Exercices du chapitre 12. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Exercice 12.1

Montrer que $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(1)(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}) + \mathrm{P}(-1)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X})$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ (où $n \geqslant 2$), et donner son noyau, son image, et ses éléments propres.

Exercice 12.2

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que pour polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{Sp}(\mathrm{P}(u)) = \{\mathrm{P}(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$.
2. (a) Montrer que u est nilpotent si, et seulement si, sa seule valeur propre est 0.

   (b) Montrer que si pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\mathrm{Tr}\left(u^k\right) = 0$, alors u est nilpotent.

Exercice 12.3

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $\mathrm{R} = \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X}$ est un polynôme annulateur de A.

Exercice 12.4 – 🔥

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A}^2 = -\mathrm{I}_n$, montrer que n est pair et que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 0$.

Exercice 12.5

Déterminez le polynôme caractéristique de l'automorphisme u de $\mathbb{R}^6$, tel que $u^3 - 3u^2 + 2u$ est l'endomorphisme nul et $\mathrm{Tr}(u) = 8$.

Exercice 12.6 – Utilisation classique du théorème de Cayley-Hamilton

Soient $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Sp}(\mathrm{B}) = \varnothing$.

1. Montrer que $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ est inversible.
2. Montrer pour tout $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, l'équivalence $\mathrm{AX} = \mathrm{XB} \iff \mathrm{X} = 0_n$.
3. Montrer que pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{M} = \mathrm{AX} - \mathrm{XB}$.

(mis à jour le 12 novembre 2024)

Exercice 12.7

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie tel que χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.
Montrer que le polynôme $P_u(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} (X - \lambda)$ annule u.

Exercice 12.8 — 🔥🔥 Oral Mines-Ponts

Montrer que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle garde stable une droite ou un plan vectoriel.

Réduction en petites dimensions

Exercice 12.9

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes et préciser si elles sont diagonalisables :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.10

Soient $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -7 & 1 & -6 \\ -10 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de la matrice A, et justifier qu'elle n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que A est semblable à B.

Exercice 12.11

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 12.12

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 12.13

1. Donner les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ?
2. En déduire les éléments propres de $a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$, où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

Exercice 12.14

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et $v \in E$. On suppose que $f(e_1) = \cdots = f(e_n) = v$.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ? *(discuter en fonction du vecteur v)*

Exercice 12.15

Soient n un entier tel que $n \geqslant 2$, $E = \mathbb{K}_n[X]$, et l'application $f : P \in E \mapsto P - P'$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{G}\ell(E)$ de deux manières *(avec ou sans matrice)*.
2. Pour tout $Q \in E$ trouver P tel que $f(P) = Q$ *(si $P \in E$, que vaut $P^{(n+1)}$?)*
3. f est-il diagonalisable ?

Exercice 12.16

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Phi_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$.

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice de Φ_A dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et en déduire le rang de Φ_A.
3. Calculer le polynôme caractéristique, et décrire les sous-espaces propres de Φ_A.
4. L'endomorphisme Φ_A est-il diagonalisable ?

Exercice 12.17

A. Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0 V_0^\top$.

1. Calculer A_0. Quel est le rang de A_0 ?
2. Justifier que 0 est valeur propre de A_0 puis déterminer une base du sous-espace propre associé.
3. (a) Calculer $A_0 U_0$.
   (b) Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   (c) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

B. Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la première colonne non nulle de A.

   Démontrer qu'il existe une matrice ligne non nulle $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = C \times L$.
2. Vérifier que $LC = \mathrm{Tr}(A)$ puis montrer que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$ où $\mathrm{Tr}(A)$ désigne la trace de A.
3. En déduire que le spectre de A est inclus dans $\{0, \mathrm{Tr}(A)\}$.
4. Le réel 0 est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?
5. Vérifier que $\mathrm{Tr}(A)$ est valeur propre de A.
6. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

C. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $f \circ f \neq \widetilde{0}$ où $\widetilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul.
On désigne par u un vecteur de E tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.

1. Montrer que $f(u) \neq 0$.
2. En déduire que l'endomorphisme f possède une valeur propre réelle non nulle.
3. Montrer alors que f est un endomorphisme diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12.18

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a un réel, et E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{2n}[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2, \ldots, X^{2n}\right)$.
On considère l'application $\Phi_a : P \mapsto \left(\frac{1}{4} - X^2\right) P' + a\, X\, P$.

1. Déterminer toutes les valeurs du réel a pour lesquelles Φ_a est un endomorphisme de E.

On choisit désormais a de sorte que Φ_a soit un endomorphisme de E.

2. Soit λ un entier tel que $-n \leqslant \lambda \leqslant n$.

   Déterminer α et β dans $\mathbb{N}$ de sorte que le polynôme $P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta}$ vérifie $\Phi_a(P) = \lambda P$.
3. Déterminer alors les éléments propres de l'endomorphisme Φ_a.
   On donnera pour chaque sous-espace propre une famille de polynômes constituant une base de ce sous-espace.
4. Déterminer une matrice B dont le spectre est $[\![0, 2n]\!]$ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.
5. Expliquer comment construire à l'aide de Φ_a, un endomorphisme Ψ de E admettant $0, 1, 4, 9, \ldots, 4n^2$ *(c'est-à-dire les carrés des entiers de $[\![0 ; 2n]\!]$)* comme valeurs propres.

Exercice 12.19

Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, et $\mathrm{E}_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tous $A \in \mathrm{E}_n$ et $j \in [\![1, n]\!]$, on note A_j la j^e colonne de la matrice A.
Soit u l'application qui à toute matrice A de E_n associe la matrice B dont les colonnes sont les $B_j = S - A_j$ où $S = \sum_{k=1}^{n} A_k$.

1. Dans cette question on pose $n = 2$.
   (a) Vérifier que u est un endomorphisme de E_2.
   (b) Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$. Démontrer que u est un automorphisme de E_2.
   (c) Reconnaître la nature géométrique de l'automorphisme u en précisant ses éléments caractéristiques.
2. Exprimer $\det(u(A))$ en fonction de $\det(A)$ dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

On revient au cas général, et on admet que u est un endomorphisme de E_n.

3. Montrer à l'aide d'opérations sur les colonnes et en utilisant S que l'on a :

$$\det(u(\mathrm{A})) = (-1)^{n-1}(n-1)\det(\mathrm{A})$$

4. (a) Déterminer un polynôme de degré 2 annulateur de u.
   (b) En déduire les éléments propres de u. Est-il diagonalisable ?
5. Soient $\mathrm{J}_n \in \mathrm{E}_n$ dont tous les coefficients valent 1 et $\mathrm{U}_n = \mathrm{J}_n - \mathrm{I}_n$.
   (a) Exprimer les colonnes de AU_n à l'aide de celles de A.
   (b) Retrouver alors le résultat de la question 4.(a).

Réduction en dimension indéfinie

Exercice 12.20

Montrer que $\mathrm{P(X)} \mapsto \mathrm{P(X)} + (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'(\mathrm{X})$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, et donner ses éléments propres. Est-il diagonalisable ?

Exercice 12.21 – Mines-Ponts 2019

Soient E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par u.

Exercice 12.22 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note B la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{A} & 2\mathrm{A} \\ 0 & 3\mathrm{A} \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Quelques applications de la réduction

Exercice 12.23

On suppose que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède n valeurs propres deux à deux distinctes.

1. Montrer que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commute avec A, alors A et B sont diagonalisables via la même matrice de passage.
2. On veut résoudre l'équation matricielle $X^2 = A$.
   (a) Montrer que les solutions de cette équation commutent avec A.
   (b) En déduire les solutions, que l'on exprimera en fonction des valeurs propres de A, de l'équation $X^2 = A$.
   (c) Résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.24

Résoudre l'équation matricielle $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12.25

Trigonaliser $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ sous la forme $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et en déduire ses puissances.

Exercice 12.26

1. Calculer les puissances de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
2. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

Exercice 12.27

Déterminer les matrices diagonalisables $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M^5 = M^2$ et $\operatorname{tr}(M) = n$.

Exercice 12.28 –

On considère une matrice diagonalisable $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est encore diagonalisable.
2. On suppose qu'une des valeurs propres de A, notons-la λ, a un module strictement supérieur aux modules des autres.

   Prouver que $\dfrac{\mathrm{Tr}(A^{p+1})}{\mathrm{Tr}(A^p)}$ tend vers λ quand p tend vers $+\infty$.

Problème 12.29 – Une preuve de la proposition 11.16

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $u \in \mathscr{L}(E)$ dont le spectre est $Sp_{\mathbb{K}}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, avec $m \in \mathbb{N}^*$, et les λ_i deux à deux distincts.
On note alors P_u le polynôme scindé à racines simples défini par

$$P_u(X) = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i).$$

1. Montrer que pour tout vecteur propre e de u, $e \in \mathrm{Ker}(P_u(u))$.
2. En déduire que si u est diagonalisable, alors $P_u(X)$ est un polynôme annulateur de u.
3. Retrouver que $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ dans le cas où u est diagonalisable.

Réciproquement, on suppose à présent qu'il existe un polynôme $B \in \mathbb{K}[X]$, **scindé à racines simples**, qui annule u (autrement dit $B(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$).

4. (a) Justifier que le polynôme $P_u(X)$ divise $B(X)$.
   (b) On note $Q(X)$ le quotient de $P_u(X)$ par $B(X)$.
   Montrer que l'endomorphisme $Q(u)$ est injectif, et conclure que P_u **est un polynôme annulateur de** u.
5. On suppose à présent que $m \geqslant 2$, et on considère la base de Lagrange $(L_1, \ldots, L_m)$ de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ construite sur $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.
   (a) Justifier que $\mathrm{id}_E = \sum_{i=1}^{m} L_i(u)$,
   et que pour tout $i \in [\![1\ ;\ m]\!]$, $\mathrm{Im}(L_i(u)) \subset E_{\lambda_i}(u)$.
   (b) En déduire que les sous-espaces propres de u sont supplémentaires dans E.
   (c) Conclure.

Exercice 12.30 –

Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $\mathcal{B}_n = (e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$, et on pose $e_\Sigma = \sum_{k=0}^{n-1} e_k$.

- Si $x = (x_0, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k$, on pourra identifier x et $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$
- Pour $M = \left(m_{i,j}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\overline{M} = \left(\overline{m_{i,j}}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1}$, et on admet que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.
- Si $x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k$, on remarquera que : $\sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^2 = \overline{X}^\top \times X$.

On s'intéresse, dans ce problème, à l'étude de l'application :

$$F_n : x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{kj} x_j \right) e_k$$

appelée transformée de Fourier discrète.
On acceptera sans le démontrer que F_n est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, et on notera A_n la matrice de F_n dans la base $\mathcal{B}_n$:

$$A_n = \left(\omega_n^{kj}\right)_{(k,j) \in [\![0,n-1]\!]^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

On prendra bien garde à ce que dans tout le problème, les indexations des coefficients des vecteurs de $\mathbb{C}^n$ et des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se font sur $[\![0, n-1]\!]$.

1. *Préliminaires.*
   (a) Que vaut ω_n^n ? Et plus généralement, que vaut $\left(\omega_n^k\right)^n$ pour $k \in \mathbb{Z}$?
   Montrer que : $\forall\,(k,k') \in [\![0, n-1]\!]^2,\ k \neq k' \Longrightarrow \omega_n^k \neq \omega_n^{k'}$.
   Justifier alors la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$: $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \omega_n^k\right)$.
   (b) Soit $s \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{sq} = \begin{cases} n & \text{si } s \text{ est un multiple de } n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. *Cas particulier $n = 2$.*
   (a) Expliciter la matrice A_2. Est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
   (b) La matrice A_2 est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.
3. *Exemples de transformées de Fourier discrètes.*
   Soient $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k \in \mathbb{C}^n$ et $y = F_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} y_k e_k$.
   (a) Déterminer y dans les trois cas suivants :
   -i)- $x = e_\Sigma = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e_k$.
   -ii)- $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k e_k$ où $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| \neq 1$.
   -iii)- $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} e_k$.
   (b) On suppose que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_k \in \mathbb{R}$.
   Montrer que pour tout $k \in [\![1\ ;\ n-1]\!]$, $y_k = \overline{y_{n-k}}$.
4. *Inversibilité de A_n dans le cas général et formule de Parseval.*
   (a) Calculer la matrice produit $A_n \times \overline{A_n}$.
   Justifier alors que A_n est inversible et préciser A_n^{-1}.
   (b) Justifier que F_n est inversible et préciser F_n^{-1}.
   (c) Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\quad n\,\overline{X}^\top \times X = \overline{A_n X}^\top \times A_n X$.

(d) En déduire pour tout $x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k \in \mathbb{C}^n$, la formule de Parseval :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{kj} x_j \right|^2 = n \sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^2 .$$

5. *Valeurs propres de* A_n.

   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une valeur propre de A_n. Montrer que $|\lambda| = \sqrt{n}$ (on pourra utiliser la question 5.c)).

   (b) Montrer que la matrice A_n^2 est la matrice de terme général $b_{k,j}$ où $(k,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$ tel que :

$$b_{0,0} = n, \quad b_{k,n-k} = n \text{ pour } k \in [\![0, n-1]\!], \text{ et } b_{k,j} = 0 \text{ sinon.}$$

   Autrement dit, $\mathrm{A}_n^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \\ \vdots & & & \iddots & 0 \\ 0 & 0 & \iddots & & \vdots \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Préciser alors A_n^4, puis en déduire un polynôme annulateur non nul de A_n et les valeurs propres possibles de A_n.

6. *Construction de vecteurs propres de* F_n.

   On suppose dans cette question que $n \geqslant 8$.

   On note $e_{\cos} = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) e_k$ et $e_{\sin} = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right) e_k$.

   (a) Calculer $\mathrm{F}_n\left(e_1 + e_{n-1}\right)$ et $\mathrm{F}_n\left(e_1 - e_{n-1}\right)$ en fonction de $e_{\cos}$ et $e_{\sin}$.

   (b) On note G_n l'endomorphisme canoniquement associé a A_n^2.
   Préciser $\mathrm{G}_n\left(e_1 + e_{n-1}\right)$ et $\mathrm{G}_n\left(e_1 - e_{n-1}\right)$ et en déduire que

$$\mathrm{F}_n\left(e_{\cos}\right) = \frac{n}{2}\left(e_1 + e_{n-1}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}_n\left(e_{\sin}\right) = i\frac{n}{2}\left(e_1 - e_{n-1}\right).$$

   (c) On note $\mathrm{Q} = \mathrm{Vect}\left(e_1 + e_{n-1}, e_{\cos}\right)$.
   Vérifier que Q est de dimension 2 et montrer que Q est stable par F_n.

Quelle est la matrice de l'endomorphisme induit $F_{n|Q}$ dans la base $(e_1 + e_{n-1}, e_{\cos})$ de Q ?

Déterminer les valeurs propres ainsi qu'une base de vecteurs propres de cette matrice.

En déduire que $\sqrt{n}$ et $-\sqrt{n}$ sont valeurs propres de F_n et déterminer des vecteurs propres de F_n associés à ces deux valeurs propres.

(d) Procéder de la même façon avec $R = \text{Vect}\left(e_1 - e_{n-1}, e_{\sin}\right)$.

(e) En déduire les valeurs propres de F_n.

Solutions

Une correction de l'exercice 12.1 *énoncé*

On suppose que $n \geqslant 2$.

1. Je vous laisse vérifier la linéarité, et constater que les images sont des combinaisons linéaires de $X^2 - X$ et $X^2 + X$, donc sont dans $\mathbb{R}_2[X]$, et a fortiori dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned}
\Phi(P) = 0 &\iff (P(1)+P(-1))X^2 + (-P(1)+P(-1))X = 0 \\
&\iff \begin{cases} P(1)+P(-1) &= 0 \\ -P(1)+P(-1) &= 0 \end{cases} \text{\textit{(car (X, X^2) est une famille libre)}} \\
&\iff P(1) = P(-1) = 0 \quad \text{\textit{(en faisant la somme et la différence)}} \\
&\iff P = (X-1)(X+1)Q \text{ où } Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X] \\
&\iff P \in (X-1)(X+1)\mathbb{R}_{n-2}[X],
\end{aligned}$$

donc $\operatorname{Ker}(\Phi) = (X-1)(X+1)\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

3. ➟ On remarque que $\operatorname{Im}(\Phi) \subset \operatorname{Vect}(X^2 - X, X^2 + X) \subset \operatorname{Vect}(X, X^2)$,
   ➟ or $X = \Phi\left(-\frac{1}{2}X\right)$, et $X^2 = \Phi\left(\frac{1}{2}\right)$, donc $\operatorname{Vect}(X, X^2) \subset \operatorname{Im}(\Phi)$,
   donc $\operatorname{Im}(\Phi) = \operatorname{Vect}(X, X^2)$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.
   ➟ On sait déjà que 0 est valeur propre et que

$$E_0(\Phi) = \operatorname{Ker}(\Phi) = (X-1)(X+1)\mathbb{R}_{n-2}[X].$$

.

   ➟ Si $\lambda \neq 0$, alors $\Phi(P) = \lambda P$ entraîne que

$$P = \frac{1}{\lambda}\Phi(P) = \Phi\left(\frac{1}{\lambda}P\right) \in \operatorname{Im}(\Phi),$$

   d'où $P \in \operatorname{Vect}(X, X^2)$.
   On cherche donc les solutions P de l'équation $\Phi(P) = \lambda P$ sous la forme $P = aX + bX^2$.

Dans ces conditions, on a alors

$$\begin{aligned}\Phi(\mathrm{P}) = \lambda \mathrm{P} &\iff (a+b)(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}) + (-a+b)(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}) \\ &\qquad = \lambda(a\mathrm{X}+b\mathrm{X}^2) \\ &\iff (\lambda-2)b\mathrm{X}^2 - (\lambda+2)a\mathrm{X} = 0 \\ &\iff \begin{cases}(\lambda-2)b &= 0 \\ (\lambda+2)a &= 0.\end{cases}\end{aligned}$$

- si $\lambda = 2$, alors

$$\Phi(\mathrm{P}) = 2\mathrm{P} \iff \begin{cases} 0 &= 0 \\ 4a &= 0 \end{cases} \iff a = 0 \iff \mathrm{P} = b\mathrm{X}^2,$$

  donc 2 est valeur propre et $\mathrm{E}_2(\Phi) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}^2)$;
- si $\lambda = -2$, alors

$$\Phi(\mathrm{P}) = -2\mathrm{P} \iff \begin{cases} -4b &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \iff b = 0 \iff \mathrm{P} = a\mathrm{X},$$

  donc -2 est valeur propre et $\mathrm{E}_{-2}(\Phi) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X})$;
- sinon (c'est-à-dire si $\lambda \notin \{-2,0,2\}$), alors

$$\Phi(\mathrm{P}) = \lambda \mathrm{P} \iff \begin{cases} b &= 0 \\ a &= 0 \end{cases} \iff \mathrm{P} = 0,$$

  donc λ n'est pas valeur propre de Φ.

Une correction de l'exercice 12.2 *énoncé*

1. On sait que u est de toutes façons trigonalisable (puisqu'on est dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel),donc il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle u a pour matrice une matrice $\mathrm{M} = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont les valeurs propres λ de u.
   On sait que l'application $\varphi \mapsto \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\varphi)$ est non seulement linéaire mais vérifie aussi que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u^k) = \left(\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)\right)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$,

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{P}(u)) = \mathrm{P}(\mathrm{M}).$$

   Or l'exercice de cours 5.3 prouve que les termes diagonaux de $\mathrm{P}(\mathrm{M})$ sont les $\mathrm{P}(\lambda)$

pour $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$.
Ainsi les valeurs propres de $\mathrm{P}(u)$, qui sont aussi les valeurs propres de sa matrice $\mathrm{P}(\mathrm{M})$ dans la base $\mathscr{B}$, sont exactement les $\mathrm{P}(\lambda)$ où $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u)$, C.Q.F.D.

2. ➟ Supposons que u est nilpotent.
   Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$, donc $\mathrm{Sp}(u^p) = \{0\}$.
   Or d'après ce qui précède, $\mathrm{Sp}(u^p) = \{\lambda^p \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$.
   Donc,
   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Longleftrightarrow \lambda^p = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0, \text{C.Q.F.D.}$$
   ➟ Réciproquement, si 0 est la seule valeur propre de u, alors son polynôme caractéristique n'est autre que X^n, et le théorème de Cayley-Hamilton nous dit alors que $u^n = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$, ce qui prouve que u est nilpotent.
3. Notons $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, et $m_1, \dots, m_r$ les ordres de multiplicité algébriques respectifs de ces valeurs propres.
   Ces notations supposent que les λ_i sont deux à deux distinctes.
   Comme on sait que u est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, notons T une matrice triangulaire qui représente u, alors les termes de la diagonale de T sont les λ_i, chacune répétée m_i fois.
   Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on sait que les termes diagonaux de T^k sont les λ_i^k chacune répétée encore m_i fois. Et donc, la matrice T^k représentant u^k, on peut affirmer non seulement que les valeurs propres de u^k sont les λ_i^k (ce que nous donnait la première question), mais aussi que l'ordre de multiplicité de λ_i^k reste m_i.
   On peut aussi affirmer que
   $$\mathrm{Tr}\left(u^k\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{T}^k\right) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i^k.$$
   Ainsi, d'après l'énoncé, pour tout $k \in \mathbb{N}[\![1\ ;\ n]\!]$, $\sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i^k = 0$.
   Si 0 est valeur propre de u, on rajoute $\lambda_{r+1} = 0$ dans le spectre au départ de ce raisonnement, mais λ_{r+1} disparaît dans toutes les sommes, donc on peut supposer qu'en plus d'être deux à deux distinctes, les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont non-nulles.
   On peut interpréter les r premières égalités comme le fait que $(m_1, \dots, m_r)$ est solution du système homogène de matrice
   $$\begin{pmatrix} \lambda_1 \dots\dots \lambda_r \\ \lambda_1^2 \dots\dots \lambda_r^2 \\ \\ \lambda_1^r \dots\dots \lambda_r^r \end{pmatrix},$$

matrice qui a pour déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 \ldots\ldots \lambda_r \\ \lambda_1^2 \ldots\ldots \lambda_r^2 \\ \\ \lambda_1^r \ldots\ldots \lambda_r^r \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_r \begin{vmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots 1 \\ \lambda_1 \ldots\ldots\ldots \lambda_r \\ \lambda_1^2 \ldots\ldots\ldots \lambda_r^2 \\ \\ \lambda_1^{r-1} \ldots\ldots \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1 \cdots \lambda_r \times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r} (\lambda_j - \lambda_i) \quad \textit{(en reconnaissant le déterminant de Vandermonde).}$$

Ainsi comme ce système homogène admet comme solution $((m_1, \ldots, m_r))$ qui est non nul, on peut dire que la matrice des coefficients n'est pas inversible, donc que le déterminant ci-dessus est nul.
Ainsi $\lambda_1 \cdots \lambda_r \times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r} (\lambda_j - \lambda_i) = 0$ mais cette égalité est absurde puisque les λ_i sont non nuls et deux à deux distincts, donc u ne peut pas avoir de valeur propre non nulle.
On a réussi à prouver que la seule valeur propre de u est 0, donc on peut conclure que u est nilpotent d'après la question précédente.

Une correction de l'exercice 12.3 *énoncé*

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X+1 & 2 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X+1)(X-2) + 2 = X(X-1),$$

or $R(0) = R(1) = 0$, donc 0 et 1 sont racines de R, ce qui permet d'affirmer que $\chi_A = X(X-1)$ divise R, autrement dit qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $R = \chi_A \times Q$.
Ainsi

$$\begin{aligned} R(A) &= (\chi_A \times Q)(A) = \chi_A(A) \times Q(A) \\ &= 0_2 \times Q(A) \quad \textit{(par le théorème de Cayley-Hamilton)} \\ &= 0_2, \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 12.4 *énoncé*

Comme $A^2 = -I_n$, alors le polynôme X^2+1 est un polynôme annulateur de A, donc les valeurs propres de A font partie des racines de ce polynôme, autrement dit $\mathrm{Sp}(u) \subset$

$\{\pm i\}$.
On peut déjà en déduire que le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = (X-i)^k(X+i)^\ell, \text{ avec } k+\ell = n.$$

De plus, comme A est une matrice à coefficients réels, on sait que si un nombre complexe est valeur propre de A, alors son conjugué est aussi valeur propre de A avec les mêmes ordres de multiplicité. Donc $k = \ell$, et

$$\chi_A(X) = (X-i)^\ell(X+i)^\ell = (X^2+1)^\ell.$$

On en déduit que

- $2\ell = n$, ce qui prouve que n est pair ;
- $\mathrm{Tr}(A) = \ell \times i + \ell \times (-i) = 0$.

Une correction de l'exercice 12.5 *énoncé*

(i) Comme $u^3 - 3u^2 + 2u$ est l'endomorphisme nul, on peut affirmer que $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de u, donc que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0,1,2\}$.

- Le spectre de u étant l'ensemble des racines de χ_u, on en déduit que la forme factorisée dans $\mathbb{C}[X]$ (décomposition de d'Alembert) de χ_u est de la forme

$$\chi_u(X) = X^{m_0}(X-1)^{m_1}(X-2)^{m_2},$$

où m_0, m_1 et m_2 sont des entiers naturels qui peuvent être nuls dans le cas où ils ne correspondent pas à une véritable valeur propre de u.
Et comme $\deg(\chi_u) = \dim\left(\mathbb{R}^6\right) = 6$, on a de plus

$$m_0 + m_1 + m_2 = 6.$$

- On remarque aussi que u est diagonalisable puisqu'il est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

(ii) L'énoncé nous confie que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^6$, donc il est bijectif, ce qui empêche 0 d'être une valeur propre de u. Donc $m_0 = 0$, autrement dit les seules valeurs propres possibles de u sont 1 et 2, avec $m_1 + m_2 = 6$.

(iii) Le polynôme caractéristique est scindé, donc $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda \times \lambda$, c'est-à-dire

$$8 = m_1 + 2m_2.$$

(iv) Grâce à notre maîtrise de techniques mathématiques hors de portée du commun des mortels, nous déduisons des deux équations $m_1+m_2=6$ et $m_1+2m_2=8$ que $m_1=4$ et $m_2=2$, ce qui permet de conclure que le polynôme caractéristique de u est

$$\chi_u(X)=(X-1)^4(X-2)^2.$$

Une correction de l'exercice 12.6

énoncé

1. Par définition $\chi_A(X)=\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}(X-\lambda)^{m_\lambda}$, donc

$$\chi_A(B)=\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}(B-\lambda I_n)^{m_\lambda},$$

or par hypothèse, pour toute valeur propre λ de A, λ n'est pas valeur propre de B, donc $B-\lambda I_n$ est inversible.

Ainsi $\chi_A(B)$ est un produit de matrices inversibles, donc c'est une matrice inversible.

2. Soit $X\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   - Si $X=0_n$, alors $AX=0_n=XB$.
   - Réciproquement, supposons que $AX=XB$, alors on montre d'abord par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$ que $A^kX=XB^k$, avec au cœur de la preuve

$$\begin{aligned}A^{k+1}X=A^k(AX)&=A^k(XB) &&\textit{(par hypothèse)}\\ &=\left(A^kX\right)B &&\textit{(par associativité du produit matriciel)}\\ &=\left(XB^k\right)B &&\textit{(par hypothèse de récurrence)}\\ &=XB^{k+1}.\end{aligned}$$

Puis pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$,

$$\begin{aligned}
P(A) \times X &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right) X = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(A^k X\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(XB^k\right) && \textit{(d'après le point précédent)} \\
&= X \left(\sum_{k=0}^{n} a_k B^k\right) && \textit{(par linéarité à gauche du produit matriciel)} \\
&= X \times P(B), \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

En particulier en prenant $P = \chi_A$, comme le théorème de Cayley-Hamilton nous donne $\chi_A(A) = 0_n$, on obtient $0_n \times X = X \times \chi_A(B)$, et en multipliant à droite par l'inverse de $\chi_A(B)$, on obtient $X = 0_n$.

3. Notons Φ l'application $X \mapsto AX - XB$.
   - Elle est linéaire car pour toutes matrices X, Y de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et tous nombres complexes λ, μ,

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda X + \mu Y) &= A(\lambda X + \mu Y) - (\lambda X + \mu Y)B \\
&= \lambda AX + \mu AY - \lambda XB - \mu YB && \textit{(par bilinéarité de produit matriciel } (A, B) \mapsto A \times B\textit{)} \\
&= \lambda(AX - XB) + \mu(AY - YB) = \lambda\Phi(X) + \mu\Phi(Y).
\end{aligned}$$

   - C'est bien un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ car si $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $AX - XB \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   - D'après la question précédente, si $\Phi(X) = 0_n$ alors $X = 0_n$, donc $\operatorname{Ker}(\Phi) = \{0_n\}$, d'où Φ est injective, donc est bijective puisque c'est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

   En particulier Φ est surjective, donc pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\Phi(X) = M$, c'est-à-dire $AX - XB = M$.

Une correction de l'exercice 12.7 *énoncé*

Notons $\dim(E) = n$.

Le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$, donc ses racines sont toutes dans $\mathbb{K}$, et χ_u est de la forme

$$\chi_u(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda},$$

où l'ordre de multiplicité algébrique m_λ de chaque valeur propre λ vérifie en particulier $1 \leqslant m_\lambda \leqslant n$.
Ainsi

$$\begin{aligned}
(P_u)^n &= \left(\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} (X - \lambda) \right)^n \\
&= \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} (X - \lambda)^n \\
&= \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda + n - m_\lambda} \\
&= \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda} \times \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} (X - \lambda)^{n - m_\lambda} \\
&= \chi_u \times Q,
\end{aligned}$$

où $Q = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} (X - \lambda)^{n - m_\lambda}$ est bien un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ puisque $n - m_\lambda \geqslant 0$.
Ainsi

$$(P_u(u))^n = \chi_u(u) \circ Q(u),$$

or le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc

$$(P_u(u))^n = 0_{\mathscr{L}(E)}, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 12.8 *énoncé*

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.
Or $\chi_f(f)$ est la composée d'endomorphismes de la forme $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$ où λ est une valeur propre réelle de f, et de la forme $f^2 - 2\,\mathbb{R}\mathrm{e}(\mu) f + |\mu|^2\,\mathrm{id}_E$, où μ est une valeur propre complexe non réelle de f.
Cette composée étant nulle, l'un au moins de ces endomorphismes n'est pas bijectif, sinon leur composée serait bijective, donc non nulle.

- Si f a (au moins) une valeur propre réelle λ, alors $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est pas bijectif et $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ contient au moins un vecteur x non nul, qui vérifie donc $f(x) = \lambda x$, et dans ce cas $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f car

$$\begin{aligned} f(\mathrm{Vect}(x)) &= \mathrm{Vect}(f(x)) \quad \textit{(voir la proposition 4.10)} \\ &= \mathrm{Vect}(\lambda x) \subset \mathrm{Vect}(x). \end{aligned}$$

➟ Sinon, f n'a que des valeurs propres complexes conjuguées, et en notant μ l'une d'entre elles, l'endomorphisme $f^2 - 2\,\mathbb{R}\mathrm{e}(\mu) f + |\mu|^2 \mathrm{id}_E$ n'est pas bijectif, et $\mathrm{Ker}\left(f^2 - 2\,\mathbb{R}\mathrm{e}(\mu) f + |\mu|^2 \mathrm{id}_E\right)$ contient au moins un vecteur x non nul, pour lequel le plan $\mathscr{P} = \mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f, car :

$$\begin{aligned} f(\mathscr{P}) &= f(\mathrm{Vect}(x, f(x))) = \mathrm{Vect}\left(f(x), f^2(x)\right) \quad \textit{(encore la proposition 4.10)} \\ &= \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{f(x)}_{=u}, \underbrace{2\,\mathbb{R}\mathrm{e}(\mu) f(x) - |\mu|^2 x}_{=v}\Big) \\ &\qquad \textit{(car } x \in \mathrm{Ker}\left(f^2 - 2\,\mathbb{R}\mathrm{e}(\mu) f + |\mu|^2 \mathrm{id}_E\right), \\ &\qquad \textit{donc } f^2(x) = 2\,\mathbb{R}\mathrm{e}(\mu) f(x) - |\mu|^2 x\textit{)} \\ &\subset \mathrm{Vect}(f(x), x). \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 12.9 *énoncé*

1. ➟ Cherchons le polynôme caractéristique dont les racines seront les valeurs propres :

$$\begin{aligned} \chi(X) &= \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 0 \\ 4 & X+1 & 0 \\ -4 & 8 & X+2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3+3}(X+2) \begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ 4 & X+1 \end{vmatrix} \\ &= (X+2)\left[(X-3)(X+1)+4\right] \\ &= (X+2)\left[X^2 - 2X + 1\right] \\ &= (X+2)(X-1)^2. \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc -2 et 1.

➟ Déterminer les vecteurs propres revient à résoudre le système homogène de matrice (des coefficients) $M - \lambda I_n$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$, alors

$$(M+2I_3)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} X = 0$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \iff x = y = 0$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

➟ De même

$$(M - I_3)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix} X = 0$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 8L_1}}{\iff} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & -3 \end{pmatrix} X = 0 \iff \begin{cases} y & = -2x \\ 3z & = 20x \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 20x/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} x \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix}$$

donc $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix}\right)$.

➟ La matrice n'est pas diagonalisable, car $\dim(E_1) + \dim(E_{-2}) = 2 \neq 3$.

2. Les valeurs propres sont -3 et 3, et

$$E_{-3} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \text{ et } E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

La matrice est diagonalisable, car $\dim(E_{-3}) + \dim(E_3) = 2 + 1 = 3$.

3. Les valeurs propres sont 2 et i, et $-i$.
   Les sous-espaces propres sont

$$\mathrm{E}_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}5\\-9\\6\end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{E}_i = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\-1-i\end{pmatrix}\right) \quad \text{et } \mathrm{E}_{-i} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\-1+i\end{pmatrix}\right).$$

   La matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, mais elle l'est dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Une correction de l'exercice 12.10

énoncé

1.

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-9 & -1 & -6 \\ 7 & x-1 & 6 \\ 10 & 1 & x+7 \end{vmatrix} \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1 \\
&= \begin{vmatrix} x-9 & -1 & -6 \\ 7 & x-1 & 6 \\ x+1 & 0 & x+1 \end{vmatrix} \\
&= (x+1) \begin{vmatrix} x-9 & -1 & -6 \\ 7 & x-1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + 6\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 6\mathrm{L}_3 \\ \end{matrix} \\
&= (x+1) \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x+1)\Big((x-3)(x-1) - (-1)\times 1\Big) \quad \textit{(en développant par rapport à la troisième colonne)} \\
&= (x+1)(x^2 - 4x + 4) = (x+1)(x-2)^2.
\end{aligned}$$

Puis en résolvant les systèmes homogènes de matrices $\mathrm{A}+\mathrm{I}_3$ et $\mathrm{A}-2\mathrm{I}_3$, on obtient $\mathrm{E}_{-1}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}((-2,2,3))$ et $\mathrm{E}_2(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}((-1,1,1))$.
Comme 2 est une valeur propre d'ordre 2, et que le sous-espace propre associé n'est que de dimension 1, on conclut que A n'est pas diagonalisable.

2. Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A, et $e_1 = (-2,2,3)$ et $e_2 = (-1,1,1)$ les vecteurs propres trouvés dans la question précédente. Alors $u(e_1) = -e_1$, et $u(e_2) = 2e_2$.
   Cherchons à prsént un vecteur $e_3 = (x, y, z)$ tel que $u(e_3) = e_2 + 2e_3$.

Cette égalité, dans la base canonique $\mathscr{C}$, en posant $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(e_3) = X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, équivaut à

$$\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\mathrm{X},$$

$$\text{soit } (\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3)\mathrm{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ -7 & -1 & -6 \\ -10 & -1 & -9 \end{pmatrix} \mathrm{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow -\frac{1}{3}(\mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1) \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} 7x + y + 6z & = -1 \\ x + z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = z - 1 \\ x & = -z \end{cases}$$

On choisit $z = 0$, d'où $e_3 = (0, -1, 0)$.

La matrice $\mathrm{P} = \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible car son déterminant vaut 1, donc la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, u a pour matrice B, donc A et B sont bien semblables.

Une correction de l'exercice 12.11

énoncé

1. Après calcul, on trouve $\det \mathrm{A} = a(a+1)$, ainsi :
   - si $a \neq 0$ et $a \neq -1$, alors, $\det \mathrm{A} \neq 0$ donc A est inversible, et $\mathrm{rg}\mathrm{A} = 3$;
   - si $a = 0$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}\mathrm{A} = 2$;
   - si $a = -1$, alors $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}\mathrm{A} \geqslant 2$ car les deux premières colonnes de A sont non colinéaires. Or $\det \mathrm{A} = 0$ donc $\mathrm{rg}\mathrm{A} \leqslant 2$, et on en déduit que $\mathrm{rg}\mathrm{A} = 2$.

2. Notons χ_A le polynôme caractéristique de A, alors

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ -a & \lambda & -1 \\ -a & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$\overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda - a - 1 & -a & -1 \\ \lambda - a - 1 & \lambda & -1 \\ \lambda - a - 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1)\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=}} (\lambda - a - 1)\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 0 & \lambda + a & 0 \\ 0 & -1 + a & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1)(\lambda + a)(\lambda + 1).$$

Les racines de χ_A, c'est-à-dire les valeurs propres de A, sont donc $a+1$, $-a$ et -1.

Il est important de traiter les éventuels cas d'égalité entre les valeurs propres obtenues, ce qui peut échapper à première vue à l'élève Chaprot puisque leurs expressions sont d'apparences différentes !

On remarque que

$$a + 1 = -a \iff a = -\frac{1}{2},$$
$$a + 1 = -1 \iff a = -2,$$
$$-a = -1 \iff a = 1.$$

D'où les cas suivants :

- si $a \notin \left\{1, -2, -\frac{1}{2}\right\}$, alors A admet trois valeurs propres deux à deux distinctes, donc elle est diagonalisable ;
- si $a = \frac{1}{2}$, $\chi_A = (X - \frac{1}{2})^2(X+1)$, donc A est diagonalisable si, et seulement si, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\frac{1}{2}$ est de dimension 2, or

$$A - \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

  est de rang au moins 2 puisque les deux premières colonnes de $A - \frac{1}{2}I_3$ sont non colinéaires, donc par le théorème du rang $\dim\left(E_{\frac{1}{2}}\right) = 1$, d'où A n'est pas diagonalisable.
- On reproduit exactement le même raisonnement dans le cas où $a = -2$.

➟ Si $a=1$, $\chi_A=(X-2)(X+1)^2$, et $A+I_3=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ est de rang 1, donc par le théorème du rang $\dim\left(E_{-1}\right)=2$, et A est diagonalisable.

Une correction de l'exercice 12.12 *énoncé*

Après calculs, on trouve, $\chi_M=X(X^2+ca-ba-bc)$.

➟ Si $ca-ba-bc<0$, alors $\chi_M=X\left(X-\sqrt{ca-ba-bc}\right)\left(X+\sqrt{ca-ba-bc}\right)$, donc M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et a fortiori dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, car elle possède trois valeurs propres réelles distinctes.

➟ Si $ca-ba-bc=0$, alors $\chi_M=X^3$, donc M a pour unique valeur propre 0.
Elle est donc diagonalisable si, et seulement si, elle est nulle (car la seule matrice semblable à λI_n est λI_n elle-même).

➟ Si $ca-ba-bc>0$, alors 0 est la seule valeur propre réelle et donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ car $\chi_M(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$.
En revanche, M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres complexes distinctes.

Une correction de l'exercice 12.13 *énoncé*

1. Je vous laisse retrouver que $\chi_A=X^3-1$ donc $\mathrm{Sp}A=\{1,j,j^2\}$.
   On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres distinctes, mais pas dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ car son polynôme caractéristique n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$.

2. Après résolution, on trouve $E_1(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, puis $E_j(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}$, et, par conjugaison (comme A est à coefficients réels), $E_{j^2}(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}$.

   Ainsi on a $A=PDP^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&j^2\end{pmatrix}$.

   Par conséquent,
$$\begin{aligned}B&=aI_3+bPDP^{-1}+cPD^2P^{-1}=P\left(aI_3+bD+cD^2\right)P^{-1}\\&=P\begin{pmatrix}a+b+c&0&0\\0&a+bj+cj^2&0\\0&0&a+bj^2+cj\end{pmatrix},\end{aligned}$$

c'est-à-dire,en posant $\mathrm{Q} = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2$, $\mathrm{B} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \mathrm{Q}(1) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Q}(j) & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Q}(j^2) \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$.

On en déduit que B est diagonalisable et admet pour valeurs propres *(distinctes ou non)* $\mathrm{Q}(1)$, $\mathrm{Q}(j)$ et $\mathrm{Q}(j^2)$.

- Si $\mathrm{Q}(1)$, $\mathrm{Q}(j)$ et $\mathrm{Q}(j^2)$ sont deux à deux distincts, alors B possède trois valeurs propres distinctes $\mathrm{Q}(1)$, $\mathrm{Q}(j)$ et $\mathrm{Q}(j^2)$, avec $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}(1)}(\mathrm{B}) = \mathrm{E}_1(\mathrm{A})$, $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}(j)}(\mathrm{B}) = \mathrm{E}_j(\mathrm{A})$, et $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}(j^2)}(\mathrm{B}) = \mathrm{E}_{j^2}(\mathrm{A})$.
- Si deux valeurs exactement parmi $\mathrm{Q}(1)$, $\mathrm{Q}(j)$ et $\mathrm{Q}(j^2)$ sont égales, supposons par exemple que $\mathrm{Q}(1) = \mathrm{Q}(j)$ et $\mathrm{Q}(j^2) \neq \mathrm{Q}(1)$.
  Alors B possède deux valeurs propres distinctes $\mathrm{Q}(1)$ et $\mathrm{Q}(j^2)$, et $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}(1)}(\mathrm{B}) = \mathrm{E}_1(\mathrm{A}) + \mathrm{E}_j(\mathrm{A})$ et $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}(j^2)}(\mathrm{B}) = \mathrm{E}_{j^2}(\mathrm{A})$.
  Je vous laisse retrouver les cas $\mathrm{Q}(1) = \mathrm{Q}(j^2)$ et $\mathrm{Q}(j) = \mathrm{Q}(j^2)$.
- Si $\mathrm{Q}(1) = \mathrm{Q}(j) = \mathrm{Q}(j^2)$, alors $\mathrm{B} = \mathrm{Q}(1)\mathrm{I}_3$ et $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}(1)}(\mathrm{B}) = \mathbb{C}^3$.

Une correction de l'exercice 12.14 *énoncé*

1. Dans un premier temps

$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathrm{E}) = f(\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \mathrm{Vect}(v),$$

donc si $v = 0_{\mathrm{E}}$ alors $\mathrm{rg}(f) = 0$ et si $v \neq 0_{\mathrm{E}}$ $\mathrm{rg}(f) = 1$.

2. Débarrassons-nous d'abord du cas où $v = 0_{\mathrm{E}}$, dans lequel f est l'endomorphisme nul et donc est évidemment diagonalisable.
Plaçons-nous dorénavant dans le cas $v \neq 0_{\mathrm{E}}$, et notons χ_f le polynôme caractéristique de f.
Comme $\mathrm{rg}(f) = 1$ le théorème du rang nous donne $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n-1$, donc 0 est valeur propre de f d'ordre de multiplicité algébrique $m_0 \geqslant n-1$.
Par conséquent le polynôme caractéristique de f s'écrit $\chi_f = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - \lambda)$ où λ est un scalaire (qui peut être nul dans le cas où $m_0 = n$).
Ce polynôme caractéristique étant scindé, on peut en déduire que $\mathrm{Tr}(f) = \lambda$.
Mais si on note $v = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, alors la matrice de f dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{Tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

On en déduit que $\sum_{k=1}^{n} x_k = \lambda$.

- Si $\sum_{k=1}^{n} x_k \neq 0$, alors $\lambda \neq 0$ donc 0 est valeur propre d'ordres de multiplicité égaux à $n-1$ et λ est valeur propre d'ordres égaux à 1, donc f est diagonalisable ;
- si $\sum_{k=1}^{n} x_k = \lambda = 0$ alors f a pour unique valeur propre 0, donc ne peut pas être diagonalisable car sinon f serait l'endomorphisme nul, ce qui est exclus puisqu'on est dans le cas $v \neq 0_E$.

Dans le cas où $v \neq 0_E$, comme $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$, alors

$$f(v) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \ldots + x_nf(e_n) = (x_1 + \cdots + x_n)v = \lambda v$$

donc v est un vecteur propre de f associé à λ, et en particulier si $\lambda \neq 0$, on a $E_\lambda(f) = \mathrm{Vect}(v)$.

Une correction de l'exercice 12.15

énoncé

1. - On remarque que $f = \mathrm{id}_E - D$ où D est la dérivation dans $\mathbb{K}_n[X]$, donc f est bien un endomorphisme de E comme combinaison linéaire d'endomorphismes de E.

     De plus, si $P \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $P = P'$, donc P est le polynôme nul car sinon $\deg P' < \deg P$ ce qui empêche $P = P'$.

     On en déduit que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ donc que f est bijective, autrement dit que $f \in \mathscr{GL}(E)$.
   - La matrice de f dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$.

     Le déterminant de cette matrice triangulaire supérieure est le produit de ses termes diagonaux $\det A = 1$, donc en particulier $\det A \neq 0$ et f est bijectif.
2. Soit $Q \in E$. Comme f est bijective, il existe un unique $P \in E$ tel que $f(P) = Q$, c'est-à-dire $P - P' = Q$.

   Par dérivations successives on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)} - P^{(k+1)} = Q^{(k)}$, et en additionnant ces pour k allant de 0 à n, on obtient par somme télescopiques $P - P^{(n+1)} = Q + Q' + \cdots + Q^{(n)}$, c'est-à-dire, puisque P étant de degré inférieur à

n, $P^{(n+1)} = 0$,

$$P = Q + Q' + \cdots + Q^{(n)}.$$

3. D'après la matrice A obtenue dans la première question, la seule valeur propre de A, donc de f, est 1, donc si f était diagonalisable, alors f aurait pour matrice l'unité dans une base de vecteurs propres, ce qui n'est possible que si f est l'identité, ce qui est faux. Par conséquent, f n'est pas diagonalisable.

Une correction de l'exercice 12.16 *énoncé*

1.
2. La base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

donc

$$\begin{aligned} \Phi_A(I) = AI - IA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)J + 1 \times K. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \Phi_A(J) &= -I + L \\ \Phi_A(K) &= I - L \\ \Phi_A(L) &= J - K \end{aligned}$$

Ainsi

$$\underset{[I,J,K,L]}{\mathrm{Mat}}(\Phi_A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il nous saute aux yeux que cette matrice est de rang 2, donc $\mathrm{rg}(\Phi_A) = 2$.

3. ➟ Le polynôme caractéristique, que l'on décide de noter $\chi(X)$, de Φ_A est celui de

sa matrice dans n'importe quelle base, en particulier :

$$\begin{aligned}
\chi(X) &= \begin{vmatrix} X & 1 & -1 & 0 \\ 1 & X & 0 & -1 \\ -1 & 0 & X & 1 \\ 0 & -1 & 1 & X \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - XL_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \\ \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 1-X^2 & -1 & X \\ 1 & X & 0 & -1 \\ 0 & X & X & 0 \\ 0 & -1 & 1 & X \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + (1-X^2)L_4 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + XL_4 \\ \\ \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -X^2 & X(2-X^2) \\ 1 & X & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2X & X^2 \\ 0 & -1 & 1 & X \end{vmatrix} \\
&= X^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -X & 2-X^2 \\ 1 & X & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & X \\ 0 & -1 & 1 & X \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}XL_3 \\ \\ \\ \\ \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} L_2 \longleftrightarrow L_4 \end{array} \\
&= X^2 \begin{vmatrix} 1 & X & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & X \\ 0 & 0 & 1 & X/2 \\ 0 & 0 & 0 & 4-X^2 \end{vmatrix} \\
&= -X^2(4-X^2) = X^2(X^2-4) = X^2(X-2)(X+2).
\end{aligned}$$

- On en déduit que les valeurs propres de Φ_A, qui sont aussi les valeurs propres de sa matrice, sont 0 (on le savait déjà car $\mathrm{rg}(\Phi_A) = 2$), -2 et 2.

➟ Notons M la matrice obtenue en question 2.

$$M - 2I_4 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad L_1 \longleftrightarrow L_3 \quad \left| \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} \right.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_4 \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

donc

$$(M - 2I_4)X = 0 \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui permet de conclure que $E_2(\Phi_A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

De même, on obtient $E_{-2}(\Phi_A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Pour $E_0(\Phi_A) = \mathrm{Ker}(\Phi_A)$, on sait que $\mathrm{rg}(\Phi_A) = 2$, donc avec le théorème du rang $E_0(\Phi_A)$ est de dimension 2. Mais on remarque que

$$\Phi_A(I_2) = \Phi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0_2,$$

donc ces deux matrices I_2 et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui sont linéairement indépendantes, sont dans $E_0(\Phi_A)$ qui est de dimension 2.

Par conséquent, I_2 et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ forment une base de $E_0(\Phi_A)$.

4. Enfin, la somme des dimensions de ses trois sous-espaces propres est bien égale à 4, donc Φ_A est diagonalisable.

   On le savait déjà grâce au théorème spectral (ou théorème fondamental de l'algèbre) car sa matrice est symétrique réelle !

Une correction de l'exercice 12.17

énoncé

1. (a) Le produit matriciel donne

$$\begin{aligned} A_0 &= U_0 \times {V_0}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et ses 4 colonnes étant colinéaires *(au vrai sens du terme)*, A_0 est de rang 1.

(b) Le vecteur $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nul, et vérifie

$$A_0 U_1 = 0_{4,1} = 0 \times U_1,$$

donc 0 est valeur propre de A_0, et U_1 est un vecteur propre associé.

On remarque que $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont aussi vecteurs propres de A_0 associés à la valeur propre 0.

De plus, au vu des trois dernières coordonnées de ces trois vecteurs, on peut affirmer que la famille $(U_1,\ U_2,\ U_3)$ est libre.

Or grâce au théorème du rang

$$\dim(E_0(A_0)) = \dim(\mathrm{Ker}(A_0)) = 4 - \mathrm{rg}(A_0) = 3,$$

donc la famille $(U_1,\ U_2,\ U_3)$ étant libre dans $E_0(A_0)$ qui est de dimension 3, on peut conclure que c'en est une base.

(c) -i)- Le produit matriciel nous donne aussi $A_0 U_0 = -2U_0$.

-ii)- Ainsi, U_0, qui est non nul, est un vecteur propre associée à la valeur propre -2.

La matrice P dont les colonnes sont $U_0,\ U_1,\ U_2,\ U_3$ donne après l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3 + C_4$ une matrice triangulaire supérieure de déterminant 2. Elle est donc inversible.

Ainsi $(U_0,\ U_1,\ U_2,\ U_3)$ est une base de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A_0, ce qui prouve que A_0 est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Autre méthode : on a déjà vu que $\dim(E_0(A)) = 3$, et on sait que -2 est valeur propre de A donc $\dim(E_{-2}(A)) \geqslant 1$. Ainsi comme les sous-espaces propres sont en somme directe, $\dim(E_0(A)) + \dim(E_{-2}(A)) \leqslant 4$. On en déduit que $\dim(E_{-2}(A)) = 1$, puis que $\dim(E_0(A)) + \dim(E_{-2}(A)) = 4$, ce qui prouve que A est diagonalisable.

-iii)- Comme la matrice P définie ci-dessus est la matrice d'une base de vecteurs propres de A_0, alors $A_0 = PDP^{-1}$, où D est la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(-2,\ 0,\ 0,\ 0)$ formée des valeurs propres correspondantes.

2. Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

(a) On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la première colonne non nulle de la matrice A.

Comme le rang de A est 1, les colonnes de A sont colinéaires, donc il existe $(\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que les colonnes de A soient successivement $\ell_1 C$, $\ell_2 C$,... et $\ell_n C$.

Cela se traduit matriciellement par l'égalité $A = CL$, où $L = (\ell_1 \ldots \ell_n) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

De plus la matrice L est bien non nulle car une des colonnes de A est C donc le coefficient correspondant ℓ_i vaut 1.

(b) Le i-ème coefficient diagonal de A est $c_i \ell_i$. D'où

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} c_i \ell_i = LC.$$

Puis

$$\begin{aligned} A^2 &= (CL)(CL) = C(LC)L = C \times \mathrm{Tr}(A) \times L = \mathrm{Tr}(A)CL \\ &= \mathrm{Tr}(A)A. \end{aligned}$$

(c) La question précédente prouve que le polynôme $X^2 - \mathrm{Tr}(A)X = X\left(X^2 - \mathrm{Tr}(A)\right)$ annule A. Donc le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de ce polynôme, c'est-à-dire $\{0, \mathrm{Tr}()\}$.

(d) Le réel 0 est valeur propre de A car A n'est pas inversible. Le théorème du rang affirme que la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 0 est $n - \mathrm{rg}(A) = n - 1$.

(e) On a vu que $A = C \times L$, donc

$$A \times C = C \times L \times C = C \times \underbrace{(LC)}_{=\mathrm{Tr}(A)} = \mathrm{Tr}(A)\, C,$$

donc, puisque C est non nulle, on en déduit que $\mathrm{Tr}(A)$ est valeur propre de A.

(f) On sait que 0 est valeur propre de A d'ordre au moins $n-1$ et que le spectre de A est $\{0,\ \mathrm{Tr}(A)\}$. Ainsi le polynôme caractéristique de A est $X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(A))$.

- Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$ alors la dimension de chacun des espaces propres vaut l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante. Dans ce cas, A est diagonalisable.
- Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$ alors l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 est différente de la dimension de l'espace propre relatif. Dans ce cas, A n'est pas diagonalisable.

3. (a) Comme $f \circ f \neq \widetilde{0}$ il existe $v \in E$ tel que $f \circ f(v) \neq 0$. Comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(v) = \alpha u$. Ainsi,

$$0 \neq f \circ f(v) = f(\alpha u) = \alpha f(u),$$

d'où $f(u) \neq 0$.

(b) Or, par définition, $f(u) \in \mathrm{Im}(f)$, et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$.
Comme $f(u) \neq 0$, on en déduit que $u \neq 0$, $\lambda \neq 0$ et par suite λ est une valeur propre non nulle de f.

(c) Si on note A la matrice de l'endomorphisme f de E dans une base donnée, alors A est une matrice de rang 1, d'après la question précédente A possède une valeur propre non nulle (qui est forcément sa trace d'après la question 2).
Ainsi grâce à la question 2.(f), on peut affirmer que A est diagonalisable, et donc que l'endomorphisme f l'est aussi.

Une correction de l'exercice 12.18 *énoncé*

1. **(Analyse :)** Si Φ_a est un endomorphisme de E, alors $\Phi_a(X^{2n}) \in E$. Or

$$\Phi_a(X^{2n}) = 2n\left(\frac{1}{4} - X^2\right)X^{2n-1} + aXX^{2n} = (a-2n)X^{2n+1} - \frac{2n}{4}X^{2n-1},$$

donc $\Phi_a(X^{2n}) \in E$ si et seulement si $\deg\left(\Phi_a(X^{2n})\right) \leqslant 2n$ si, et seulement si, $a - 2n =$

$0 \Leftrightarrow a = 2n$.

(Synthèse :) Réciproquement, prenons $a = 2n$.

- Φ_{2n} est linéaire car la dérivation est linéaire et le produit des polynômes est bilinéaire *(on s'en contentera...)*
- Pour tout $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k \in E$,

$$\deg(\Phi_{2n}(P)) \leqslant \max\left(2 + \deg(P'), 1 + \deg(P)\right) = 1 + \deg(P) \leqslant 1 + 2n,$$

et le terme de degré $2n + 1$ de

$$\Phi_{2n}(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)\left(\sum_{k=1}^{2n} k a_k X^{k-1}\right) + 2nX\left(\sum_{k=0}^{2n} a_k X^k\right)$$

est

$$-X^2 \times (2n) a_{2n} X^{2n-1} + 2nX \times a_{2n} X^{2n} = \underbrace{(a - 2n)}_{=0} a_{2n} X^{2n+1} = 0,$$

donc $\Phi_{2n}(P) \in E$.

- Donc, Φ_{2n} est un endomorphisme de E.

Conclusion : Φ_{2n} est un endomorphisme de E si et seulement si $a = 2n$.

2. Soit $\lambda \in [\![-n, n]\!]$.

(Analyse :) S'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\Phi_{2n}(P) = \lambda P$, alors

- Si $\alpha = \beta = 0$, $P = 1$, donc $\Phi_{2n}(P) = 0 + 2nX \neq \lambda P$, donc $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.
- Si $\alpha = 0$ et $\beta > 0$, $P' = \beta\left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta-1}$, donc

$$\begin{aligned}
\Phi_{2n}(P) &= \left(\frac{1}{4} - X^2\right)\beta\left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta-1} + 2nX\left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta} \\
&= -\beta\left(X + \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta} + 2nX\left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta} \\
&= \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta}\left(2nX - \beta\left(X + \frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta}\left((2n - \beta)X - \frac{\beta}{2}\right) \\
&= \left((2n - \beta)X - \frac{\beta}{2}\right) P.
\end{aligned}$$

De la même façon, si $\beta = 0$ et $\alpha > 0$, $\Phi_{2n}(P) = \left((2n-\alpha)X - \frac{-\alpha}{2}\right) P$. Enfin, si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors

$$\begin{aligned}
P' &= \alpha \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta} + \beta \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta-1} \\
&= \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta-1} \left(\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right) + \beta \left(X + \frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta-1} \left((\alpha+\beta)X + \frac{\beta-\alpha}{2}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\Phi_{2n}(P) &= \left(\frac{1}{4} - X^2\right) P' + 2nXP \\
&= -\left(X + \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta-1} \left((\alpha+\beta)X + \frac{\beta-\alpha}{2}\right) \\
&\qquad + 2nX \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta} \\
&= \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta} \left(2nX - (\alpha+\beta)X - \frac{\beta-\alpha}{2}\right) \\
&= \left((2n-\alpha-\beta)X - \frac{\beta-\alpha}{2}\right) P.
\end{aligned}$$

Cette expression est encore valable pour $\alpha = 0$ et $\beta > 0$ et pour $\beta = 0$ et $\alpha > 0$, donc on a :

$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \Phi_{2n}(P) = \left((2n-\alpha-\beta)X - \frac{\beta-\alpha}{2}\right) P.$$

- On a donc, pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\Phi_{2n}(P) = \lambda P \Leftrightarrow \begin{cases} 2n - \alpha - \beta = 0 \\ \frac{\alpha-\beta}{2} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2n \\ \alpha - \beta = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = n + \lambda \\ \beta = n - \lambda \end{cases}.$$

(Synthèse :) Réciproquement, pour $\alpha = n + \lambda$ et $\beta = n - \lambda$,

- comme $\lambda \in [\![-n, n]\!]$, $n + \lambda \in \mathbb{N}$ et $n - \lambda \in \mathbb{N}$,
- $P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha} \left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta}$ est donc un polynôme comme produit de polynômes et $\deg(P) = \alpha + \beta = n + \lambda + n - \lambda = 2n$, donc $P \in E$.

- comme $(n+\lambda)+(n-\lambda)=2n\neq 0$, on a $(n+\lambda,n-\lambda)\neq(0,0)$, donc, par l'analyse, $\Phi_{2n}(\mathrm{P})=\lambda\mathrm{P}$

Conclusion : Pour tout $\lambda\in[\![-n,n]\!]$, $(\alpha,\beta)=(n+\lambda,n-\lambda)$ est l'unique couple d'entiers tel que $\mathrm{P}=\left(\mathrm{X}+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(\mathrm{X}-\frac{1}{2}\right)^{\beta}\in\mathrm{E}$ et $\Phi_{2n}(\mathrm{P})=\lambda\mathrm{P}$.

3. - De la question précédente, on déduit que tout $\lambda\in[\![-n,n]\!]$ est valeur propre de Φ_{2n} parce que le polynôme non nul $\left(\mathrm{X}+\frac{1}{2}\right)^{n+\lambda}\left(\mathrm{X}-\frac{1}{2}\right)^{n-\lambda}$ est un vecteur propre associé.
   Donc d'une part, $[\![-n,n]\!]\subset\mathrm{Sp}(\Phi_{2n})$, et pour tout $\lambda\in[\![-n\;;\;n]\!]$,
   $$\mathrm{Vect}\left(\left(\mathrm{X}+\frac{1}{2}\right)^{n+\lambda}\left(\mathrm{X}-\frac{1}{2}\right)^{n-\lambda}\right)\subset\mathrm{E}_{\lambda}(\Phi_{2n}).$$
   - Mais Φ_a est un endomorphisme de E, et E est de dimension $2n+1$, donc $\mathrm{card}(\mathrm{Sp}(\Phi_{2n}))\leqslant\dim\mathrm{E}=2n+1$, et comme $[\![-n,n]\!]$ contient $2n+1$ éléments deux à deux distincts, on peut conclure que $\mathrm{Sp}(\Phi_{2n})=[\![-n,n]\!]$.
   - Par conséquent, Φ_{2n} admet $2n+1$ valeurs propres distinctes, ce qui est une condition suffisante pour affirmer que Φ_{2n} est diagonalisable et que tous ses espaces propres sont de dimension 1.
   - Ainsi, par inclusion et égalité des dimensions, on sait que
   $$\mathrm{E}_{\lambda}(\Phi_{2n})=\mathrm{Vect}\left(\left(\mathrm{X}+\frac{1}{2}\right)^{n+\lambda}\left(\mathrm{X}-\frac{1}{2}\right)^{n-\lambda}\right),$$
   autrement dit le polynôme $\left(\mathrm{X}+\frac{1}{2}\right)^{n+\lambda}\left(\mathrm{X}-\frac{1}{2}\right)^{n-\lambda}$ constitue une base de $\mathrm{E}_{\lambda}(\Phi_{2n})$.
4. D'une part $\Phi_{2n}(1)=a\mathrm{X}$ et, pour tout $k\in[\![1,2n]\!]$,
   $$\Phi_{2n}(\mathrm{X}^k)=\left(\frac{1}{4}-\mathrm{X}^2\right)k\mathrm{X}^{k-1}+2n\mathrm{X}^{k+1}=(2n-k)\mathrm{X}^{k+1}+\frac{k}{4}\mathrm{X}^{k-1}.$$
   Donc en notant $\mathrm{A}=(a_{i,j})\in\mathscr{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de Φ_{2n} dans la base canonique de E, on constate que $a_{k,k}=0$ pour tout $k\in[\![0,2n]\!]$, car $a_{k,k}$ est le coefficient de degré k de $\Phi_{2n}(\mathrm{X}^k)$.
   Ainsi A a sa diagonale nulle, et a pour spectre le même spectre que Φ_a, c'est-à-dire $[\![-n\;;\;n]\!]$.
   De plus A comme Φ_{2n} est diagonalisable, donc il existe une matrice inversible P telle que
   $$\mathrm{A}=\mathrm{P}\times\mathrm{Diag}\,(-n,-(n-1),\ldots,0,1,\ldots,n)\times\mathrm{P}^{-1}.$$

Posons alors $\mathrm{B} = \mathrm{A} + n\mathrm{I}_{2n+1}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{B} = \mathrm{A} + n\mathrm{I}_{2n+1} &= \mathrm{P}\,\mathrm{Diag}(-n, -(n-1), \dots 0, 1, \dots, n)\mathrm{P}^{-1} + \mathrm{P}(n\mathrm{I}_{2n+1})\mathrm{P}^{-1}\\ &= \mathrm{P}\,\mathrm{Diag}(0,1,\dots,2n)\mathrm{P}^{-1},\end{aligned}$$

donc B est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) = [\![0,2n]\!]$.
De plus, comme $\mathrm{B} = \mathrm{A} + n\mathrm{I}_{2n+1}$, les coefficients diagonaux de B sont tous égaux à n.
La matrice B vérifie donc les conditions demandées dans l'énoncé.

5. Comme

$$\begin{aligned}\mathrm{B}^2 &= \mathrm{P} \times \mathrm{Diag}(0,1,\dots,2n) \times \mathrm{P}^{-1} \times \mathrm{P} \times \mathrm{Diag}(0,1,\dots,2n) \times \mathrm{P}^{-1}\\ &= \mathrm{P} \times \mathrm{Diag}(0,1^2,2^2,\dots,(2n)^2) \times \mathrm{P}^{-1},\end{aligned}$$

la matrice B^2 est diagonalisable et a pour spectre $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}^2) = \{0,1^2,\dots,(2n)^2\}$.
Or, $\mathrm{B}^2 = (\mathrm{A} + n\mathrm{I}_{2n+1})^2 = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}((\Phi_{2n} + n\,\mathrm{id}_\mathrm{E})^2)$, donc $\Psi = (\Phi_{2n} + n\,\mathrm{id}_\mathrm{E})^2$ convient.

Une correction de l'exercice 12.19 *énoncé*

1. (a) *Prouver la linéarité de façon classique est ici pénible à mon goût, je vous propose une méthode alternative dont vous me direz des nouvelles !*

Pour toute matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{E}_2$,

$$\begin{aligned}u(\mathrm{A}) &= \begin{pmatrix} (a+b)-a & (a+b)-b \\ (c+d)-c & (c+d)-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\\ &= \mathrm{A} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ainsi l'application u va bien de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et est linéaire par la bilinéarité du produit matriciel $(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \mapsto \mathrm{M} \times \mathrm{N}$.

(b) Par de menus calculs

$$u(\mathrm{K}_1) = \mathrm{K}_3,\quad u(\mathrm{K}_2) = \mathrm{K}_4,\quad u(\mathrm{K}_3) = \mathrm{K}_1,\quad u(\mathrm{K}_4) = \mathrm{K}_2,$$

donc

$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En échangeant la première et la troisième colonne, ainsi que la deuxième et la quatrième, de $\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, on obtient une matrice qui a le même déterminant, et cette matrice est la matrice unité, donc le déterminant de $\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est non nul, ce qui prouve qu'elle est inversible, donc que u est un automorphisme de E_2.

(c) On remarque que pour tout $i \in [\![1\ ;\ 4]\!]$, $u^2(K_i) = K_i$ donc $u^2 = \mathrm{id}_{E_2}$.
On en déduit que u est une symétrie.
Par conséquent, elle est diagonalisable et des valeurs propres sont -1 et 1.
On remarque aussi que

- $u(K_1+K_3) = K_1+K_3$ et $u\left(K_2+K_4\right) = K_2+K_4$, donc

$$\mathrm{Vect}\left(K_1+K_3, K_2+K_4\right) \subset \mathrm{Ker}\left(u - \mathrm{id}_{E_2}\right),$$

- et que $u(K_1-K_3) = -(K_1-K_3)$ et $u\left(K_2-K_4\right) = -\left(K_2-K_4\right)$ donc

$$\mathrm{Vect}\left(K_1-K_3, K_2-K_4\right) \subset \mathrm{Ker}\left(u + id_{E_2}\right).$$

Or on sait que

$$4 = \dim(E_2) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u - \mathrm{id}_{E_2}\right)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u + \mathrm{id}_{E_2}\right)\right),$$

et les deux inclusions ci-dessus prouvent que ces deux sous-espaces vectoriels sont de dimension au moins 2.
Par conséquent ils sont de dimension 2, et donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\left(u - \mathrm{id}_{E_2}\right) &= \mathrm{Vect}\left(K_1+K_3, K_2+K_4\right), \\ \text{et } \mathrm{Ker}\left(u + \mathrm{id}_{E_2}\right) &= \mathrm{Vect}\left(K_1-K_3, K_2-K_4\right). \end{aligned}$$

2. - Si $n = 2$, et $A \in E_2$, on a vu qu'on obtient $u(A)$ en échangeant les colonnes de A, donc

$$\det(u(A)) = -\det(A).$$

➟ Si $n=3$, et $A=(A_1|A_2|A_3)\in E_2$, alors

$$\begin{aligned}\det(u(A)) &= \det(A_2+A_3|A_1+A_3|A_1+A_2)\\ &\underset{C_1\leftarrow C_1-C_2-C_3}{=} \det(-2A_1|A_1+A_3|A_1+A_2)\\ &= -2\det(A_1|A_1+A_3|A_1+A_2)\\ &\underset{C_2\leftarrow C_2-C_1, C_3\leftarrow C_3-C_1}{=} -2\det(A_1|A_3|A_2)\\ &\underset{C_2\leftrightarrow C_3}{=} +2\det(A_1|A_2|A_3)\\ &= 2\det(A).\end{aligned}$$

3. Avec l'opération $C_1\leftarrow C_1+\sum_{j=2}^{n} C_j$, on a

$$\det(u(A)) = \det(B_1|B_2|\dots|B_n) = \det\left(\sum_{j=1}^{n} B_j \mid B_2|\dots|B_n\right),$$

mais

$$\sum_{j=1}^{n} B_j = nS - \sum_{j=1}^{n} A_j = (n-1)\sum_{j=1}^{n} A_j,$$

donc

$$\begin{aligned}\det(u(A)) &= (n-1)\det(A_1+\dots+A_n|B_2|\dots|B_n)\\ &= (n-1)\det(A_1+\dots+A_n|-A_2|\dots|-A_n) && \textit{(avec } C_j\leftarrow C_j-C_1 \textit{ pour } 2\leqslant j\leqslant n\textit{)}\\ &= (n-1)(-1)^{n-1}\det(A).\end{aligned}$$

4. Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Par définition de u, pour tout $j\in[\![1\,;\,n]\!]$, la j^{e} colonne de $u^2(A)=u(u(A))$ est

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} B_k - B_j &= (n-1)\sum_{k=1}^{n} A_k - B_j && \textit{(on l'a vu dans la question précédente)}\\ &= (n-1)S - B_j = (n-1)\left(A_j+B_j\right) - B_j\\ &= (n-1)A_j + (n-2)B_j.\end{aligned}$$

   On en déduit que $u^2(A) = (n-1)u(A) + (n-2)A$.

Cette relation étant vraie pour toute A, on conclut que

$$u^2-(n-2)u-(n-1)\,\mathrm{id}_E=0,$$

donc que $P=X^2-(n-2)X-(n-1)$ est un polynôme annulateur de u.

(b) Ce polynôme annulateur se factorise sous la forme $P=(X+1)(X-(n-1))$, c'est-à-dire un polynôme scindé à racines simples, qui admet pour racines -1 et $n-1$.
On en déduit d'une part que u est diagonalisable,
et d'autre part que $\mathrm{Sp}(u)\subset\{-1,n-1\}$.

- Pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned}u(A)=-A &\iff \forall j\in[\![1\,;\,n]\!],\ \ S-A_j=A_j\\ &\iff S=0.\end{aligned}$$

Donc $E_{-1}(u)$ est l'ensemble des matrices dont la somme des colonnes est nulle.

- Pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned}u(A)=(n-1)A &\iff \forall j\in[\![1\,;\,n]\!],\ \ S-A_j=(n-1)A_j\\ &\iff \forall j\in[\![1\,;\,n]\!],\ \ A_j=\frac{1}{n}S\\ &\iff A_1=\cdots=A_n.\end{aligned}$$

Donc $E_{n-1}(u)$ est l'ensemble des matrices dont toutes les colonnes sont égales.

5. (a) Soit $A=\left(a_{i,j}\right)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Grâce à la formule du produit marticiel, pour tout $(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}(A\times U_n)_{i,j}&=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}(U_n)_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\left(1-\delta_{k,j}\right)\\ &=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\ -a_{i,j},\end{aligned}$$

donc la j^{e} colonne de $A\times U_n$ sont les colonnes de $u(A)$.
Autrement dit, pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $u(A)=A\times U_n$.
On en déduit que

$$u^2(A)=(A\times U_n)\times U_n=A\times U_n^2.$$

Or

$$\mathrm{U}_n^2 = (\mathrm{J}_n - \mathrm{I}_n)^2 = \mathrm{J}_n^2 - 2\mathrm{J}_n + \mathrm{I}_n,$$

et pour tout $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$,

$$\left(\mathrm{J}_n^2\right) = \sum_{k=1}^{n} 1 \times 1 = n = n \times (\mathrm{J}_n)_{i,j}$$

donc $\mathrm{J}_n^2 = n\mathrm{J}_n$, et

$$\mathrm{U}_n^2 = (n-2)\mathrm{J}_n + \mathrm{I}_n = (n-2)(\mathrm{U}_n + \mathrm{I}_n) + \mathrm{I}_n = (n-2)\mathrm{U}_n + (n-1)\mathrm{I}_n.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u^2(\mathrm{A}) &= \mathrm{A} \times ((n-2)\mathrm{U}_n + (n-1)\mathrm{I}_n) = (n-2)\mathrm{A} \times \mathrm{U}_n + (n-1)\mathrm{A} \\ &= \left((n-2)u + (n-1)\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}_n}\right)(\mathrm{A}), \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 12.20 *énoncé*

- Je vous laisse prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
- Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{P}) = \lambda\mathrm{P} &\iff \mathrm{P}(\mathrm{X}) + (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'(\mathrm{X}) = \lambda\mathrm{P}(\mathrm{X}) \\ &\iff (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'(\mathrm{X}) = (\lambda-1)\mathrm{P}(\mathrm{X}) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \ \mathrm{P}'(x) = \frac{\lambda-1}{x-1}\mathrm{P}(x), \end{aligned}$$

or un corollaire du théorème de Cauchy sur les équations différentielles *(on verra ça plus tard, pas d'impatience)* nous permet d'affirmer que les solutions sur $]-\infty ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $y' = \frac{\lambda-1}{x-1}y$ forment une droite vectorielle engendrée par n'importe quelle solution particulière (non nulle, bien sûr).

➔ *(Sur notre brouillon, à l'abri des regards, on cherche une solution comme* *en physique*

$$\begin{aligned} y' = \frac{\lambda-1}{x-1}y &\iff \frac{y'}{y} = \frac{\lambda-1}{x-1} \\ &\iff \ln(y) = (\lambda-1)\ln(x-1) \\ &\quad \textit{sur le brouillon le prof de maths n'a pas le droit de venir} \\ &\quad \textit{chipoter, donc on écrit } \ln(y) \textit{ sans se soucier de ce que } \\ &\quad y>0 \\ &\iff y = \mathrm{e}^{(\lambda-1)\ln(x-1)} = (x-1)^{\lambda-1} \end{aligned}$$

et là on se dit que c'est un peu bête qu'on n'ait pas vu cette solution d'entrée mais bon tant pis c'est pas grave.)

La fonction $x \mapsto (x-1)^{\lambda-1}$ est solution sur $]-\infty\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$, donc les solutions sont des multiples de ces solutions.
Ainsi

$$\varphi(\mathrm{P}) = \lambda\mathrm{P} \iff \exists \mathrm{C} \in \mathbb{K},\ \ \mathrm{P} = \mathrm{C}(\mathrm{X}-1)^{\lambda-1},$$

donc

- si $\lambda \in \mathbb{N}^*$, alors $\lambda - 1 \in \mathbb{N}$, donc $(\mathrm{X}-1)^{\lambda-1}$ est bien un polynôme, autrement dit un élément de l'ensemble de départ $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, non nul, ainsi λ est valeur propre de φ et $\mathrm{E}_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}\left((\mathrm{X}-1)^{\lambda-1}\right)$;
- sinon, $\lambda - 1 \notin \mathbb{N}$, donc $(\mathrm{X}-1)^{\lambda-1} \notin \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. ainsi la seule solution dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de l'équation $\varphi(\mathrm{P}) = \lambda\mathrm{P}$ est la solution nulle, et par conséquent λ n'est pas valeur propre de φ.

➟ Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{X}-1)^k$ est vecteur propre de φ, ainsi la famille $\left((\mathrm{X}-1)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, qui est une base de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, est formée de vecteurs propres de φ, donc φ est diagonalisable.

Une correction de l'exercice 12.21 *énoncé*

➟ Supposons que u est diagonalisable, alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u.
Soit F un sous-espace vectoriel de E, de base $(x_1, \dots, x_p)$, grâce au théorème de la base incomplète, on complète cette famille libre $(x_1, \dots, x_p)$ avec des vecteurs de la base $(e_1, \dots, e_n)$, en une nouvelle base de E.
On peut noter cette base $(x_1, \dots, x_p, e_1, \dots, e_{n-p})$, quitte à réordonner les vecteurs e_i.

Ainsi $G = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-p})$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F stable par u.

➟ Réciproquement, par l'absurde, supposons que u n'est pas diagonalisable.
Alors $G = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ est un sous-espace vectoriel de E strictement inclus dans E. a alors $E_{\lambda i}$ en somme directe mais $E_{\lambda 1} \bigoplus \ldots \bigoplus E_{\lambda k} \neq E$ $((\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ sont les valeurs propres)
Considérer alors la restriction de u à G un supplémentaire de $F = E_{\lambda 1} \bigoplus \ldots \bigoplus E_{\lambda k}$ stable par u, son polynôme caractéristique divise celui de u sur E. Aboutir à une contradiction…

Une correction de l'exercice 12.22 *énoncé*

On commence par remarquer, en extrapolant l'égalité de diagonalisation ci-dessous

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

que l'on peut écrire

$$\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0_n & 3A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix}.$$

Ainsi $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0_n & 3A \end{pmatrix}$ est semblable à $C = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix}$.
Par conséquent :

1. Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$, donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} PDP^{-1} & 0_n \\ 0_n & 3PDP^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ 0_n & 3D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0_n \\ 0_n & P^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   donc C est diagonalisable, d'où B est aussi diagonalisable.

2. Réciproquement, supposons que B est diagonalisable , alors l'endomorphisme u canoniquement associé à B est encore diagonalisable. Mais la forme triangulaire par blocs de B montre l'existence d'un sous-espace vectoriel F stable par u, dans lequel u induit un endomorphisme $\tilde{u}$, qui a pour matrice A dans une certaine base. Or d'après la proposition 12.18,$\tilde{u}$ est diagonalisable comme u, donc A est diagonalisable.

On a prouvé que B est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Une correction de l'exercice 12.23 *énoncé*

1. ➟ La matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ possède n valeurs propres deux à deux distinctes, donc elle est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont tous des droites vectorielles.
   ➟ Soit X un vecteur propre de A, alors $AX = \lambda X$, λ étant une valeur propre de A. D'où
   $$\begin{aligned} BAX &= B(\lambda X) = \lambda BX, \\ \text{et } BAX &= ABX = A(BX) \quad (\textit{car } AB = BA) \end{aligned},$$
   ainsi BX est aussi dans $E_\lambda(A)$. Or $X \neq 0$, et ce sous-espace vectoriel est une droite vectorielle, donc $E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(X)$. Par conséquent, $BX \in \mathrm{Vect}(X)$, autrement dit il existe μ tel que $BX = \mu X$, ce qui prouve que X est aussi un vecteur propre de B.
   ➟ Ainsi la base de vecteurs propres de A est aussi une base de vecteurs propres de B, et B est aussi diagonalisable.
2. (a) Si $X^2 = A$ alors $AX = X^2 \times X = X^3 = X \times X^2 = XA$, donc X et A commutent.
   (b) Dans ce cas, X et A sont diagonalisables dans la même base de vecteurs propres, ou plutôt X et A sont semblables à une matrice diagonale via la même matrice de passage P. Notons ces matrices diagonales
   $$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
   et
   $$P^{-1}XP = \Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_n \end{pmatrix}.$$

Notons aussi $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, alors

$$\begin{aligned}
X^2 = A &\iff (P\Delta P^{-1})^2 = PDP^{-1} \\
&\iff P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} \\
&\iff \Delta^2 = D \\
&\iff \begin{pmatrix} \delta_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&\iff \Delta = \begin{pmatrix} \pm\lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm\lambda_2^{1/2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \pm\lambda_n^{1/2} \end{pmatrix} \\
&\iff X = P\begin{pmatrix} \pm\lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm\lambda_2^{1/2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \pm\lambda_n^{1/2} \end{pmatrix}P^{-1},
\end{aligned}$$

(en notant $z^{1/2}$ une des deux racines carrées complexes d'un nombre complexe z).

3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a 3 valeurs propres distinctes qui sont 3, 4 et 1, et on vérifie que

$$A = P\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

les trois colonnes de P étant les vecteurs propres respectifs obtenus par résolution des trois systèmes $(A - \lambda I_3)X = 0$ avec $\lambda \in \{3,4,1\}$, ou par n'importe quel moyen qui nous donne un vecteur propre non nul pour chacune des trois valeurs propres.

La méthode de Gauss-Jordan (opérations sur les lignes de $\left(P \mid I_3\right)$ jusqu'à obtenir $\left(I_3 \mid P^{-1}\right)$) nous donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi d'après la question précédente, les solutions de l'équation $X^2 = A$ sont

$$X = P \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

ce qui nous donne 9 solutions.

Une correction de l'exercice 12.24 *énoncé*

soit M une solution, c'est-à-dire une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ qui vérifie

$$M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Première méthode :

(i) Soit λ une valeur propre de M, alors il existe une colonne X non nulle telle que $MX = \lambda X$.
On en déduit alors par récurrence que $M^n X = \lambda^n X$, donc que λ^n est valeur propre de $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or cette dernière a pour unique valeur propre 0, donc $\lambda^n = 0$, d'où $\lambda = 0$.

(ii) La matrice M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, car son polynôme caractéristique est forcément scindé dans $\mathbb{C}[X]$, autrement dit, sachant que 0 est sa seule valeur propre, il existe un nombre complexe α tel que M est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Mais comme $T^2 = 0_2$, on en déduit que $M^2 = 0_2$, et pour tout entier $n \geqslant 2$, $M^n = 0_2$, ce qui rend impossible l'égalité $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) On conclut que

- si $n \geqslant 2$, il n'y a pas de solution ;

- si $n=0$, point de solution non plus car $M^0 = I_2 \neq \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- si $n=1$, il y a évidemment une solution unique qui est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Deuxième méthode : on suppose $n \geqslant 1$, car l'équation n'a pas de solution pour $n=0$, et on note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) $MJ = M^{n+1} = JM$, donc M commute avec J.

Or si on prend $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

$$MJ = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ et } JM = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc la forme nécessaire de M est $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

(ii) Or $J^2 = 0$, donc $M^{2n} = 0$, et M n'est pas inversible (sinon M^{2n} le serait aussi car un produit de matrices inversibles est une matrice inversible), donc $a = 0$.

(iii) Mais alors $M^n = b^n J^n$, donc $M^n = 0_2$ dès que $n \geqslant 2$, d'où :

- pour $n \geqslant 2$, l'équation n'a pas de solution ;
- pour $n = 1$, la seule solution est $M = J$

Une correction de l'exercice 12.25

énoncé

Notons A la matrice $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, ainsi que son endomorphisme canoniquement associé

$$A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

et T la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Trigonaliser A sous la forme T consiste à trouver une base (X_1, X_2, X_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\underset{(X_1,X_2,X_3)}{\mathrm{Mat}}(A) = T$$

ou moins abusivement

$$\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1} \text{ où } \mathrm{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 & \mathrm{X}_2 & \mathrm{X}_3 \end{pmatrix}$$

autrement dit trouver rois vecteurs $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$ tels que

$$\begin{aligned}
\mathrm{AX}_1 &= 2\mathrm{X}_1, \text{ c'est-à-dire } (\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3)\mathrm{X}_1 = 0 \\
\mathrm{AX}_2 &= \mathrm{X}_2, \text{ c'est-à-dire } (\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)\mathrm{X}_2 = 0 \\
\mathrm{AX}_3 &= \mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3, \text{ c'est-à-dire } (\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)\mathrm{X}_3 = \mathrm{X}_2 \\
&(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3) \text{ est libre.}
\end{aligned}$$

En résolvant les systèmes on peut choisir $\mathrm{X}_1 = (1,1,2)$, puis $\mathrm{X}_2 = (1,-2,0)$, et enfin $\mathrm{X}_3 = (-1/2, 0, -1)$, et on vérifie que ces trois vecteurs forment bien une base.
Ainsi

$$\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1} \text{ avec } \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

➟ On calcule T^2, T^3, voire T^4 et on en déduit avec une récurrence que

$$\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et on en déduit par un produit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{A}^n = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 4n - 1 & 2^n + 2n - 1 & -2^n - 3n + 1 \\ 2^{n+1} - 8n - 2 & 2^n - 4n & -2^n + 6n + 1 \\ 2^{n+2} - 4 & 2^{n+1} - 2 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}$$

Une correction de l'exercice 12.26

énoncé

1. Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est

$$\begin{vmatrix} x-5 & 6 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x(x-5) + 6 = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

Donc A admet deux valeurs propres deux à deux distinctes, 2 et 3, ce qui permet d'affirmer qu'elle est diagonalisable (et que ses sous-espaces propres sont de dimension 1, mais ça on s'en fiche ici).
On remarque que

$$\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ donc } (\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$
$$\text{et de même } (\mathrm{A} - 3\mathrm{I}_2)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

donc

$$\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1} \text{ avec } \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}.$$

Enfin, par la méthode de notre choix,

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

donc je vous laisse faire le calcul.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{V}_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{V}_n$$

donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{V}_0 &= \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{PD}^n\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{PD}^n\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 5 \times 2^n \\ -4 \times 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \times 2^n \\ -4 \times 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 2^{n+1} - 4 \times 3^{n+1} \\ 5 \times 2^n - 4 \times 3^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_n = 5 \times 2^n - 4 \times 3^n.$$

Une correction de l'exercice 12.27 *énoncé*

(i) On remarque déjà que la matrice I_n est solution.

(ii) Prenons une matrice M qui vérifie les conditions de l'énoncé.

→ Le polynôme $X^5 - X^2 = X^2(X^3-1) = X^2(X-1)(X-j)(X-\bar{j})$ étant annulateur de M, on en déduit que le spectre de M est inclus dans $\{0, 1, j, \bar{j}\}$.

→ On peut d'ores et déjà remarquer que M est diagonalisable puisqu'elle est annulée par un polynôme scindé à racines simples.

→ De plus, le spectre de u étant inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur, on en déduit que la forme factorisée dans $\mathbb{C}[X]$ (décomposition de d'Alembert) de χ_M est de la forme

$$\chi_M(X) = X^{m_0}(X-1)^{m_1}(X-j)^{m_j}(X-\bar{j})^{m_{\bar{j}}},$$

où m_0, m_1, m_j et $m_{\bar{j}}$ sont des entiers naturels qui peuvent être nuls dans le cas où ils ne correspondent pas à une véritable valeur propre de u.

Comme $\deg(\chi_u) = n$, on a de plus

$$m_0 + m_1 + m_2 + m_{\bar{j}} = n.$$

→ Le polynôme caractéristique de M *(comme tous les polynômes de* $\mathbb{C}[X]$ *!)* est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, donc

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(M) = n &= m_0 \times 0 + m_1 \times 1 + m_j \times j + m_{\bar{j}} \times \bar{j} \\ &= m_1 - \frac{1}{2}\left(m_j + m_{\bar{j}}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(m_j - m_{\bar{j}}\right) \quad \text{(car } j = \tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\text{)}. \end{aligned}$$

Ainsi, en identifiant parties réelle et imaginaire,

$$\left\{\begin{aligned} n &= m_0 + m_1 + m_j + m_{\bar{j}} \\ n &= m_1 - \tfrac{1}{2}\left(m_j + m_{\bar{j}}\right), \\ 0 &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(m_j - m_{\bar{j}}\right), \end{aligned}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{aligned} n &= m_0 + m_1 + 2m_j \\ n &= m_1 - m_j \\ m_j &= m_{\bar{j}} \end{aligned}\right.$$

Comme m_1 et m_j sont des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à n, la seule possibilité pour la deuxième équation $m_1 - m_j = n$ est que $m_1 = n$ et $m_j = 0$, et dans ce cas, les première et troisième équations donnent aussi $m_0 = 0$ et $m_{\bar{j}} = 0$.

Ainsi, M admet pour unique valeur propre 1.

→ La matrice M est diagonalisable et admet pour unique valeur propre 1, donc elle est semblable à I_n.

Or (*voir la remarque 5.5*) seule I_n elle-même est semblable à I_n, donc $M = I_n$.

(iii) En conclusion, la matrice I_n est la seule matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^5 = M^2$ et $\mathrm{tr}(M) = n$.

Une correction de l'exercice 12.28 *énoncé*

1. Comme A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence que $A^p = PD^pP^{-1}$, et comme D^p reste diagonale, on peut affirmer que A^p est encore diagonalisable.
2. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de A, et $m_1, \dots, m_p$ leurs ordres respectifs. Alors A est semblable à la matrice diagonale D dont la diagonale est formée des λ_i, chacune répétée m_i fois.

   Mais alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a vu que A^p est semblable à D^p, et D^p est la matrice diagonale dont la diagonale est formée des λ_i^p, chacun répétée m_i fois.

   On déduit de ce résultat que $\text{Tr}(A^p) = \sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i^p$.

   Quitte à changer la numérotation des valeurs propres, supposons que λ_i a un module strictement supérieur à celui de toutes les autres valeurs propres, alors

   $$\text{Tr}(A^p) = m_1\lambda_1 \times \left(1 + \sum_{i=2}^{p} \frac{m_i}{m_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^p\right)$$

   or pour tout $i \in [\![2, p]\!]$, $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$, donc quand p tend vers $+\infty$, $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^p$ tend vers 0, et $\text{Tr}(A^p) \underset{p \to +\infty}{\sim} m_1 \lambda_1^p$.

   De même, $\text{Tr}(A^{p+1}) \underset{p \to +\infty}{\sim} m_1 \lambda_1^{p+1}$, donc

   $$\frac{\text{Tr}(A^{p+1})}{\text{Tr}(A^p)} \underset{p \to +\infty}{\sim} \lambda_1, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction du problème 12.29 *énoncé*

1. Soit e un vecteur propre de u, alors il existe $k \in [\![1, m]\!]$ tel que $e \in \text{Ker}\,(u - \lambda_k \,\text{id}_E)$.

Or

$$\begin{aligned} P_u(u) &= \bigcirc_{i=1}^{m} (u - \lambda_i \,\mathrm{id}_E) \\ &= \bigcirc_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} (u - \lambda_i \,\mathrm{id}_E) \circ (u - \lambda_k \,\mathrm{id}_E) \quad \textit{(car les endomorphismes obtenus comme polynômes de } u \textit{ commutent entre eux)} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} P_u(u)(e) &= \bigcirc_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} (u - \lambda_i \,\mathrm{id}_E)((u - \lambda_k \,\mathrm{id}_E)(e)) \\ &= \bigcirc_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} (u - \lambda_i \,\mathrm{id}_E)(0_E) \quad \textit{(car } e \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_k \,\mathrm{id}_E)\textit{)} \\ &= 0_E. \end{aligned}$$

Donc $e \in \mathrm{Ker}(P_u(u))$.

2. Si u est diagonalisable, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E formée de vecteurs propres de u. D'après la question précédente, $P_u(u)$ est alors nul sur cette base, donc $P_u(u)$ est l'endomorphisme nul.
3. Si u est diagonalisable, alors son polynôme caractéristique est scindé sous la forme

$$\chi_u(X) = (X - \lambda_1)^{p_1} \times \cdots \times (X - \lambda_m)^{p_m}$$

où les ordres de multiplicité p_i des valeurs propres sont supérieurs ou égaux à 1. Par conséquent,

$$\chi_u(X) = P_u(X) \times (X - \lambda_1)^{p_1 - 1} \times \cdots \times (X - \lambda_m)^{p_m - 1} = P_u(X) \times B(X)$$

d'où $\chi_u(u) = P_u(u) \circ B(u)$ est l'endomorphisme nul car $P_u(u)$ est nul.
4. On suppose qu'un polynôme B de $\mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples annule u.
   (a) Le polynôme B annule u, donc toutes les valeurs propres de u sont racines de B, et par conséquent $P_u(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_m)$ divise B.

(b) On sait que B est scindé à racines simples, et divisible par P_u, donc le quotient Q de B par P_u est de la forme

$$Q(X) = (X - \mu_1) \times \cdots \times (X - \mu_r)$$

où aucun des μ_i n'est valeur propre de u.

Ainsi $Q(u) = (u - \mu_1 \operatorname{id}_E) \times \cdots \times (u - \mu_r \operatorname{id}_E)$, et comme aucun des μ_i n'est valeur propre de u, tous les $u - \mu_i \operatorname{id}_E$ sont des endomorphismes injectifs, donc leur composée $Q(u)$ est aussi un endomorphisme injectif.

Le polynôme B annule u, donc $B(u) = \theta_E$, c'est-à-dire $P_u(u) \circ Q(u) = \theta_E$, et comme on sait que ces deux endomorphismes commutent entre eux $Q(u) \circ P_u(u) = \theta_E$.

Ainsi pour tout $x \in E$, $P_u(u)(x) \in \operatorname{Ker}(Q(u))$, et comme $\operatorname{Ker}((Q(u)) = \{0_E\}$, $P_u(u)(x) = 0_E$.

On a bien prouvé que P_u est un polynôme annulateur de u.

5. (a) Par propriété des polynômes de Lagrange, on sait que les coordonnées de tout polynôme $P \in \mathbb{K}_{m-1}[X]$ a pour coordonnées $(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_m))$ dans la base de Lagrange considérée.

En particulier

$$1 = \sum_{k=1}^{m} L_i(X),$$

donc en u

$$\operatorname{id}_E = \sum_{k=1}^{m} L_i(u).$$

De plus, pour tout $i \in [\![1 \; ; m]\!]$, par définition des L_i :

$$\begin{aligned}(X - \lambda_i) \times L_i(X) &= \frac{1}{\square}(X - \lambda_i) \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} (X - \lambda_k) \quad \textit{(où } \square \textit{ est un scalaire non nul)} \\ &= \frac{1}{\square} P_u(X),\end{aligned}$$

d'où en u

$$(u-\lambda_i\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}})\circ \mathrm{L}_i(u)=\frac{1}{\square}\mathrm{P}_u(u)=0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})},$$

donc $\mathrm{Im}\,(\mathrm{L}_i(u))\subset \mathrm{Ker}\,(u-\lambda_i\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}})$, C.Q.F.D.

(b) On sait déjà que les sous-espaces propres sont en somme directe. De plus, pour tout $x\in\mathrm{E}$,

$$\begin{aligned} x=\mathrm{id}_{\mathrm{E}}(x)&=\left(\sum_{i=1}^{m}\mathrm{L}_i(u)\right)(x)\\ &=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{L}_i(u)(x)\in\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Im}\,(\mathrm{L}_i(u))\end{aligned}$$

donc d'après la question précédente :

$$x\in\sum_{i=1}^{m}\mathrm{E}_{\lambda_i}(u).$$

Ainsi $\mathrm{E}\subset\sum\limits_{k=1}^{m}\mathrm{E}_{\lambda_k}(u)$, et l'inclusion réciproque étant évidente, on peut conclure que

$$\mathrm{E}=\bigoplus_{k=1}^{m}\mathrm{E}_{\lambda_k}(u).$$

(c) Les sous-espaces propres de u sont ainsi supplémentaires dans E, donc u est diagonalisable.

Une correction de l'exercice 12.30 *énoncé*

1. *Préliminaires.*

   (a) ➟ L'entier n est dans $\mathbb{N}^*$, donc pour tout $k\in\mathbb{Z}$,

$$\left(\omega_n^k\right)^n=\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\right)^k\right)^n=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n}}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,2\pi}=1.$$

➟ Soit k et k' deux entiers de $[\![0\ ;\ n-1]\!]$, tels que $k \neq k'$, alors

$$\begin{aligned}\omega_n^k = \omega_n^{k'} &\Longleftrightarrow e^{ik\frac{2\pi}{n}} = e^{ik'\frac{2\pi}{n}} \Longleftrightarrow e^{i\left(\frac{k-k'}{n}\right)2\pi} = 1\\ &\Longleftrightarrow \frac{k-k'}{n} \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow k-k' \text{ est un multiple de } n.\end{aligned}$$

Or k et k' sont dans $[\![0\ ;\ n-1]\!]$, donc $k-k' \in [\![-(n-1)\ ;\ n-1]\!]$, et le seul multiple de n dans cet intervalle est 0, donc

$$\omega_n^k = \omega_n^{k'} \Longrightarrow k = k',$$

ce qui est l'implication demandée mais contraposée.

➟ On déduit du résultat précédent que pour tout $k \in [\![0\ ;\ n-1]\!]$, les ω_n^k sont n nombres complexes deux à deux distincts, et du premier résultat que ce sont des racines n^e de l'unité, donc ils forment exactement l'ensemble des n racines du polynôme $X^n - 1$, qui se factorise alors sous la forme demandée

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \omega_n^k\right).$$

(b) Soit $s \in \mathbb{Z}$. Alors comme au-dessus,

$$\omega_n^s = 1 \Longleftrightarrow e^{i\left(\frac{s}{n}\right)2\pi} = 1 \Longleftrightarrow \frac{s}{n} \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow s \text{ est un multiple de } n,$$

donc

$$\sum_{q=0}^{n-1}\omega_n^{sq} = \sum_{q=0}^{n-1}\left(\omega_n^s\right)^q = \begin{cases}\displaystyle\sum_{q=0}^{n-1} 1 = n & \text{si } s \text{ est un multiple de } n,\\ \frac{1-\left(\omega_n^s\right)^n}{1-\omega_n^s} = \frac{1-1}{1-\omega_n^s} = 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2. (a) Pour $n = 2$, $w_2 = e^{i\frac{2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$, donc

$$A_2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible car de déterminant non nul -2, et son inverse est

$$A_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}A_2.$$

(b) On sait que $A_2^2 = 2I_2$, donc le polynôme $X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$, qui est scindé dans $\mathbb{R}$ à racines simples, annule A_2, ce qui prouve que A_2 est diagonalisable, et que ses valeurs propres ne peuvent être que $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$. Comme

$$\left(A_2 - \sqrt{2}I_2\right) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} = 0, \text{ et } \left(A_2 + \sqrt{2}I_2\right) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} = 0,$$

on conclut que $\sqrt{2}$ ainsi que $-\sqrt{2}$ sont valeurs propres de A_2, donc que les sous-espaces propres sont des droites vectorielles, et que d'après ces calculs

$$\forall \varepsilon \in \{\pm 1\}, \ E_{\varepsilon\sqrt{2}}(A_2) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 + \varepsilon\sqrt{2} \end{pmatrix}\right).$$

> *On pouvait aussi remarquer que la matrice A_2 est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable par le théorème spectral.*

3. *Exemples de transformées de Fourier discrètes.*

(a) -i)- Si $x = e_\Sigma = \sum_{k=0}^{n-1} e_k$, alors

$$y = F\left(e_\Sigma\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{kj} \times 1\right) e_k,$$

or d'après la question 1(b), $\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{kj} = 0$ si $k \neq 0$, et vaut n si $k = 0$, donc

$$y = F\left(e_\Sigma\right) = n \times e_0 + \sum_{k=1}^{n-1} 0 \times e_k = ne_0.$$

-ii)- Si $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| \neq 1$, et $x = \sum_{k=0}^{n-1} e_k$, alors

$$y = F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{kj} \times a^j\right) e_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left(a \times \omega_n^k\right)^j\right) e_k,$$

or $\left|a\omega_n^k\right| = |a| \neq 1$, donc a fortiori $a\omega_n^k \neq 1$, d'où

$$y = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 - \left(a\omega_n^k\right)^n}{1 - a\omega_n^k}\right) e_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 - a^n}{1 - a\omega_n^k} e_k \ \textit{(car } \omega_n^n = 1\textit{)}$$

$$= (1 - a^n) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - a\omega_n^k} e_k.$$

-iii)- Dans le cas où $x = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} e_k$,

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{kj} \binom{n-1}{j} \right) e_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\omega_n^k\right)^j 1^{(n-1)-j} \right) e_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \omega_n^k\right)^{n-1} e_k.
\end{aligned}$$

(b) Dans le cas où $x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k$ avec pour tout $k \in [\![0 \,;\, n-1]\!]$, $x_k \in \mathbb{R}$, alors les coordonnées de y sont les $y_k = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{kj} x_j$, pour $k \in [\![0 \,;\, n-1]\!]$, et

$$\overline{y_{n-k}} = \overline{\left(\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{(n-k)j} x_j \right)} = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\omega_n^{(n-k)j}} \times x_j$$ *(car la conjugaison « passe à travers » la somme et le produit)*

$$= \sum_{j=0}^{n-1} e^{-i(n-k)j\frac{2\pi}{n}} \times x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{e^{-inj\frac{2\pi}{n}}}_{=1} \times e^{ikj\frac{2\pi}{n}} \times x_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} e^{ijk\frac{2\pi}{n}} \times x_j = y_k$$

4. *Inversibilité de A_n dans le cas général et formule de Parseval.*

> *Dans ce problème en général, il faut prendre garde à ne pas utiliser la lettre « i » pour autre chose que pour le nombre imaginaire dont le carré est -1, même si on est tenté de l'utiliser pour indexer les lignes des matrices.*
> *On va tout de même s'accorder la lettre « j » pour les colonnes.*

(a) On rappelle que $\overline{\omega_n} = e^{-i\frac{2\pi}{n}} = \omega_n^{-1}$, et par conséquent, on remarque que $\overline{A_n} = \left(\omega_n^{-kj}\right)_{(k,j)\in[\![0\,;\,n-1]\!]^2}$.

Ainsi pour tout $(k, j) \in [\![0 \,;\, n-1]\!]^2$:

$$\left(A_n \times \overline{A_n}\right)_{k,j} = \sum_{h=0}^{n-1} \omega_n^{hk} \omega_n^{-hj} = \sum_{h=0}^{n-1} \omega_n^{h(k-j)}$$

Or on a vu que $\sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{sq} = \begin{cases} n & \text{si } s \text{ est un multiple de } n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$
et ici $s = k-j \in [\![-(,-1)\,;n-1]\!]$ est multiple de n uniquement pour $k-j=0$, donc

$$\left(\mathrm{A}_n \times \overline{\mathrm{A}_n}\right)_{k,j} = \begin{cases} n & \text{si } k=j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui prouve que $\boxed{\mathrm{A}_n \times \overline{\mathrm{A}_n} = n\mathrm{I}_n}$.
On en déduit que A_n est inversible, et que $\mathrm{A}_n^{-1} = \frac{1}{n}\mathrm{A}_n$.

(b) Donc F_n est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice A_n dans la base canonique est inversible, par conséquent F_n est bijective de réciproque l'endomorphisme associé à $\dfrac{1}{n}\overline{\mathrm{A}_n}$ dans $\mathscr{B}$, autrement dit $\boxed{\mathrm{F}_n^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{\mathrm{F}_n}}$.

(c) Remarquons d'ores et déjà que A_n, ainsi que $\overline{\mathrm{A}_n}$, sont symétriques puisque $(\mathrm{A}_n)_{k,j} = \omega_n^{kj}$.
Ainsi pour tout $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{X}}^{\top} \times \mathrm{A}_n\mathrm{X} = \left(\overline{\mathrm{A}_n} \times \overline{\mathrm{X}}\right)^{\top} \times \mathrm{A}_n\mathrm{X} = \left(\overline{\mathrm{X}}^{\top} \times \overline{\mathrm{A}_n}^{\top}\right) \times \mathrm{A}_n\mathrm{X}$ *(par propriété de la transposition)*

$= \overline{\mathrm{X}}^{\top} \times \overline{\mathrm{A}_n}^{\top} \times \mathrm{A}_n\mathrm{X}$ *(je vous laisse vous convaincre que conjuguer puis transposer revient au même que transposer puis conjuguer)*

$= \overline{\mathrm{X}}^{\top} \times \dfrac{1}{n}\mathrm{I}_n \times \mathrm{X}$ *(par la question précédente)*

$= \dfrac{1}{n}\overline{\mathrm{X}}^{\top} \times \mathrm{X}$, C.Q.F.D.

(d) Soit $x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k$, et $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$.
D'une part, on n'a pas oublié que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = z \times \overline{z}$, et d'autre part, on rappelle que A_n est la matrice de F_n dans la base canonique, donc que $\mathrm{A}_n\mathrm{X}$ est la colonne des coordonnées de $y = \mathrm{F}_n(x)$ dans la base canonique, autrement dit

$$\mathrm{A}_n\mathrm{X} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{kj} x_j\right)_{k \in [\![0\,;n-1]\!]}.$$

Par conséquent,

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_n^{kj}x_j\right|^2 = \overline{\left(\sum_{j=0}^{n-1}\omega_n^{kj}x_j\right)} \times \sum_{j=0}^{n-1}\omega_n^{kj}x_j$$
$$= \overline{(\mathrm{A}_n\mathrm{X})_k}\,(\mathrm{A}_n\mathrm{X})_k$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_n^{kj}x_j\right|^2 = \sum_{h=0}^{n-1}\overline{(\mathrm{A}_n\mathrm{X})_k}\,(\mathrm{A}_n\mathrm{X})_k$$
$$= \left(\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{X}}\right)^\top \times \mathrm{A}_n\mathrm{X} = n\overline{\mathrm{X}}^\top \times \mathrm{X} \quad \textit{(par la question précédente)}$$
$$= n \times \sum_{k=0}^{n-1}|x_k|^2, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

5. *Valeurs propres de* A_n.

   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A_n, alors il existe un vecteurs non nul $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{A}_n\mathrm{X} = \lambda\mathrm{X}$.
   Par conséquent

$$\left(\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{X}}\right)^\top \times \mathrm{A}_n\mathrm{X} = \overline{\lambda\mathrm{X}}^\top \times \lambda\mathrm{X} = |\lambda|^2\,\mathrm{X}^\top\mathrm{X} = |\lambda|^2\sum_{k=0}^{n-1}|x_k|^2 .$$

   Mais la question précédente nous donne

$$\left(\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{X}}\right)^\top \times \mathrm{A}_n\mathrm{X} = n \times \mathrm{X}^\top\mathrm{X} = n \times \sum_{k=0}^{n-1}|x_k|^2 .$$

   Ainsi

$$|\lambda|^2\sum_{k=0}^{n-1}|x_k|^2 = n \times \mathrm{X}^\top\mathrm{X} = n \times \sum_{k=0}^{n-1}|x_k|^2 ,$$

   mais $\sum_{k=0}^{n-1}|x_k|^2 \neq 0$ puisque $\mathrm{X} \neq 0$, donc on obtient $|\lambda|^2 = n$, d'où $|\lambda| = \sqrt{n}$.

(b) Pour tout $(\ell, j) \in [\![0, n-1]\!]^2$,

$$\begin{aligned}(A_n^2)_{\ell,j} &= \sum_{k=0}^{n-1} (A_n)_{\ell,k} \times (A)_{k,j} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{\ell \times k} \times \omega_n^{k \times j} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{k(\ell+j)} = \begin{cases} n & \text{si } \ell + j \text{ est un multiple de } n \\ 0 & \text{sinon } \textit{(d'après le préliminaire).} \end{cases}\end{aligned}$$

Or $\ell + j \in [\![0\,;2n-2]\!]$, donc $\ell + j$ est multiple de n si, et seulement si, $\ell = j = 0$ ou $\ell + j = n$, ce qui nous donne aux noms des indices près le résultat voulu.

(c) On peut découper la matrice A_n^2 obtenue ci-dessus en blocs de la façon suivante

$$A_n^2 = n \times \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & & 0 & & \\ \hline & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & 0 & & \iddots & \vdots \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

ainsi, en notant B le bloc sud-est qui est une matrice carrée de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, le terme général de B est $(B)_{i,j} = \delta_{i,n-1-j}$, et

$$\left(B^2\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{i,n-1-k} \times \delta_{k,n-1-j} = 1 \times \delta_{n-1-i,n-1-j} = \delta_{i,j},$$

donc $B^2 = I_{n-1}$, d'où par un simple produit par blocs, on obtient

$$A_n^4 = n^2 I_n.$$

Donc un polynôme annulateur de A_n est $X^4 - n^2$, et comme les racines de ce polynôme sont $\pm\sqrt{n}$ et $\pm i\sqrt{n}$, ce sont aussi les seules valeurs propres possibles de A_n.

6. *Construction de vecteurs propres de* F_n

(a) Les coordonnées de $F_n(e_1)$ sont dans la seconde colonne de A_n (puissances de ω_n) et celles de $F_n(e_{n-1})$ dans la dernière (les puissances de ω_n^{n-1}).
La composante d'indice $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$ de $F_n(e_1 + e_{n-1})$ est donc

$$\begin{aligned}\omega_n^k + \omega_n^{(n-1)k} &= \omega_n^k + \omega_n^{nk}\omega_n^{-k} = \omega_n^k + \omega_n^{-k} \ \textit{(car } \omega_n^{nk} = 1\textit{)} \\ &= e^{i2k\pi/n} + e^{-i2k\pi/n} = 2\cos(2k\pi/n)\end{aligned}$$

et $\boxed{F_n(e_1 + e_{n-1}) = 2e_{\cos} \text{ et de même } F_n(e_1 - e_{n-1}) = 2i\, e_{\sin}}$

(b) On a vu que $A_n^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ donc, avec la deuxième et la dernière colonne, $G(e_1) = ne_{n-1}$ et $G(e_{n-1}) = ne_1$, ainsi

$$G(e_1 + e_{n-1}) = ne_1 + ne_{n-1} = n(e_n + e_{n-1})$$
$$\text{et } G(e_1 - e_{n-1}) = n(e_{n-1} - e_1) = -n(e_1 - e_{n-1}).$$

Or

$$F_n(e_{\cos}) = F_n\left(\frac{1}{2}F_n(e_1 + e_{n-1})\right) = \frac{1}{2}G(e_1 + e_{n-1})$$

donc $\boxed{F_n(e_{\cos}) = \frac{n}{2}(e_1 + e_{n-1})}$.
De même

$$e_{\sin} = \frac{1}{2i}F_n(e_1 - e_{n-1}) = -\frac{i}{2}F_n(e_1 - e_{n-1})$$

donc

$$F_n(e_{\sin}) = -\frac{i}{2}G(e_1 - e_{n-1}) = i\frac{n}{2}(e_1 - e_{n-1}).$$

(c) La famille $(e_1 + e_{n-1}, e_{\cos})$ est libre (à l'oeil nu !) et génératrice de Q, donc c'est une base de Q et $\boxed{\dim Q = 2}$.
On sait que $F_n(e_1 + e_{n-1}) = 2e_{\cos} \in Q$ et $F_n(e_{\cos}) = \frac{n}{2}(e_1 + e_{n-1}) \in Q$, donc

$$F(Q) = F(\text{Vect}(e_1 + e_{n-1}, e_{\cos})) = \text{Vect}(F(e_1 + e_{n-1}), F(e_{\cos})) \subset Q,$$

autrement dit $\boxed{\text{Q est stable par } F_n}$, et

$$\underset{\mathscr{B}}{\text{Mat}}(F_{n|Q}) = \begin{pmatrix} 0 & n/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $X^2 - n$, donc

$$\boxed{\text{les valeurs propres de C sont } \pm\sqrt{n}.}$$

Je vous laisse retrouver que $(\sqrt{n}/2,1)$ est vecteur propre associé à $\sqrt{n}$, et que $(-\sqrt{n}/2,1)$ est vecteur propre associé à $-\sqrt{n}$, et conclure que

$$\boxed{\left((\sqrt{n}/2,1)\ ,\ (-\sqrt{n}/2,1)\right) \text{ est une base de vecteurs propres de } \mathrm{C}}.$$

On en déduit que le vecteur de coordonnées $(\sqrt{n}/2,1)$ dans $(e_1+e_{n-1},e_{\cos})$ est vecteur propre de $\mathrm{F}_{n|\mathrm{Q}}$ donc de F_n associé à $\sqrt{n}$, donc

$$\boxed{\sqrt{n} \text{ est valeur propre de } \mathrm{F}_n \text{ associé à } \frac{\sqrt{n}}{2}\left(e_1+e_{n-1}\right)+e_{\cos}},$$

et

$$\boxed{-\sqrt{n} \text{ est valeur propre de } \mathrm{F}_n \text{ associé à } -\frac{\sqrt{n}}{2}\left(e_1+e_{n-1}\right)+e_{\cos}}.$$

(d) On reproduit exactement le même raisonnement avec les vecteurs e_1-e_{n-1} et $e_{\sin}$, qui nous permet de conclure que

$$\boxed{i\sqrt{n} \text{ est valeur propre de } \mathrm{F}_n \text{ associé à } \frac{\sqrt{n}}{2}\left(e_1-e_{n-1}\right)+e_{\sin}},$$

et

$$\boxed{-i\sqrt{n} \text{ est valeur propre de } \mathrm{F}_n \text{ associé à } -\frac{\sqrt{n}}{2}\left(e_1-e_{n-1}\right)-e_{\sin}}.$$

(e) On a vu en 5(c) que les seules valeurs propres possibles de F_n sont $\pm\sqrt{n}$ et $\pm i\sqrt{n}$, et d'après la question précédente, elles sont effectivement valeurs propres, donc

$$\boxed{\text{Et les valeurs propres de } \mathrm{F}_n \text{ sont } \pm\sqrt{n} \text{ et } \pm i\sqrt{n}}.$$