{(désormais classique FPT sur le SCE induit par Y)}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{k}{(n+1)!} = k\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}-1\right)\\
&= k\left(e^1-1\right) = 1-e^{-1}.
\end{aligned}$$

et de même $\mathbb{P}(Y=0) = 1 - e^{-1}$.
Donc

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((X=0)\cap(Y=0)) = \mathbb{P}(X=0)\times\mathbb{P}(Y=0)\\
&\iff (\dots) \iff \left(e^{-1}\right)^2 - 3e^{-1} + 1 = 0 \iff e^2 - 3e + 1 = 0\\
&\iff e^{-1} \text{ et } e \text{ sont les racines de } X^2 - 3X + 1\\
&\Rightarrow e^{-1} + e = 3.
\end{aligned}$$

Or avec le développement en série entière de ch,

$$\operatorname{ch}(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{1}{2}1^2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} > \frac{3}{2}$$

donc $e^{-1} + e > 3$, d'où X et Y ne sont pas indépendantes.

Une correction de l'exercice 11.13 *énoncé*

1. ➟ N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, donc X aussi : $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$.

   ➟ On considère la loi de X comme loi marginale du couple (X, N), ou on applique la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par N, on obtient de toutes façons pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}((N=n)\cap(X=k)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}((X=k)/(N=n))$$

   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant $(N=n]$, X suit une loi binomiale de paramètre n et p. Par conséquent,

$$\mathbb{P}_{(N=n)}((X=k)) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & \text{si } k \leqslant n\,;\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}((N=n)P_{(N=n)}(X=k) \\
&= 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda} p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{n!} (1-p)^n \ \textit{(en posant } n' = n-k\textit{)} \\
&= \frac{e^{-\lambda} p^k \times \lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda \times (1-p))^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \times e^{\lambda(1-p)} \\
&\textit{(on a reconnu la série exponentielle)} \\
&= \frac{e^{-\lambda+\lambda(1-p)} (\lambda p)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

En conclusion, la variable X suit bien une loi de Poisson de paramètre λp.

- Si X sachant $(N = n)$ suit $\mathscr{B}(n, p)$, en considérant X comme le nombre de succès sur N épreuves, $Y = N - X$ est alors le nombre d'échecs sur N épreuves, donc Y sachant $(N = n)$ suit $\mathscr{B}(n, 1-p)$.

  Par conséquent, en échangeant les rôles parfaitement symétriques de X et Y, on prouve que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

2. X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$ donc (X, Y) prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^2$.

Soit $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$, $(X=k)\cap(Y=\ell)=(N=k+\ell)\cap(X=k)$, donc

$$\begin{aligned}\boxed{\mathbb{P}((X=k)\cap(Y=\ell))} &= \mathbb{P}((N=k+\ell)\cap(X=k))\\ &= \mathbb{P}(N=k+\ell)\times\mathbb{P}_{(N=k+\ell)}((X=k))\\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!}\times\binom{k+\ell}{k}p^k(1-p)^\ell\\ &= \boxed{\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k(\lambda(1-p))^\ell}{k!\,\ell!}}.\end{aligned}$$

3. Pour étudier l'indépendance de X et Y, il faut comparer les valeurs de $\mathbb{P}((X=k)\cap(Y=\ell)$ et $\mathbb{P}(X=k)\times\mathbb{P}(Y=\ell)$ pour tout $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$.
   Soit $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k)\times\mathbb{P}(Y=\ell) &= \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}\times\frac{e^{-\lambda(1-p)}(\lambda(1-p))^\ell}{\ell!}\\ &= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k(\lambda(1-p))^\ell}{k!\,\ell!}\\ &= \mathbb{P}((X=k)\cap(Y=\ell))\end{aligned}$$

   donc $\boxed{\text{X et Y sont indépendantes}}$.

Une correction de l'exercice 11.14 *énoncé*

1. ➟ Les variables X et Y prennent leurs valeurs dans $[\![1\,;\,n]\!]$, donc avec la formule

des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par X,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=Y) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X=i) \times P\big((X=Y) \mid (X=i)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P\big((X=i) \cap (X=Y)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P\big((X=i) \cap (Y=i)\big) \quad \textit{(car } (X=i)\cap(X=Y) = (X=i)\cap(Y=i)\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X=i) \times \mathbb{P}(Y=i) \quad \textit{(car X et Y sont indépendantes)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

➟ **Première méthode** : encore avec la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par X,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geqslant Y) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X=i) \times P\big((X \geqslant Y) \mid (X=i)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P\big((X=i) \cap (X \geqslant Y)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P\big((X=i) \cap (Y \leqslant i)\big) \quad \textit{(car } (X=i)\cap(X \leqslant Y) = (X=i)\cap(Y \leqslant i)\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X=i) \times \mathbb{P}(Y \leqslant i) \quad \textit{(car X et Y sont indépendantes)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \left(\sum_{k=1}^{i} \mathbb{P}(Y=k) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \left(\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{n} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times i \times \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.
\end{aligned}$$

Autre méthode : comme les variables X et Y sont indépendantes et suivent la même loi, on peut affirmer que $\mathbb{P}(X \geqslant Y) = \mathbb{P}(Y \geqslant X)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\text{d'une part, } & P\big((X \geqslant Y) \cup (Y \geqslant X)\big) = P(\Omega) = 1 \\
\text{et d'autre part, } & P\big((X \geqslant Y) \cup (Y \geqslant X)\big) \\
& = \mathbb{P}(X \geqslant Y) + P(Y \geqslant X) \\
& \quad - P\big((X \geqslant Y) \cap (Y \geqslant X)\big) \\
& = 2\mathbb{P}(X \geqslant Y) - \mathbb{P}(X = Y).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(X \geqslant Y) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathbb{P}(X = Y)\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

2. ➟ Les variables X et Y prennent leurs valeurs dans $[\![1 \,;\, n]\!]$, donc $D(\Omega) = [\![-(n-1) \,;\, (n-1)]\!]$.
➟ Soit $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, on reprend la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par X,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D = k) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i) \times P\big((D = k) \mid (X = i)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P\big((X = i) \cap (D = k)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P\big((X = i) \cap (X - Y = k)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P\big((X = i) \cap (Y = i - k)\big) \quad \textit{(car } (X = i) \cap (X - Y = k) = (X = i) \cap (Y = i - k)\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i) \times \mathbb{P}(Y = i - k) \quad \textit{(car X et Y sont indépendantes)} \\
&= \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \quad \textit{(car } \mathbb{P}(Y = i - k) = 0 \textit{ pour } i - k < 0\textit{)} \\
&= \frac{n-k}{n^2}.
\end{aligned}$$

On remarque que pour $k = 0$ on retrouve bien $\mathbb{P}(X = Y)$.

➟ Soit $k \in [\![-(n-1)\ ;\ 0]\!]$, comme X et Y suivent la même loi, les variables $X - Y$ et $Y - X$ n'ont aucune raison de suivre des lois différentes, ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X - Y = k) = \mathbb{P}(-(X - Y) = -k) &= \mathbb{P}(Y - X = |k|)\\ &= \frac{n-|k|}{n^2} \text{ (d'après le calcul précédent)}\\ &= \frac{n+k}{n^2}.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 11.15 *énoncé*

1. Comme X_λ possède une variance, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $P(|X_\lambda - \mathbb{E}(X_\lambda)| \geqslant c\lambda) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_\lambda)}{(c\lambda)^2}$. Comme $\mathbb{E}(X_\lambda) = \mathbb{V}(X_\lambda) = \lambda$, on obtient

$$P(|X_\lambda - \lambda| \geqslant c\lambda) \leqslant \frac{1}{c^2\lambda} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. On pose $\Delta_\lambda = B_\lambda^2 - 4A_\lambda C_\lambda$, et on étudie comment varie la probabilité de l'événement $(\Delta_\lambda \geqslant 0)$ quand $\lambda \to +\infty$. Pour avoir une idée, on commence par calculer l'espérance de Δ_λ. On sait que $\mathbb{V}(B_\lambda) = \lambda$, et la formule de König-Huyghens dit que $\mathbb{V}(B_\lambda) = \mathbb{E}\left(B_\lambda^2\right) - [\mathbb{E}(B_\lambda)]^2$, donc $\mathbb{E}\left(B_\lambda^2\right) = \lambda + \lambda^2$. Il en résulte que (en utilisant aussi l'indépendance de A_λ et C_λ) :

$$\mathbb{E}(\Delta_\lambda) = \mathbb{E}\left(B_\lambda^2\right) - 4\mathbb{E}(A_\lambda C_\lambda) = \mathbb{E}\left(B_\lambda^2\right) - 4\mathbb{E}(A_\lambda)\mathbb{E}(C_\lambda) = \lambda + \lambda^2 - 4\lambda^2 = \lambda - 3\lambda^2.$$

Cette espérance tend vers $-\infty$ quand $\lambda \to +\infty$, ce qui laisse penser que le polynôme étudié va avoir une probabilité petite d'avoir ses racines réelles quand $\lambda \to +\infty$. On va quantifier précisément ce phénomène en posant, pour $c \in]0,1]$ indépendant de λ :

$$E_\lambda(c) := ((|A_\lambda - \lambda| < c\lambda) \cap (|B_\lambda - \lambda| < c\lambda) \cap (|C_\lambda - \lambda| < c\lambda))$$

D'après la question précédente, et par indépendance,

$$P(E_\lambda(c)) = P(|A_\lambda - \lambda| < c\lambda) P(|B_\lambda - \lambda| < c\lambda) P(|C_\lambda - \lambda| < c\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Montrons maintenant que si c est assez petit, on a l'inclusion

$$E_\lambda(c) \subset (\Delta_\lambda < 0)$$

de sorte que $P(\Delta_\lambda < 0) \to 1$ quand $\lambda \to +\infty$. Comme $c \leqslant 1$, on a $(|Y - \lambda| < c\lambda) = ((1-c)\lambda < Y < (1+c)\lambda)$ avec $(1-c)\lambda > 0$, où Y désigne indifféremment A_λ, B_λ ou C_λ. Sur l'événement $E_\lambda(c)$, on a, par produit de nombres positifs :

$$\Delta_\lambda < \left((1+c)^2 - 4(1-c)^2\right)\lambda^2 = (1+c+2(1-c))(1+c-2(1-c))\lambda^2 = (3-c)(-1+3c)\lambda^2.$$

On en déduit que $E_\lambda\left(\frac{1}{3}\right) \subset (\Delta_\lambda < 0)$, donc la probabilité que $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ ait toutes ses racines réelles tend vers zéro quand λ tend vers l'infini.

Une correction de l'exercice 11.16

énoncé

On sait que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et $X \leqslant Y$ donc $Y - X \geqslant 0$ et $(Y - X + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on applique la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par Y :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P\big((X = k) \cap (Y = n)\big) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P\big((X = k) \cap (Y = n)\big) \\
&\qquad \textit{(car } X \leqslant Y \textit{ donc } P\big((X = k) \cap (Y = n)\big) = 0 \textit{ pour } n < k\textit{)} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) \times P_{(Y=n)}(X = k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) \times \frac{1}{n} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(Y = n)}{n}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y-X+1=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P\big((Y-X+1=k)\cap(Y=n)\big)\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P\big((X=n-k+1)\cap(Y=n)\big)\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P\big((X=n-k+1)\cap(Y=n)\big)\\
&\qquad \textit{(car } X(\Omega)=\mathbb{N}^* \textit{ donc } \mathbb{P}(X=n-k+1)=0 \textit{ pour } n-k+1<1,\\
&\qquad \textit{c'est-à-dire } n<k\textit{)}\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n)\times P_{(Y=n)}(X=n-k+1)\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n)\times \frac{1}{n} \quad \textit{(car } n-k+1\leqslant n\textit{)}\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(Y=n)}{n}.
\end{aligned}$$

Et voilà.

Une correction de l'exercice 11.17 *énoncé*

- Soit $k\in[\![0\,;n]\!]$, les variables X_k et X_{k+1} prennent les valeurs 0 et 1, donc $X_k-X_{k+1}\in\{-1,0,1\}$, d'où $Y_k(\Omega)=\{0,1\}$.
  Ainsi Y_k suit une loi de Bernoulli.
  De plus

  $$(Y_k=1)=\Big((X_k=1)\cap(X_{k+1}=0)\Big)\cup\Big((X_k=0)\cap(X_{k+1}=1)\Big)$$

  donc

  $$\begin{aligned}
  \mathbb{P}(Y_k=1) &= P\Big((X_k=1)\cap(X_{k+1}=0)\Big)+P\Big((X_k=0)\cap(X_{k+1}=1)\Big)\\
  &\qquad \textit{(par } \sigma\textit{-additivité de la probabilité)}\\
  &= \mathbb{P}(X_k=1)\times\mathbb{P}(X_{k+1}=0)+\mathbb{P}(X_k=0)\times\mathbb{P}(X_{k+1}=1)\\
  &\qquad \textit{(par indépendance des variables } X_k \textit{ et } X_{k+1}\textit{,)}\\
  &= 2p(1-p).
  \end{aligned}$$

  Donc Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $2p(1-p)$.

- Soit $(i,j) \in [\![0\ ;\ n]\!]^2$, avec $j < i$.
  - Si $j < i-1$, alors $j < j+1 < i < i+1$, donc $X_j, X_{j+1}, X_i, X_{i+1}$ sont mutuellement indépendantes, ainsi $Y_j = \left(X_j - X_{j+1}\right)^2$ et $Y_i = \left(X_i - X_{i+1}\right)^2$ sont aussi mutuellement indépendantes *(par le lemme des coalitions, qui n'est pas au programme, mais que l'on comprendra aisément)* Y_j et Y_i sont indépendantes.
  - Si $j = i-1$ ou $i = j+1$, on a établi dans l'exercice 17.7 du cours que Y_{j+1} et Y_j sont indépendantes si, et seulement si,

$$P((Y_{j+1}=1)\cap(Y_j=1)) = P(Y_{j+1}=1)\times P(Y_j=1),$$

car elles suivent toutes les deux une loi de Bernoulli.
Donc Y_{j+1} et Y_j sont indépendantes si, et seulement si,

$$P((Y_{j+1}=1)\cap(Y_j=1)) = 4p^2(1-p)^2.$$

Or en étudiant tous les cas, on remarque que $(Y_{j+1}=1)\cap(Y_j=1)$ est réalisé si, et seulement si, les variables X_j et X_{j+1}, ainsi que les variables X_{j+1} et X_{j+2}, prennent des valeurs distinctes, autrement dit :

$$\begin{aligned}(Y_{j+1}=1)\cap(Y_j=1)) = &\left((X_j=0)\cap(X_{j+1}=0)\cap(X_{j+2}=1)\right)\\ &\cup\left((X_j=0)\cap(X_{j+1}=1)\cap(X_{j+2}=0)\right)\end{aligned}$$

qui donne, par indépendance des X_k,

$$P((Y_{j+1}=1)\cap(Y_j=1)) = 2p^3.$$

Enfin

$$\begin{aligned}4p^2(1-p)^2 = 2p^3 &\iff 4p^2(p-2)\left(p-\frac{1}{2}\right) = 0\\ &\iff p = \frac{1}{2}\ \textit{(car } p \in\,]0\ ;\ 1[\textit{)}\end{aligned}$$

Donc Y_j et Y_{j+1} sont indépendantes si, et seulement si, $p = \frac{1}{2}$.

On peut donc conclure que $(Y_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes si, et seulement si, $p = \frac{1}{2}$.