

Exercice 13.1 – Raisonnements élémentaires sur les sup et inf

Soient A, B des parties non vides de $\mathbb{R}$, et $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.
Montrer que si A et B sont bornées, alors $A + B$ l'est aussi, et

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B), \quad \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B).$$

Convergences des suites de fonctions

Exercice 13.2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = e^{\frac{(n-1)x}{n}}$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la suite des fonctions f_n est uniformément convergente sur tout intervalle $]-\infty, b]$, où $b \in \mathbb{R}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13.3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0 ; 1]$, on pose $f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de ces fonctions.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
En déduire que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.
3. Donner une démonstration directe de ce que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 13.4

Soit, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx}).$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0 ; +\infty[$ vers une fonction que l'on déterminera.
2. Pour quelles valeurs de α la suite converge-t-elle uniformément sur $[0 ; +\infty[$ vers f ?
3. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx}) dx$.

Exercice 13.5

Étudier le mode de convergence des suites de fonctions définies ci-dessous :

$$(1) \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \cos(x) (\sin(x))^n, \quad (2) \quad x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{ne^{-x} + 1}{n + x^2},$$

$$(3) \quad x \in]0, +\infty[\mapsto \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad (4) \quad x \in \mathbb{R} \mapsto nxe^{-nx^2}.$$

Exercice 13.6

Justifier leur existence, puis calculer les limites quand $n \rightarrow +\infty$ des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} dx, \quad \int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} dt.$$

(On pourra justifier avec profit que pour tout $t > -1$, $\ln(1+t) \leq t$.)

Exercice 13.7

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$, on pose $I_n = \int_0^1 n^2 x e^{-nx} f(x) dx$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = f(0) \text{ (on pourra poser } x = t/n \text{).}$$

Exercice 13.8 – 🔥

Que dire d'un polynôme borné sur $\mathbb{R}$? Montrer que la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes est encore un polynôme.

Exercice 13.9 – 🔥 Oral X

Étudier le mode de convergence de la suite des fonctions f_n définies sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0; n[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 13.10 – 🔥

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant uniformément sur un intervalle I vers une fonction f .

Montrer que la suite des fonctions $\frac{f_n}{1 + f_n^2}$ converge uniformément sur I .

Exercice 13.11 – Oral Mines

Soit $f : x \mapsto 2x(1 - x)$. Étudier la convergence simple sur $[0 ; 1]$, uniforme sur $[0 ; 1]$, et uniforme sur tout segment de $]0 ; 1[$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Convergences des séries de fonctions

Exercice 13.12

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $J = [1, +\infty[$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur J .

On note alors pour tout x de J , $\varphi : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sa somme.

2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J .

3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J .

4. Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = 1$.

5. (a) Justifier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

(b) En notant $a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, montrer que $\varphi(x) = 1 + \frac{a}{\sqrt{x}} + \underset{x \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Exercice 13.13

Pour tous $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment $[0, A]$.

3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geq \frac{1}{5}$.

En déduire que la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0 ; +\infty[$.

4. Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

5. Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0, A]$ avec $A > 0$, mais pas sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 13.14 – 🔥

Montrer que la série des fonctions g_n définies sur $[0 ; 1]$ par

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in \left] \frac{1}{n+1} ; \frac{1}{n} \right], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

converge uniformément mais pas normalement sur $[0 ; 1]$.

Exercice 13.15

Étudier le mode de convergence des **séries** de fonctions ci-dessous :

$$(1) \ x \in]0 ; +\infty[\mapsto \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2} \quad (2) \ x \in]0 ; +\infty[\mapsto \frac{(-1)^{n-1}e^{-nx}}{\sqrt{n}}$$

$$(3) \ x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \quad (4) \ x \in [0 ; +\infty[\mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

$$(5) \ x \in]0 ; +\infty[\mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)} \quad (6) \ x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t+nx)}{n^3+t^2} dt$$

Continuité de la somme d'une série, interversions limites (dont les sommes infinies) et intégrales

Exercice 13.16

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt} - 1} dt$ est définie sur $]0 ; +\infty[$.

2. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

Exercice 13.17 – (*) - Extrait d'un Oral Centrale-Supelec

Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, où $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$.

Exercice 13.18

Calculer $I_n = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-int}}{2 + e^{it}} dt$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 13.19 – Oral ICNA

1. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, existence et calcul de $I(p, q) = \int_0^1 x^p (\ln x)^q dx$.
2. Montrer que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Exercice 13.20

On rappelle que la fonction ζ est définie sur $]1; +\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Démontrer pour tout $\alpha > 1$ que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$ est convergente.
2. Établir pour tout $\alpha > 1$ l'égalité $\int_\alpha^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$.

Régularité d'une fonction définie par une somme infinie

Exercice 13.21

On considère la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

1. Vérifier que f est définie et continue sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
2. Montrer que, pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $2^{N+1} \sin\left(\frac{x}{2^N}\right) \prod_{n=0}^N \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sin(2x)$.
3. Calculer $\int_0^x f(t) dt$, et en déduire une expression de $f(x)$.

Exercice 13.22 – 🧨 Oral Centrale

1. Sur quelle partie $\mathcal{D}$ de $[0; +\infty[$ la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ est-elle définie ?
2. Étudier la continuité sur $\mathcal{D}$ de S (remarquer que $S(x) = S\left(\frac{1}{x}\right)$).
3. Étudier les variations de S et trouver un équivalent aux extrémités de $\mathcal{D}$.

Exercice 13.23

1. Vérifier que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est définie et continue sur $]0 ; +\infty[$, et étudier sa monotonie.
2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$.
(b) En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 13.24 – 🔥

1. Vérifier que $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx)}$ est définie et continue sur $]0 ; +\infty[$.
2. Étudier la monotonie de la fonction f définie ci-dessus.
3. (a) Montrer que f admet en $+\infty$ une limite que l'on donnera.
(b) Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$
(on pourra étudier la limite de $xf(x)$).
4. Grâce à une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 13.25

1. Donner le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0 ; +\infty[$.
3. Calculer une expression de la dérivée de $x \mapsto e^{-x}f(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.
En déduire l'expression de $f(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.
4. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0 ; +\infty[$.

Exercice 13.26

1. Dériver la fonction $x \in]-1 ; 1[\mapsto \arctan\left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x}\right)$.
2. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$ pour tout $x \in]-1 ; 1[$.

Exercice 13.27 – CCINP 2021 : résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cet exercice, on étudie le problème (P) qui consiste à déterminer les fonctions f définies sur $]0 ; +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui vérifient les deux conditions :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

1. Montrer que la série des fonctions φ_k converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k$ la somme de cette série :

$$\varphi : x \in]0 ; +\infty[\mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

2. Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

3. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

4. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

5. Montrer que si f est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution φ du problème (P).

7. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.

8. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ en 0.

9. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

10. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

11. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on détermine une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0, +\infty[$.

12. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que $t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que

$$\int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) dt = -\frac{1}{(x+k)^2}.$$

13. En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$ et que :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t} dt.$$

Exercice 13.28 – Mines Ponts MP-MPI 2023

Dans tout le sujet, l'intervalle $] -1, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ est appelé I .

On considère les fonctions

$$\sigma : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}, \quad \text{et} \quad f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt,$$

et on se propose, dans ce problème, d'étudier certaines propriétés de f .

Calcul de $\sigma(1)$

- Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.
- Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2},$$

puis vérifier que si $t \in]0, \pi]$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

- Justifier que, si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = 0,$$

et en conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Équivalents

4. Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que

$$\forall x \in I, (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2).$$

5. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I .

6. Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1 .

7. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)},$$

puis que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

8. Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

Convergence de suite de fonctions

On se propose dans cette partie de calculer $f''(0)$. Dans ce but, on considère deux nombres réels strictement positifs a et b , et on pose

$$\rho = \frac{b-a}{b+a}.$$

On appelle Ψ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) = \ln(a^2 \cos^2(x) + b^2 \sin^2(x)).$$

9. Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Psi'(x) = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx).$$

10. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(x) = 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k.$$

11. En conclure que

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 4\pi \left(\ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \right)^2 + 2\pi\sigma(\rho^2).$$

On définit les suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } b_n = \frac{n}{n+1}.$$

12. Établir la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, \pi[, \Psi_n(t) = \ln(a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t)).$$

En déduire $f''(0)$.

Exercice 13.29 – Extrait de Centrale MPI : calcul de l'intégrale de Gauss

Soit n un entier naturel non nul. On note

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

1. (a) Montrer que $I_n \geq \frac{1}{2^n}$
- (b) Justifier l'existence de K_n et donner la valeur exacte de K_1 .
- (c) Montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = O\left(\frac{1}{n2^n}\right)$$

(On pourra minorer $1+t^2$ par un polynôme de degré 1.)

- (d) En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$, $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K_n$.
 (e) Établir la relation de récurrence $K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n} K_n$.
 (f) En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. (a) Justifier que

$$\sqrt{n} I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1 + u^2/n)^n} du$$

(b) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

(c) En déduire les valeurs de

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \quad \text{puis de} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du$$

3. On pose, pour tout x réel, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ et $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$.

Soit $x > 0$.

(a) En écrivant que $\varphi(t) \leq \frac{t}{x} \varphi(t)$ pour tout $t \geq x$, montrer que

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \frac{\varphi(x)}{x}.$$

(b) À l'aide de l'étude d'une fonction bien choisie, montrer que

$$\frac{x}{x^2 + 1} \varphi(x) \leq \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$$

(c) En déduire un équivalent simple de $1 - \Phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solutions

Une correction de l'exercice 13.1

énoncé



On rappelle que si A est une partie de $\mathbb{R}$ majorée, alors

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A \quad x \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad M - \varepsilon < x. \end{cases}$$

- Supposons que A et B sont bornées, alors comme ces deux parties sont non vides, elles ont une borne supérieure et une borne inférieure, et de plus la partie $A + B$ est aussi non vide.

Soit donc s un élément de $A + B$.

Par définition de $A + B$ il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $s = a + b$. Or

$$\inf(A) \leq a \leq \sup(A), \quad \inf(B) \leq b \leq \sup(B),$$

donc en additionnant terme à terme :

$$\inf(A) + \inf(B) \leq s \leq \sup(A) + \sup(B).$$

Ainsi $A + B$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$, et $\inf(A) + \inf(B)$ en est un minorant, tandis que $\sup(A) + \sup(B)$ en est un majorant

la borne supérieure est le plus petit majorant, donc

$$\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B),$$

et la borne inférieure est le plus grand des minorants, donc

$$\inf(A) + \inf(B) \leq \inf(A + B).$$

- Montrons à présent l'égalité $\sup(A) + \sup(B) = \sup(A + B)$.

Pour cela, prenons un réel $\varepsilon > 0$, et montrons que $\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A + B$. On aura ainsi montré que $\sup(A) + \sup(B)$ est bien le plus petit des majorants de $A + B$, c'est-à-dire la borne supérieure de $A + B$, et on pourra conclure l'égalité $\sup(A) + \sup(B) = \sup(A + B)$ tant convoitée.

La borne supérieure étant par définition le plus petit des majorants, $\sup(A) - \frac{1}{3}\varepsilon$ n'est plus un majorant de A , donc il existe $a \in A$ tel que $\sup(A) - \frac{1}{2}\varepsilon < a$.

De même, on peut trouver $b \in B$ tel que $\sup(B) - \frac{1}{2}\varepsilon < b$.

Ainsi, en additionnant terme à terme ces deux inégalités, le réel $a + b$, qui est dans $A + B$, vérifie que

$$\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon < a + b,$$

ce qui prouve que $\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A + B$, c.q.f.d.

→ L'égalité $\inf(A) + \inf(B) = \inf(A + B)$ se prouve de manière similaire.

Une correction de l'exercice 13.2

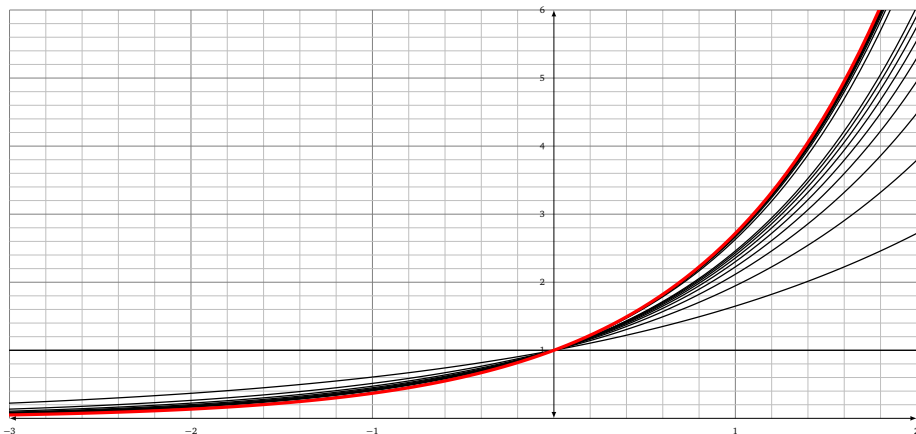
énoncé

(Voir graphique)

1. Pour tout réel x :

$$\frac{(n-1)x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \text{ et donc, par composition des limites, } f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x.$$

Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\exp$.



2. Pour étudier la convergence uniforme, on prend $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ (pour éviter des problèmes plus tard), et on étudie la fonction

$$\Delta_n = f_n - \exp : x \mapsto e^{\frac{n-1}{n}x} - e^x$$

: cette fonction Δ_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\Delta'_n(x) = \frac{n-1}{n} e^{\frac{n-1}{n}x} - e^x = \frac{n-1}{n} e^x \left(e^{-\frac{1}{n}x} - \frac{n}{n-1} \right).$$

Cette dérivée s'annule en $\alpha_n = -n \ln \left(\frac{n}{n-1} \right) = n \ln \left(\frac{n-1}{n} \right)$, et par la décroissance de $x \mapsto e^{-\frac{1}{n}x}$, est positive à gauche de α_n , et négative à droite :

x	$-\infty$	α_n	$+\infty$
$\Delta'_n(x)$	$+$	0	$-$
Δ_n			

- On remarque que pour tout $n \geq 2$, la fonction $\Delta_n = f_n - \exp$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$, donc elle n'est pas bornée, ainsi la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ est impossible.
- Soit $b \in \mathbb{R}$, alors je vous laisse vous convaincre que

$$\|\Delta_n\|_{\infty}^{]--\infty; b]} \leq \max(|\Delta_n(\alpha_n)|, |\Delta_n(b)|).$$



Rappelons qu'il n'est pas nécessaire de connaître la valeur exacte de $\|f_n - f\|_{\infty}^I$. En effet :

- ⊕ si par exemple $\|f_n - f\|_{\infty}^I \leq \frac{1}{n}$, alors par encadrement $\|f_n - f\|_{\infty}^I \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'où la convergence uniforme sur I ;
- ⊕ si par exemple $1 \leq \|f_n - f\|_{\infty}^I$, alors par la contraposée de l'encadrement $\|f_n - f\|_{\infty}^I$ ne peut pas tendre vers 0, ce qui empêche la convergence uniforme sur I .

Sur une main,

$$\begin{aligned} \Delta_n(\alpha_n) &= e^{-(n-1)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)} - e^{-n\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)} \\ &= e^{(n-1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} - e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} (n-1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{1}{n}\right) = -1 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1 \end{aligned}$$

donc

$$\Delta_n(\alpha_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} - e^{-1} = 0.$$

Sur l'autre main (*comme disent nos amis anglais*),

$$\Delta_n(b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^b - e^b.$$

Ainsi,

$$\max(|\Delta_n(\alpha_n)|, |\Delta_n(b)|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

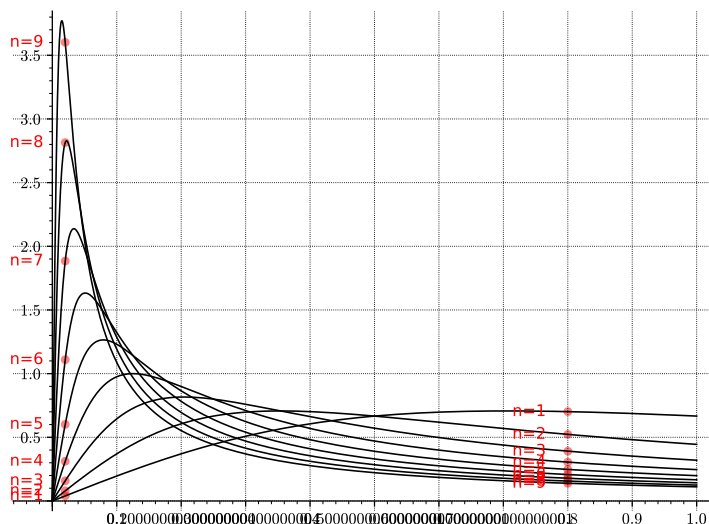
et par encadrement

$$\|\Delta_n\|_{\infty}^{]-\infty; b]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $]-\infty, b]$.

Une correction de l'exercice 13.3

énoncé



1. $\Rightarrow$ Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$\Rightarrow$ Pour $x \in]0 ; 1]$, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^n x}{n 2^n x^2} = \frac{1}{n x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc la suite (f_n) converge simplement sur $[0 ; 1]$ vers la fonction nulle.

2. Sans trop de difficulté,

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2} dx \\
 &= \left[\frac{1}{2n} \ln(1 + 2^n n x^2) \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2n} \ln(1 + 2^n n).
 \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve que

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2n} \ln(1 + 2^n n) = \frac{1}{2n} \ln \left(2^n n \left(1 + \frac{1}{n 2^n} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2n} n \ln(2) + \frac{1}{2n} \ln(n) + \frac{1}{2n} \ln \left(1 + \frac{1}{n 2^n} \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

Si la suite (f_n) convergeait uniformément sur $[0,1]$, alors d'après le théorème d'interversion limite-intégrale, on aurait

$$\frac{\ln 2}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \lim_n f_n(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0,$$

or ceci est faux, donc il n'y a pas convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.

3. Posons $x_n = \frac{1}{2^n}$. Alors

$$\begin{aligned} f_n(x_n) &\leq \|f_n\|_{\infty}^{[0;1]} \\ f_n(x_n) &= \frac{1}{1 + \frac{n}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$

Donc (par contraposée du prolongement des inégalités larges à la limite) $\|f_n\|_{\infty}^{[0;1]}$ ne peut pas tendre vers 0, ce qui prouve directement que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

Une correction de l'exercice 13.4

énoncé

1. Pour tout réel α ,

$$\Rightarrow \text{si } x = 0, f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{si } x \in]0; +\infty[, e^{-nx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } x > 0, \text{ donc par croissances comparées} \\ n^\alpha e^{-nx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ d'où } f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x. \end{aligned}$$

Ainsi la suite des fonctions f_n converge simplement sur $[0; +\infty[$ vers $x \mapsto x$.

2. On déduit de la question précédente que si la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$, ce ne peut être que vers la limite simple $f : x \mapsto x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) - f(x) = x n^\alpha e^{-nx}$.

L'étude des variations de la fonction $\Delta_n : x \mapsto x n^\alpha e^{-nx}$ montre que cette fonction,

qui est positive, est croissante sur $\left[0 ; \frac{1}{n}\right]$, et décroissante sur $\left[\frac{1}{n} ; +\infty\right[\Delta_n$, ainsi

$$\|\Delta_n\|_{\infty}^{[0; +\infty[} = \Delta_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{e^{-1}}{n^{1-\alpha}},$$

donc $\|f_n - f\|_{\infty}^{[0; +\infty[}$ tend vers 0 si, et seulement si, $1 - \alpha > 0$, c'est-à-dire $\alpha < 1$.

3. Dans cette question on cherche la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

pour $\alpha = \frac{1}{2}$. Or on a vu que pour cette valeur de α , la suite des f_n converge uniformément sur $[0 ; +\infty[$, donc a fortiori sur le segment $[0 ; 1]$.

Par conséquent, on peut intervertir la limite et l'intégrale :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \\ &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 13.5

énoncé

(1) (Voir graphique)

→ Si $x \in [0 ; \pi/2[$, $0 \leq \sin(x) < 1$, donc

$$f_n(x) = \cos(x) \sin(x)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0;$$

→ si $x = \pi/2$, $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0 ; \pi/2]$ vers la fonction nulle.

→ Étudions $\|f_n - 0\|_{\infty}^{[0; \pi/2]}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable sur $[0 ; \pi/2]$, de dérivée

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= -\sin(x) \times \sin^n(x) + \cos(x) \times n \cos(x) \sin^{n-1}(x) \\ &= (-\sin^2(x) + n \cos^2(x)) \sin^{n-1}(x) \\ &= (\cos^2(x) - 1 + n \cos^2(x)) \sin^{n-1}(x) \\ &= ((n+1) \cos^2(x) - 1) \sin^{n-1}(x) \\ &= (n+1)(\sin(x))^{n-1} \left(\cos(x) - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \\ &\quad \times \left(\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right), \end{aligned}$$

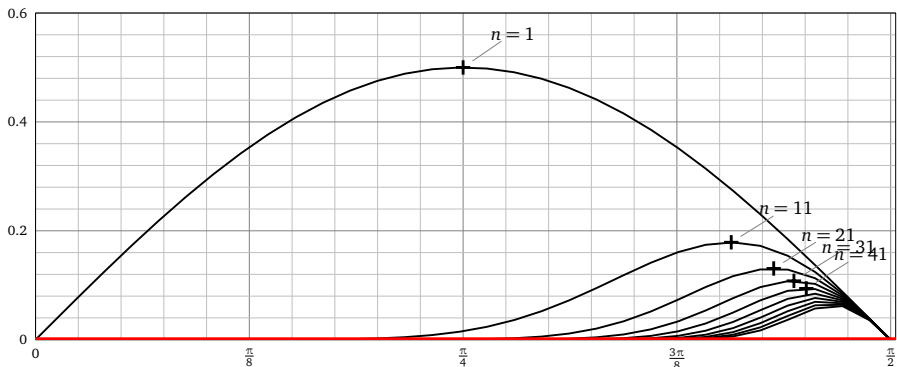
qui est positive à gauche de $\alpha_n = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$, nulle en α_n , et négative à droite de α_n .

Le tableau des variations de f_n donne alors

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{\infty}^{[0; \pi/2]} &= \cos(\alpha_n) \sin(\alpha_n)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sin(\alpha_n)^n \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

qui entraîne par encadrement que

$$\|f_n\|_{\infty}^{[0; \pi/2]} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$



(2) (Voir graphique)

→ Pour tout réel x fixé,

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + 1}{n + x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{ne^{-x}}{n} = e^{-x},$$

donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

→ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1 - x^2 e^{-x}}{n + x^2} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$$

donc $f_n - f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, ce qui rend impossible la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.

→ En revanche, soit $[a; b] \subset \mathbb{R}$, alors pour tout réel x fixé,

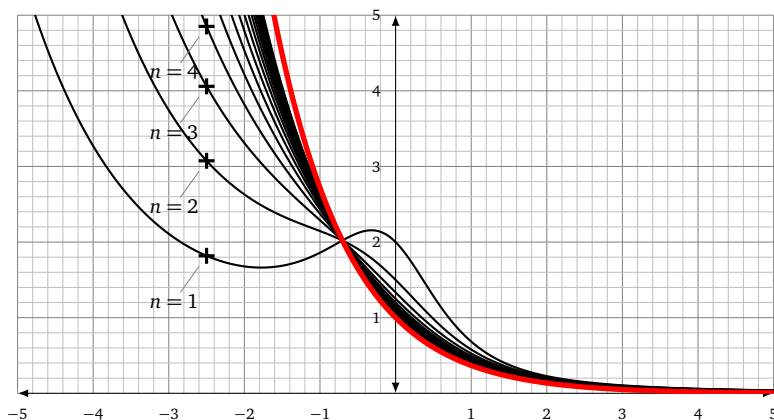
$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{1 - x^2 e^{-x}}{n + x^2} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} |1 - x^2 e^{-x}| \quad (\text{car } n + x^2 \geq n) \\ &\leq \frac{1}{n} \times M \text{ où } M = \max_{x \in [a; b]} |1 - x^2 e^{-x}| \end{aligned}$$

(rappelons que toute fonction continue sur un segment a un maximum)

donc

$$\|f_n - f\|_{\infty}^{[a; b]} \leq \frac{1}{n} M \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui prouve que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.



(3) (Voir graphique)

→ Pour tous $x \in]0 ; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Pour tout réel x **fixé** dans $]0 ; +\infty[$, dès que $n \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$f_n(x) = \inf\left\{n, \frac{1}{\sqrt{x}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

donc

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0 ; +\infty[$ vers $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

→ En revanche, soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour $x \in]0 ; \frac{1}{n^2}[$, on a $0 < x \leq \frac{1}{n^2}$, donc par la stricte croissance de la racine carrée $0 < \sqrt{x} \leq \frac{1}{n}$, d'où par décroissance de $\square \mapsto \frac{1}{\square}$ sur $]0 ; +\infty[$, on obtient $\frac{1}{\sqrt{x}} \geq n$.

Ainsi $f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = n$.

Par conséquent,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|n - \frac{1}{\sqrt{x}}\right| \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty,$$

donc la différence $f_n - f$ n'est pas bornée sur $]0 ; +\infty[$, et il n'y a pas convergence uniforme.

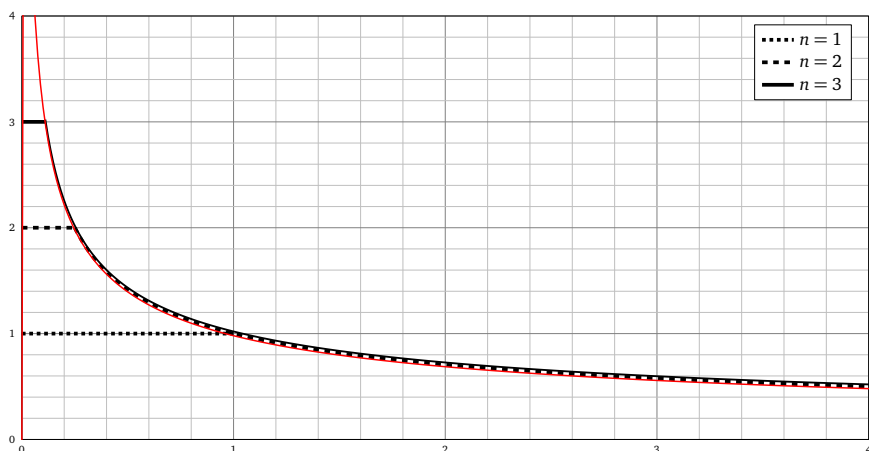
→ Soit $[a ; b] \subset]0 ; +\infty[$.

Pour tout $x \in [a ; b]$, dès que $n \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$,

$$x \geq a, \text{ donc } \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \leq n,$$

ainsi $f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$.

Ainsi pour n assez grand, f_n est égale à f sur $[a ; b]$, donc $\|f_n - f\|_{\infty}^{[a ; b]} = 0$, ce qui est le summum de la convergence uniforme sur tout segment !



(4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto nxe^{-nx^2}$.

(Voir graphique)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, (par croissances comparées pour $x \neq 0$),

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Mais on remarque que : $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}e^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$,

or par définition de la norme infinie : $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}}$,

donc par le théorème du gendarme infini (*appellation contrôlée*)

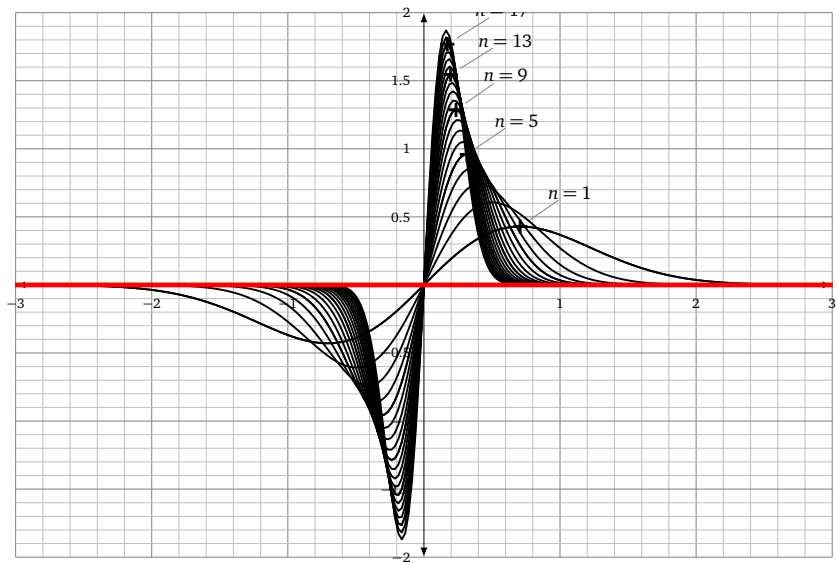
$$\|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

ce qui prouve que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.



On aurait aussi pu étudier les variations de f_n et obtenir que

$$\|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}} = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{\frac{n}{2}}e^{-1/2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$



Une correction de l'exercice 13.6

énoncé



Il devient classique (j'espère) qu'en étudiant les variations de la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$, on prouve que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) < x$.

Si on aime l'aventure, on peut aussi utiliser la formule de Taylor avec reste intégral qui donne pour tout $x > -1$,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \\ &= x - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{(1+x)^2} (x-t) dt \\ &= \begin{cases} x - \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^x \frac{1}{(1+x)^2} (x-t) dt}_{\geq 0} \leq x, & \text{si } x \geq 0, \\ x + \frac{1}{2} \underbrace{\int_x^0 \frac{1}{(1+x)^2} (x-t) dt}_{\leq 0} \leq x, & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction $x \mapsto \frac{n \ln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}$.

⇒ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $]0; +\infty[$.

⇒ On sait que $\ln(1+\square) \sim_{\square \rightarrow 0} \square$, donc pour tout $x \in]0; +\infty[$, comme $\frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

$$\frac{n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n \times \frac{x}{n}}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2},$$

d'où la convergence simple sur $]0; +\infty[$ de la suite des fonctions f_n vers la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

⇒ Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\left| \frac{n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} \right| \leq \frac{n \times \frac{x}{n}}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2},$$

qui nous donne la domination par la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui est bien intégrable sur $]0; +\infty[$.



On en déduit en passant, par le critère de domination, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur $]0 ; +\infty[$, ce qui prouve l'existence des intégrales étudiées.

Donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée qui nous donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. Ici, pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée, il nous faut un intervalle d'intégration J indépendant de n . L'astuce consiste à définir la fonction

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} & \text{si } t \in [0 ; n[, \\ 0 & \text{si } t \geq n, \end{cases}$$

de façon à ce que

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} dt = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt.$$

- ⇒ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $[0 ; +\infty[$, et nulle sur $[n ; +\infty[$, donc intégrable sur $[0 ; +\infty[$, avec

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} dt.$$

- ⇒ Soit $t \in]0 ; +\infty[$, pour tout entier $n \geq t$,

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)}$$

or

$$n^2 \ln \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 \times \left(-\frac{t^2}{n^2}\right) = -t^2,$$

donc

$$f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-t^2}$$

d'où la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $]0 ; +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$.

→ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0 ; n[$, grâce à l'inégalité vue en préambule, comme $-\frac{t^2}{n^2} \in]-1 ; +\infty[$, on a

$$n^2 \ln \left(1 - \frac{t^2}{n^2} \right) \leq n^2 \times \left(-\frac{t^2}{n^2} \right) = -t^2$$

donc en composant par la fonction exponentielle qui est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$0 \leq f_n(t) \leq e^{-t^2},$$

et cette inégalité reste encore plus vraie quand $t \geq n$.

Et comme on sait que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $]0 ; +\infty[$ (voir l'intégrale de Gauss), on a la domination cherchée.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée qui nous donne

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n^2} \right)^{n^2} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Une correction de l'exercice 13.7

énoncé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto nx$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0 ; 1]$ strictement croissante, bijective de $[0 ; 1]$ sur $[0 ; n]$, donc en posant $t = nx$, et en notant

$$f_n(t) = \begin{cases} te^{-t} f\left(\frac{t}{n}\right) & \text{si } t \in [0 ; n], \\ 0 & \text{si } t > n. \end{cases}$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 n^2 x e^{-nx} f(x) dx = \int_0^n n^2 \frac{t}{n} e^{-t} f\left(\frac{t}{n}\right) \frac{1}{n} dt = \int_0^n te^{-t} f\left(\frac{t}{n}\right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} f_n(t) dt, \end{aligned}$$

→ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{t}{n}$ est continue sur $[0 ; n]$, à valeurs dans $[0 ; 1]$, et f est continue sur $[0 ; 1]$, donc $t \mapsto f\left(\frac{t}{n}\right)$, puis f_n , est continue par morceaux sur $[0 ; +\infty[$, et a fortiori sur $]0 ; +\infty[$;

→ Pour tout $t \in]0 ; +\infty[$, dès que $n > t$,

$$f_n(t) = te^{-t} f\left(\frac{t}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} te^{-t} f(0),$$

car f est continue sur $[0 ; 1]$ donc en 0.

→ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est continue sur le segment $[0 ; 1]$, donc bornée.

Ainsi

$$\forall t \in [0 ; n], |f_n(t)| = \left| te^{-t} f\left(\frac{t}{n}\right) \right| \leq te^{-t} \|f\|_{\infty}^{[0;1]}, \text{ (car } \frac{t}{n} \in [0 ; 1],)$$

et cette inégalité est a fortiori vraie pour $t > n$.

Mais la fonction $t \mapsto te^{-t}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$, et dominée en $+\infty$ par $\frac{1}{t^2}$ (par croissances comparées), donc intégrable sur $]0 ; +\infty[$.

Les conditions du théorème de convergence dominée sont ainsi vérifiées, donc

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} te^{-t} f(0) dt \\ &= f(0) \int_0^{+\infty} te^{-t} dt. \end{aligned}$$

Enfin on montre que $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = 1$ avec une intégration par parties, et on peut conclure que

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0).$$

Une correction de l'exercice 13.8

énoncé

→ Soit P un polynôme non nul, alors on sait que $P(x)$ est équivalent quand x tend vers $+\infty$ à son terme dominant que l'on peut noter αx^n avec $n \in \mathbb{N}$, et $\alpha \neq 0$ (puisque P est non nul).

Ainsi si P est borné sur $\mathbb{R}$, alors en particulier $P(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{O}(1)$, donc par équivalence $\alpha x^n = \underset{x \rightarrow +\infty}{O}(1)$, ce qui n'est possible que si $n = 0$, autrement dit que si P est un polynôme constant.

→ Supposons que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$, et notons $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Alors $\|P_n - f\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc en particulier, il existe un rang N , tel que pour tout $n \geq N$, $\|P_n - f\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{2}$. (pourquoi pas $\frac{1}{2}$?)

Ainsi pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned}\|P_n - P_N\|_{\infty}^{\mathbb{R}} &= \|P_n - f + f - P_N\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \\ &\leq \|P_n - f\|_{\infty}^{\mathbb{R}} + \|f - P_N\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \quad (\text{par l'inégalité triangulaire}) \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geq N$, le polynôme $P_n - P_N$ est borné, donc est constant d'après la première question, on peut le noter c_n .

On en déduit que

$$\begin{aligned}f &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (P_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (P_N + c_n) \\ &= P_N + \lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n) = P_N + c,\end{aligned}$$

donc que f est un polynôme.

Une correction de l'exercice 13.9

énoncé

(Un graphique en 3D)

→ Soit $x \geq 0$, pour n assez grand, plus précisément pour $n > x$,

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}$$

or $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$, donc $n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -x$, et $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-x}$.

Donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0 ; +\infty[$ vers $x \mapsto e^{-x}$.

→ Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\Delta_n(x) = f_n(x) - e^{-x}$. Alors

⊕ si $x \geq n$, $|\Delta_n(x)| = e^{-x} \leq e^{-n}$, donc $\|\Delta_n\|_{[n; +\infty[}^{\infty} \leq e^{-n}$;

⊕ si $x \in [0 ; n[$, $\Delta_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n - e^{-x} = e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} - e^{-x}$.

L'application $x \mapsto e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} - e^{-x}$ est dérivable sur $[0 ; n[$, car $x \mapsto \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$ l'est aussi, et

$$\begin{aligned}\forall x \in [0 ; n[, \quad \Delta'_n(x) &= n \times \left(-\frac{1}{n}\right) \times \frac{1}{1 - \frac{x}{n}} \times e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} + e^{-x} \\ &= -e^{-\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} \times e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} + e^{-x} \\ &= e^{-x} - e^{(n-1) \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}.\end{aligned}$$

Comme la fonction $\exp$ est croissante, cette quantité est du signe de

$$\varphi_n(x) = (-x) - (n-1) \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right).$$

De nouveau, cette fonction est dérivable sur $[0 ; n[$, de dérivée

$$\begin{aligned}\varphi'_n(x) &= -1 - (n-1) \times \left(-\frac{1}{n}\right) \times \frac{1}{1 - \frac{x}{n}} = -1 - (n-1) \times \frac{1}{x-n} \\ &= -\frac{(x-n) + (n-1)}{x-n} = -\frac{x-1}{x-n}\end{aligned}$$

On en déduit que :

- φ'_n est négative sur $[0 ; 1]$ et positive sur $[1 ; n[$,
- donc φ_n décroît strictement de $\varphi_n(0) = 0$ à $\varphi_n(1) < 0$, et croît strictement jusqu'à $+\infty$, donc par le théorème de la bijection s'annule en un point $x_n \in]1 ; n[$,
- on en déduit que φ_n , et par conséquent Δ'_n , est négative sur $[0 ; x_n]$, et positive sur $[x_n ; n[$,
- et on conclut que Δ_n décroît de $\Delta_n(0) = 0$ à $\Delta_n(x_n)$, puis croît jusqu'à $-e^{-n} < 0$.

Ainsi

$$\|\Delta_n\|_{\infty}^{[0; n[} = |\Delta_n(x_n)|.$$

Or

$$\begin{aligned}\varphi(x_n) = 0 &\iff -x_n = (n-1) \ln\left(1 - \frac{x_n}{n}\right) \\ &\iff -x_n = n \ln\left(1 - \frac{x_n}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{x_n}{n}\right) \\ &\iff n \ln\left(1 - \frac{x_n}{n}\right) = -x_n + \ln\left(1 - \frac{x_n}{n}\right),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\Delta_n(x_n) &= e^{n \ln\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)} - e^{-x_n} \\ &= e^{-x_n + \ln\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)} - e^{-x_n} \\ &= e^{-x_n} \left(e^{+\ln\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)} - 1\right) \\ &= e^{-x_n} \times \left(-\frac{x_n}{n}\right),\end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\|\Delta_n\|_{\infty}^{[0;n[} = \frac{x_n}{n} e^{-x_n}.$$

Enfin, la fonction $x \mapsto x e^{-x}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$, et tend vers 0 en $+\infty$, donc elle est majorée sur $[0 ; +\infty[$, par un réel M , d'où

$$\|\Delta_n\|_{\infty}^{[0;n[} \leq \frac{M}{n}.$$

➔ On en déduit finalement que

$$\|\Delta_n\|_{\infty}^{[0;+\infty[} \leq \max\left(\frac{M}{n}, e^{-n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0 ; +\infty[$ vers $x \mapsto e^{-x}$.

Une correction de l'exercice 13.10

énoncé

1. En préliminaire, on remarque pour tous réels a et b , $(a-b)^2 \geq 0$, donc $a^2 + b^2 \geq 2ab$, d'où

$$(1+a^2)(1+b^2) = 1 + a^2 + b^2 + (ab)^2 \geq 1 + 2ab + (ab)^2 = (1+ab)^2.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{f_n(x)}{1+f_n(x)^2} - \frac{f(x)}{1+f(x)^2} \right| \\
 &= \left| \frac{(f_n(x) - f(x)) \times (1 - f_n(x) \times f(x))}{(1+f_n(x)^2)(1+f(x)^2)} \right| \\
 &\leq |f_n(x) - f(x)| \times \left| \frac{1 - f_n(x)f(x)}{(1+f_n(x)^2)(1+f(x)^2)} \right| \\
 &= |f_n(x) - f(x)| \times \left| \frac{1 - f_n(x)f(x)}{(1+f_n(x)^2)(1+f(x)^2)} \right| \\
 &= |f_n(x) - f(x)| \times \frac{1 + |f_n(x)f(x)|}{(1+f_n(x)^2)(1+f(x)^2)} \\
 &= |f_n(x) - f(x)| \times \frac{1 + |f_n(x)||f(x)|}{(1+|f_n(x)|^2)(1+|f(x)|^2)} \\
 &\leq |f_n(x) - f(x)| \times \frac{1 + |f_n(x)||f(x)|}{(1+|f_n(x)||f(x)|)^2} \text{ (d'après le préliminaire)} \\
 &\leq |f_n(x) - f(x)| \times \frac{1}{1 + |f_n(x)||f(x)|} \leq |f_n(x) - f(x)|.
 \end{aligned}$$

Donc en notant $g_n = \frac{f_n}{1+f_n^2}$ et $g = \frac{f}{1+f^2}$,

$$\|g_n - g\|_\infty^1 \leq \|f_n - f\|_\infty^1$$

or par hypothèse $\|f_n - f\|_\infty^1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc par domination $\|g_n - g\|_\infty^1 \xrightarrow{0 \rightarrow} 0$,
ce qui permet de conclure que la série des fonctions $\frac{f_n}{1+f_n^2}$ converge uniformément sur I .

Une correction de l'exercice 13.11

énoncé

→ Soit $a \in [0 ; 1]$, posons $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f_n(a)$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f_{n+1}(a) = (f \circ f_n)(a) = f(f_n(a)) = f(u_n).$$

Pour tout $x \in [0 ; 1]$,

$$f(x) = 2x(1-x) = 2(x-x^2) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2},$$

donc en particulier $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

Enfin, pour tout $x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$,

$$f(x) - x = -2x^2 + x = -2x\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0,$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

→ Cette suite est donc croissante, majorée par $\frac{1}{2}$, ce qui prouve qu'elle est convergente. Notons ℓ sa limite.

Alors par prolongement des inégalités larges

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_1 = f(a) \leq u_n \leq \frac{1}{2}$$

à la limite, on peut dire que

$$u_1 = f(a) \leq \ell \leq \frac{1}{2}$$

et d'autre part

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\ell(1 - \ell).$$

Mais $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, d'où par unicité de la limite $2\ell(1 - \ell) = \ell$, ce qui donne d'après la factorisation ci-dessus $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{1}{2}$.

→ On peut donc conclure que pour tout $a \in [0 ; 1]$, la suite $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ qui vérifie

$$\begin{cases} f(a) \leq \ell \leq \frac{1}{2}, \\ \ell \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}. \end{cases}$$

Par conséquent :

⊕ si $a = 0$ ou $a = 1$, alors $f(a) = 0$, d'où par récurrence $f_n(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\ell = 0$;

⊕ si $a \in]0 ; 1[$, alors $f(a) > 0$, donc $\ell = \frac{1}{2}$.

On peut donc conclure que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0 ; 1]$ vers la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in]0 ; 1[, \\ 0 & \text{si } x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

→ Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0 ; 1]$, alors chaque fonction f_n étant continue sur $[0 ; 1]$, sa limite doit encore être continue sur $[0 ; 1]$. Or ce n'est pas le cas. Donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0 ; 1]$. Et paf !

→ ⊕ Tout d'abord, la fonction f est croissante sur $[0 ; \frac{1}{2}]$ et vérifie $f(x) = f(1-x)$ pour tout $x \in [0 ; 1]$.

⊕ Soit $[a ; b] \subset]0 ; 1[$.

D'abord pour nous faciliter la tâche, on remarque que le segment $[a ; b]$ est inclus dans le segment plus grand $[\alpha ; 1-\alpha]$, avec $\alpha = \min(a, 1-b) \in [0 ; \frac{1}{2}]$ (le segment $[\alpha ; 1-\alpha]$, étant centré en $\frac{1}{2}$, va rendre l'étude plus facile).

$$\text{Ainsi } \left\| f_n - \frac{1}{2} \right\|_{\infty}^{[a ; b]} \leq \left\| f_n - \frac{1}{2} \right\|_{\infty}^{[\alpha ; 1-\alpha]}.$$

On va donc se contenter d'étudier la convergence uniforme sur tout segment du type $[\alpha ; 1-\alpha]$.

⊕ Soit $\alpha \in [0 ; \frac{1}{2}]$, alors pour tout $x \in [\alpha ; 1-\alpha]$,

$$f_1(x) = f(x) = f(1-x) \in \left[f(\alpha) ; \frac{1}{2} \right],$$

puis par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(\alpha) \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2}$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\| f_n - \frac{1}{2} \right\|_{\infty}^{[\alpha ; 1-\alpha]} \leq \frac{1}{2} - f_n(\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d'où la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur tout intervalle $[\alpha ; 1-\alpha]$ avec $\alpha \in [0 ; \frac{1}{2}]$, donc sur tout segment $[a ; b]$ de $]0 ; 1[$ (d'après la remarque préliminaire) vers la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}$.

Une correction de l'exercice 13.12

énoncé

1. Soit $x \in [1, +\infty[$.

La suite de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ est alternée.

De plus la suite $\left(\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} \right| \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 car $x > 0$.

Ainsi, d'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ converge.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $|f_n| : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+nx}}$ est décroissante et positive sur $J = [1, +\infty[$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_\infty^J = |f_n(1)| = \frac{1}{\sqrt{1+n}}.$$

Or $\frac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, et la suite de Riemann $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ n'est pas sommable, donc par équivalence la suite de terme général $(\|f_n\|_\infty^J)$ n'est pas sommable non plus.

Et comme cette dernière suite est à termes positifs, sa série est divergente, donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas normalement convergente sur J .

3. On a démontré dans la première question que pour tout $x \in [1, +\infty[$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ vérifie le théorème spécial des séries alternées. Par conséquent, pour tout $N \in \mathbb{N}$, son reste $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ est majoré en valeur absolue par son premier terme,

$$|R_N(x)| \leq |f_{N+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+(N+1)x}} \leq \frac{1}{\sqrt{2+N}}.$$

Cette majoration est indépendante de x , donc

$$\|R_N\|_\infty^J \leq \frac{1}{\sqrt{2+N}}.$$

Or $\frac{1}{\sqrt{2+N}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par domination $\|R_N\|_\infty^J \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que $\sum f_n$ converge uniformément sur J .

4. $\Rightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $J = [1 ; +\infty[$, et

$$f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ De plus on a vu dans la question 3 que $\sum f_n$ converge uniformément sur J dont $+\infty$ est une borne.

Le théorème de la double limite nous permet alors de conclure

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 1, \quad \text{c.Q.F.D.}$$

5. (a) Je ne détaille pas le fait que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées (que nous avons rappelées dans la première question) donc elle converge.

- (b) On sait déjà d'après la question précédente que $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, donc nécessairement $\ell = 1$, et il reste à prouver que

$$\varphi(x) = 1 + \frac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Pour tout $x \in [1 ; +\infty[$

$$\begin{aligned} \left| \varphi(x) - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{x}}\right) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}} \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{nx} - \sqrt{1+nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}} \right| \quad (\text{en multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée,}) \\ &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{1+nx})} \right|, \end{aligned}$$

mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{1+nx})} \right| = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right)$$

donc par domination $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{1+nx})} \right)$ est sommable, et on peut appliquer l'inégalité triangulaire qui nous donne

$$\begin{aligned} \left| \varphi(x) - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{x}}\right) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{1+nx})} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{1+nx})} \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{nx}(\sqrt{nx} + \sqrt{nx})} \quad \begin{array}{l} \text{(série convergente de} \\ \text{terme général aussi} \\ \text{dominé par } \frac{1}{n^{3/2}}) \end{array} \\ &= \frac{1}{2x\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

En posant $M = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, nous avons l'existence d'une constante réelle $M > 0$ telle que pour tout x au voisinage de l'infini,

$$\left| \varphi(x) - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{x}} \right) \right| \leq \frac{M}{x\sqrt{x}},$$

donc

$$\varphi(x) - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{x}} \right) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} \right),$$

ce qui est peu ou prou la conclusion attendue.

Une correction de l'exercice 13.13

énoncé

1. $\Rightarrow$ Pour $x = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = u_n(0) = 0$ est bien le terme général d'une série convergente.
 $\Rightarrow$ Pour $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^2} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$ est aussi le terme général d'une série convergente.

Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0 ; +\infty[$.

2. Soit A un réel strictement positif.

Pour tout $x \in [0, A]$,

$$|u_n(x)| \leq \frac{A}{n^2},$$

donc

$$\|u_n\|_{\infty}^{[0;A]} \leq \frac{A}{n^2} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

donc par domination, $\sum u_n$ converge normalement, et a fortiori uniformément, sur $[0 ; A]$.

3. Il suffit d'écrire que, pour $n+1 \leq k \leq 2n$, on a $n^2 + k^2 \leq 5n^2$, et donc $\frac{n}{n^2 + k^2} \geq \frac{1}{5n}$.
 On obtient finalement

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{5n} = n \times \frac{1}{5n} = \frac{1}{5}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|R_n\|_{\infty}^{[0; +\infty[} &= \sup_{x \geq 0} |R_n(x)| = \sup_{x \geq 0} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \\ &\geq \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(n) \right| \geq \left| \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(n) \right| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geq \frac{1}{5} \end{aligned}$$

donc $\|R_n\|_{\infty}^{[0; +\infty[}$ ne peut tendre vers 0, et la convergence uniforme sur $[0; +\infty[$ est impossible.

4. On utilise le critère spécial des séries alternées.

Pour tout x fixé dans $[0; +\infty[$, la suite $(u_n(x))$ est positive, décroissante et tend vers 0. La série $\sum (-1)^n u_n(x)$ est donc convergente, et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on peut majorer le reste :

$$|R_N(x)| = \left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} (-1)^k u_k(x) \right| \leq |u_{N+1}(x)| = \frac{x}{(N+1)^2 + x^2}.$$

Mais comme $x \leq \sqrt{x^2 + (N+1)^2}$, ainsi que $n \leq \sqrt{x^2 + (N+1)^2}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{x}{(N+1)^2 + x^2} &= \frac{\sqrt{x^2}}{(N+1)^2 + x^2} \leq \frac{\sqrt{x^2 + (N+1)^2}}{(N+1)^2 + x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + (N+1)^2}} \leq \frac{1}{N+1}. \end{aligned}$$

On a donc établi que

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad |R_N(x)| \leq \frac{1}{N+1},$$

par conséquent $\|R_N\|_{\infty}^{[0; +\infty[} \leq \frac{1}{N+1}$, d'où je vous laisse déduire la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

5. La présence de la valeur absolue dans la définition de la norme infinie entraîne que pour tout intervalle I ,

$$\|(-1)^n u_n\|_{\infty}^I = \sup_{x \in I} |(-1)^n u_n(x)| = \sup_{x \in I} |u_n(x)| = \|u_n\|_{\infty}^I,$$

donc la convergence normale de $\sum (-1)^n u_n$ sur n'importe quel intervalle revient à celle de $\sum u_n$, donc on conclut ici comme à la question 2.

6. D'autre part, toujours pour la raison ci-dessus, si on avait convergence normale de $\sum (-1)^n u_n$ sur $\mathbb{R}_+$, alors on aurait aussi convergence normale de la série $\sum_n u_n$ sur $\mathbb{R}_+$ donc convergence uniforme de cette même série, ce qui n'est pas le cas d'après la question 3.

Une correction de l'exercice 13.14

énoncé

La série $\sum g_n$ ne converge pas normalement sur $[0 ; 1]$, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|g_n\|_{\infty}^{[0;1]} = \frac{1}{n}$ n'est pas sommable.

Mais pour tout $x \in [0 ; 1]$ fixé,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} & \text{si } n = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} &\iff n \leq \frac{1}{x} < n+1 \\ &\iff n = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

→ pour tout $x \in [0 ; 1]$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N f_n(x) &= 0 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{si } x = 0,) \\ \sum_{n=1}^N f_n(x) &= 0 + \dots + 0 + \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} + 0 + \dots \quad (\text{dès que } N \geq \lfloor \frac{1}{x} \rfloor) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \quad (\text{si } x \in]0 ; 1]) \end{aligned}$$

donc la série converge simplement sur $[0 ; 1]$ et a pour somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} & \text{si } x \in]0 ; 1]. \end{cases}$$

→ pour tout $x \in]0 ; 1]$, pour les mêmes raisons que ci-dessus :

$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } N > \frac{1}{x} - 1, \\ \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \leq \frac{1}{N} & \text{sinon} \end{cases}$$

donc

$$\|R_N\|_{\infty}^{[0;1]} \leq \frac{1}{N},$$

et la série converge uniformément sur $[0 ; 1]$.

Une correction de l'exercice 13.15

énoncé

(1) Notons $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

⇒ Pour tout réel x , et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2} \right| \leq \frac{1}{1+n^2x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

donc par domination $(f_n(x))$ est sommable pour tout réel x , donc en particulier $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

⇒ La convergence uniforme est difficile à étudier.

⇒ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f_n\|_{\infty}^{]0;+\infty[} \geq \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{\sin(1)}{2},$$

donc $\|f_n\|_{\infty}^{]0;+\infty[}$ ne peut pas tendre vers 0, et la série $\sum \|f_n\|_{\infty}^{]0;+\infty[}$ diverge grossièrement.

⇒ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout segment $[a ; b] \subset]0 ; +\infty[$,

$$\|f_n\|_{\infty}^{[a;b]} \leq \frac{1}{1+n^2a^2} = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

d'où la convergence normale sur tout segment de $]0 ; +\infty[$.

(2) ⇒ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, on reconnaît dans $\sum \frac{(-1)^{n-1}e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ une série alternée qui vérifie les conditions du critère de Leibniz, donc on a convergence simplement sur $]0 ; +\infty[$.

⇒ Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Toujours grâce au critère de Leibniz, on sait majorer le reste d'une série al-

ternée :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0 ; +\infty[, |R_N(x)| &= \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} e^{-nx}}{\sqrt{n}} \right| \\ &\leq \left| \frac{(-1)^N e^{-(N+1)x}}{\sqrt{N+1}} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{N+1}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|R_N\|_{\infty}^{]0;+\infty[} \leq \frac{1}{\sqrt{N+1}}$$

donc par encadrement $\|R_N\|_{\infty}^{]0;+\infty[} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'où la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $]0 ; +\infty[$.

⇒ D'une part

$$\|f_n\|_{\infty}^{]0;+\infty[} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

donc $\sum \|f_n\|_{\infty}^{]0;+\infty[}$ est une série de Riemann divergente, donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]0 ; +\infty[$.

D'autre part, pour tout segment $[a ; b] \subset]0 ; +\infty[$,

$$\|f_n\|_{\infty}^{[a;b]} = \frac{e^{-na}}{\sqrt{n}} \leq (e^{-a})^n$$

or $|e^{-a}| < 1$, donc $(e^{-a})^n$ est le terme général d'une suite sommable, d'où par domination, $(\|f_n\|_{\infty}^{[a;b]})$ est aussi sommable.

La série converge donc normalement sur tout segment de $]0 ; +\infty[$.

- (3) En guise de préambule, je rappelle qu'il est un exercice courant de prouver grâce à l'inégalité des accroissements finis que pour tout $\square \in \mathbb{R}$, $|\sin(\square)| \leq |\square|$.

On pose $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$.

⇒ D'après le préambule, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{1}{n} \sin \left(\frac{x}{n} \right) \right| \leq \frac{1}{n} \times \left| \frac{x}{n} \right| = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

d'où la convergence simple sur $\mathbb{R}$.

- ⇒ Ici aussi, il n'y a pas de moyen simple d'évaluer le reste de la série, donc on n'étudiera pas la convergence uniforme.
- ⇒ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \geq \left| f_n \left(n \frac{\pi}{2} \right) \right| = \frac{1}{n}$$

donc par domination, comme $\left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable, alors $(\|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne l'est pas non plus, donc (comme c'est une suite de termes positifs) $\sum \|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}}$ diverge. La série ne converge donc pas normalement sur $\mathbb{R}$.

- ⇒ En revanche sur tout segment $[a ; b] \subset \mathbb{R}$, en notant $\alpha = \max(|a|, |b|)$, de façon à ce que $[a ; b] \subset [-\alpha ; \alpha]$, on a

$$\forall x \in [a ; b], \quad \left| \frac{1}{n} \sin \left(\frac{x}{n} \right) \right| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{\alpha}{n^2}$$

donc

$$\|f_n\|_{\infty}^{[a ; b]} \leq \frac{\alpha}{n^2} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

d'où la convergence normale sur tout segment.

(4) On pose $u_n : x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

- ⇒ D'une part $u_n(0) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ converge.
- D'autre part, pour tout réel $x > 0$,

$$|u_n(x)| = x \times \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n \right),$$

or $\left| \frac{1}{1+x^2} \right| < 1$, donc $\left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique sommable, d'où par domination $\sum u_n(x)$ converge.

On a donc établi la convergence simple de $\sum u_n$ sur $[0 ; +\infty[$.

⇒ Soit $x > 0$, et $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &= \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x) \right| \\ &= |x| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n \\ &= x \times \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{N+1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n \\ &= x \times \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{N+1} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1+x^2} \right)} \\ &= \frac{1}{x} \times \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^N \end{aligned}$$

ainsi

$$\|R_N\|_{\infty}^{]0; +\infty[} \geq \left| R_N \left(\frac{1}{N} \right) \right| = N \times \left(1 + \frac{1}{N^2} \right)^{-N} = N \times e^{-N \ln \left(1 + \frac{1}{N^2} \right)}$$

et $-N \ln \left(1 + \frac{1}{N^2} \right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{N}$, donc $e^{-N \ln \left(1 + \frac{1}{N^2} \right)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^0 = 1$, d'où

$$N \times e^{-N \ln \left(1 + \frac{1}{N^2} \right)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc R_N ne peut pas tendre vers 0, et il n'y a pas convergence uniforme sur $]0; +\infty[$, et encore moins sur $[0; +\infty[$.

⇒ En revanche, pour tout segment $[a; b] \subset]0; +\infty[$, il est clair que R_N est positive et décroissante sur $]0; +\infty[$, donc

$$\|R_N\|_{\infty}^{[a; b]} = R_N(a) = \frac{1}{a} \times \left(\frac{1}{1+a^2} \right)^N \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

d'où la convergence uniforme sur tout segment de $]0; +\infty[$.

⇒ La fonction u_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0; +\infty[$, et l'étude de ses variations (que je ne détaille pas) nous donne

$$\|u_n\|_{\infty}^{]0; +\infty[} = u_n \left(\sqrt{\frac{1}{2n-1}} \right) = \left(1 + \frac{1}{2n-1} \right)^{-n} \sqrt{\frac{1}{2n-1}}.$$

Or

$$\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{-n} = e^{-n \ln\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)}$$

et

$$-n \ln\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n \times \frac{1}{2n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2},$$

donc

$$\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}},$$

et

$$\|u_n\|_{\infty}^{]0; +\infty[} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2n-1}}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{n^{1/2}} = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left(\|u_n\|_{\infty}^{]0; +\infty[} \right),$$

donc, par contraposée du critère de domination, la suite de terme général $\|u_n\|_{\infty}^{]0; +\infty[}$ n'est pas sommable, donc (comme c'est une suite à termes positifs) la série de terme général $\|u_n\|_{\infty}^{]0; +\infty[}$ diverge, ce qui prouve qu'il n'y a pas convergence normale sur $]0; +\infty[$.

Enfin, pour tout segment $[a; b] \subset]0; +\infty[$, dès que $n > \frac{1+a^2}{2a^2}$, on a alors $a > \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$, donc u_n décroît sur $[a; b]$, et

$$\|u_n\|_{\infty}^{[a; b]} = u_n(a) = a \left(\frac{1}{1+a^2} \right)^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left(\left(\frac{1}{1+a^2} \right)^n \right),$$

or $\left| \frac{1}{1+a^2} \right| < 1$, donc la suite de terme général $\left(\frac{1}{1+a^2} \right)^n$ est sommable, d'où par domination la convergence normale sur tout segment de $]0; +\infty[$.

(5) On pose $u_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}$.

→ Pour tout $x > 0$, $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-nx})$, or $e^{-nx} = (e^{-x})^n$ est le terme général d'une suite géométrique sommable, donc par domination (u_n) est sommable, donc $\sum u_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$.

⇒ On abandonne la convergence uniforme.

⇒ ⊕ Pour tout entier $n > 1$, l'étude des variations de $x \mapsto xe^{-nx}$ montre que sa norme infinie sur $]0; +\infty[$ est

$$\|u_n\|_{\infty}^{]0; +\infty[} = |u_n(1/n)| = \frac{e^{-1}}{n \ln(n)}.$$

⊕ Or (voir l'exercice sur les intégrales de Bertrand dans le cours sur les intégrales généralisées) la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est continue, décroissante et strictement positive sur $[2; +\infty[$, donc la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ est de même nature que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$.

⊕ Cette intégrale, par le changement de variables $u = \ln(x)$ (tellement classique que je ne le justifie plus) se transforme en $\int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{u} du$ qui est divergente, donc $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$ diverge aussi, donc que $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge, et enfin que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $]0; +\infty[$.

⇒ En revanche, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout segment $[a; b] \subset]0; +\infty[$,

$$\|u_n\|_{\infty}^{[a; b]} \leq \frac{b \times e^{-na}}{\ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o((e^{-a})^n)$$

d'où la convergence normale sur tout segment.

(6) On pose $u_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t+nx)}{n^3+t^2} dt$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $t > 0$,

$$\left| \frac{\sin(t+nx)}{n^3+t^2} \right| \leq \frac{1}{n^3+t^2}.$$

Or $t \mapsto \frac{1}{n^3+t^2}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$, d'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{n^3+t^2} dt = \left[\frac{1}{n^{3/2}} \arctan\left(\frac{t}{n^{3/2}}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^{3/2}} \times \frac{\pi}{2},$$

donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t+nx)}{n^3+t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^3+t^2} dt = \frac{1}{n^{3/2}} \times \frac{\pi}{2},$$

donc ceci étant vrai pour tout réel x :

$$\|u_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n^{3/2}} \times \frac{\pi}{2} = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

d'où la convergence normale sur $\mathbb{R}$.

Une correction de l'exercice 13.16

énoncé

1. Soit $x \in]0 ; +\infty[$,

⇒ la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$ comme rapport de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ;

⇒ $\frac{\sin(t)}{e^{xt}-1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(e^{-xt}) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $t \mapsto \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}$ est intégrable sur $[1 ; +\infty[$;

⇒ $\frac{\sin(t)}{e^{xt}-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sin(t)}{xt} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} = O(1)$, donc $t \mapsto \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}$ est intégrable sur $]0 ; 1]$.

donc pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, l'intégrale définissant $f(x)$ converge, ce qui fait de f une application sur $]0 ; +\infty[$.

2. ⇒ D'une part pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, et $t \in]0 ; +\infty[$, $|e^{-xt}| < 1$, donc

$$\begin{aligned} \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1} &= \frac{\sin(t)}{e^{xt}} \times \frac{1}{1-e^{-xt}} \\ &= \frac{\sin(t)}{e^{xt}} \times \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-xt})^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t) e^{-nxt}. \end{aligned}$$

⇒ Soit $x \in]0 ; +\infty[$.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0 ; +\infty[$, $f_n(t) = \sin(t) e^{-nxt}$.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $]0 ; +\infty[$, et intégrable sur $]0 ; +\infty[$ car majorée en valeur absolue par la fonction $t \mapsto e^{-nxt}$ qui est intégrable sur $]0 ; +\infty[$;

(ii) la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0 ; +\infty[$, et sa fonction somme $t \mapsto \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$;

(iii) Il nous reste à montrer que la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ est convergente.

⊕ **Première méthode** : on montre que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, |\sin(\theta)| \leq |\theta|,$$

ceci par

(1) étude des variations de $\theta \mapsto \sin(\theta) - \theta$ sur $[0 ; \pi/2]$,

(2) prolongement sur $[-\pi/2 ; \pi/2]$ par parité,

(3) et en remarquant que $|\sin(\theta)| \leq 1 \leq |\theta|$ pour $|\theta| > \pi/2$.

On en déduit que pour tout $t \in]0 ; +\infty[$,

$$|f_n(t)| \leq |t| e^{-nxt} = t e^{-nxt}.$$

Or à l'aide d'une intégration par parties,

→ avec $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \left(-\frac{1}{nx}\right) e^{-nxt}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0 ; +\infty[$,

→ $u(0)v(0) = 0$ et $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$,

on peut écrire

$$\int_0^{+\infty} t e^{-nxt} dt = 0 - \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{nx}\right) e^{-nxt} dt = \frac{1}{n^2 x^2},$$

donc par croissance de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \leq \frac{1}{n^2 x^2}$, d'où
 $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui entraîne la convergence de la série
 $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$.

⊕ Deuxième méthode :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} |f_n(t)| \, dt \\
 &= \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} |\sin(t)| e^{-nxt} \, dt \quad (\text{avec Chasles}) \\
 &= \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} |\sin(u + p\pi)| e^{-nx(u+p\pi)} \, du \quad (\text{en posant } t = u + p\pi) \\
 &= \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-nxp\pi} \int_0^{\pi} |(-1)^p \sin(u)| e^{-nxu} \, du \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } \sin(u + p\pi) \\ (-1)^p \sin(u) \end{array} \right) = \\
 &= \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-nxp\pi} \int_0^{\pi} \sin(u) e^{-nxu} \, du \quad (\text{car } \sin \geq 0 \text{ sur } [0 ; \pi]) \\
 &= \operatorname{Im} \left(\int_0^{\pi} e^{-(nx-i)u} \, du \right) \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-nxp\pi} \\
 &= \operatorname{Im} \left(\left[\frac{1}{-(nx-i)} e^{-(nx-i)u} \right]_0^{\pi} \right) \sum_{p=0}^{+\infty} (e^{-nx\pi})^p \\
 &= \operatorname{Im} \left[\frac{1}{-(nx-i)} (-e^{-nx\pi} - 1) \right] \times \frac{1}{1 - e^{-nx\pi}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } e^{i\pi} = -1 \text{ et} \\ |e^{-nx\pi}| < 1 \end{array} \right) \\
 &= \frac{e^{-nx\pi} + 1}{n^2 x^2 + 1} \times \frac{1}{1 - e^{-nx\pi}} \quad (\text{car } \operatorname{Im} \left(\frac{1}{-(nx-i)} \right) = \frac{1}{n^2 x^2 + 1}) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad (\text{car } e^{-nx\pi} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0).
 \end{aligned}$$

d'où la convergence de la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)| \, dt$.

Enfin bref : grâce au théorème d'intégration terme à terme, on peut affirmer que

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt} - 1} \, dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \, dt \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-nxt} \, dt.
 \end{aligned}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-nxt} dt &= \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{it} \times e^{-nxt} dt \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(nx-i)t} dt \right) \quad (\text{car } \operatorname{Re}(nx-i) = nx > 0, \text{ voir la proposition 7.2}) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{nx+i}{(nx)^2+1} \right) = \frac{1}{n^2x^2+1}. \end{aligned}$$

donc on obtient bien que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x^2+1}.$$

Une correction de l'exercice 13.17

énoncé



L'avantage du théorème de convergence dominée pour les séries, c'est qu'il ne nécessite pas d'établir au préalable la convergence de la série $\sum a_n$.

- ➡ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto t^n \sqrt{1-t^2}$ est continue sur $[0 ; 1[$.
- ➡ Pour tout $t \in [0 ; 1[$, grâce à la série géométrique,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-t^2} \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \\ &= \sqrt{1-t^2} \times \frac{1}{1-t} \\ &= \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}, \end{aligned}$$

donc $\sum f_n$ converge simplement sur $[0 ; 1[$.

- ➡ Sa somme $t \mapsto \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ est continue sur $[0 ; 1[$.

⇒ De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$, et tout $t \in [0 ; 1[$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^N f_n(t) &= \sum_{n=0}^N t^n \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-t^2} \sum_{n=0}^N t^n \\ &= \sqrt{1-t^2} \times \frac{1-t^{N+1}}{1-t} \\ &= (1-t^{N+1}) \sqrt{\frac{1+t}{1-t}},\end{aligned}$$

donc pour tout $t \in [0 ; 1[$,

$$\left| \sum_{n=0}^N f_n(t) \right| = \left| (1-t^{N+1}) \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \right| \leq \sqrt{\frac{1+t}{1-t}},$$

et $t \mapsto \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ est intégrable sur $[0 ; 1[$ car :

→ elle est continue sur $[0 ; 1[$;

→ $\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\frac{2}{1-t}} = O\left(\frac{1}{(1-t)^{1/2}}\right)$, et $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^{1/2}}$ est intégrable sur $[0 ; 1[$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour les séries pour écrire (le théorème d'intégration terme à terme aurait donné la même conclusion) que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt = \int_0^1 \sqrt{\frac{(1+t)^2}{(1-t)(1+t)}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(1+t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt \\ &= \left[\arcsin(t) - \sqrt{1-t^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} + 1.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 13.18

énoncé

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-int}}{2 + e^{it}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-int} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{it}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-int} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}e^{it} \right)^k \right) dt \quad (\text{car } \left| -\frac{1}{2}e^{it} \right| = \frac{1}{2} < 1) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^k e^{i(-n+k)t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) dt \end{aligned}$$

en notant pour tout $t \in [0 ; 2\pi]$ et $k \in \mathbb{N}$, $f_k(t) = \left(-\frac{1}{2} \right)^k e^{i(-n+k)t}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est continue sur $[0 ; 2\pi]$, et $\|f_k\|_{\infty}^{[0; 2\pi]} = \left(\frac{1}{2} \right)^k$, donc $\sum f_k$ converge normalement sur $[0 ; 2\pi]$.

On peut ainsi appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

$$I_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^k \int_0^{2\pi} e^{i(-n+k)t} dt$$

Mais

$$\int_0^{2\pi} e^{i(-n+k)t} dt = \begin{cases} \frac{1}{i(-n+k)} \left[e^{i(-n+k)t} \right]_0^{2\pi} = 0, & \text{si } k \neq n, \text{ ce qui est vrai pour} \\ & \text{tout } k \in \mathbb{N} \text{ lorsque } n < 0, \\ 2\pi, & \text{si } k = n, \text{ qui n'est possible} \\ & \text{que lorsque } n \geq 0. \end{cases}$$

donc

- si $n < 0$, tous les termes de la somme qui donne I_n sont nuls, donc $I_n = 0$.
- si $n \in \mathbb{N}$, alors quand k va de 0 à $+\infty$ dans la somme, le terme non nul est obtenu pour $k = n$, ce qui donne

$$I_n = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right)^n \times 2\pi = \left(-\frac{1}{2} \right)^n \pi.$$

Une correction de l'exercice 13.19

énoncé

1. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^p \ln^q(x)$ est continue sur $]0 ; 1]$, et tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$ par croissances comparées, donc elle est prolongeable en une fonction continue sur $[0 ; 1]$, ce qui en fait une fonction intégrable sur $]0 ; 1]$. Ainsi $I(p, q)$ est bien une intégrale convergente.

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, les fonctions $u : x \mapsto \frac{1}{p+1} x^{p+1}$ et $v : x \mapsto \ln^{q+1}(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0 ; 1]$, et par croissances comparées leur produit tend vers 0 en 0, et vaut 0 en 1, donc une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} I(p, q+1) &= \int_0^1 x^p (\ln x)^{q+1} dx = \int_0^1 u'(x) v(x) dx \\ &= \left[u(x) v(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{p+1} x^{p+1} (q+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^q dx \\ &= -\frac{q+1}{p+1} \int_0^1 x^p (\ln x)^q dx = -\frac{q+1}{p+1} \times I(p, q). \end{aligned}$$

On en déduit par récurrence que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I(p, q) &= -\frac{q}{p+1} \times \left(-\frac{q-1}{p+1} \right) \times \cdots \times \left(-\frac{1}{p+1} \right) I(p, 0) \\ &= (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^q} \times \frac{1}{p+1} \quad (\text{car } I(p, 0) = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1},) \\ &= (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il nous suffit alors de prendre $p = q = n$ pour conclure que

$$\int_0^1 (x \ln x)^n dx = \int_0^1 x^n (\ln x)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

2. $\Rightarrow$ La fonction $x \mapsto x^x = e^{x \ln x}$ est continue sur $]0 ; 1]$, et comme par croissances comparées $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc $x^x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, on peut conclure que $x \mapsto x^x$ est prolongeable en une fonction continue, que l'on va noter f , sur $[0 ; 1]$, et que $\int_0^1 x^x dx = \int_0^1 f(x) dx$ est une intégrale convergente.

$\Rightarrow$ Pour tout $x \in]0 ; 1]$, grâce à la série exponentielle :

$$f(x) = e^{x \ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{(x \ln x)^n}{n!} & \text{si } x \in]0 ; 1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$, et f_0 la fonction constante égale à 1 sur $[0 ; 1]$.

⊕ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0 ; 1]$ (par croissances comparées en 0).

⊕ La fonction $g : x \mapsto x \ln x$, est dérivable sur $]0 ; 1]$ de dérivée $x \mapsto \ln(x) + 1$, négative sur $]0 ; e^{-1}]$, et positive sur $[e^{-1} ; 1]$, donc cette fonction g est décroissante sur $]0 ; e^{-1}]$ et croissante sur $[e^{-1} ; 1]$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ et $g(1) = 0$. On en déduit que pour tout $x \in]0 ; 1]$, $|x \ln(x)| \leq |g(e^{-1})| = e^{-1}$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0 ; 1]$,

$$|f_n(x)| = \frac{|x \ln(x)|^n}{n!} \leq \frac{e^{-n}}{n!},$$

d'où

$$\|f_n\|_{\infty}^{[0;1]} \leq \frac{e^{-n}}{n!}.$$

Or la série $\left(\frac{e^{-n}}{n!}\right)$ est sommable (c'est la suite qui définit la série exponentielle), donc par majoration $\|f_n\|_{\infty}^{[0;1]}$ est le terme général d'une suite sommable, et par conséquent $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0 ; 1]$.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme **sur un segment** :

$$\begin{aligned} \boxed{\int_0^1 x^x dx} &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \quad (\text{par intégration terme à terme}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x \ln x)^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 (x \ln x)^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \times (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}} \quad (\text{en posant } n' = n + 1). \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 13.20

énoncé

1. pour tout $\alpha > 1$, $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, et $\alpha > 1$, donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente, et par domination, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$ converge aussi.
2. Soit $\alpha \in]1 ; +\infty[$. Pour tout $x \geq \alpha$, on a d'une part

$$\zeta(x) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

et d'autre part pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{n^x} dx &= \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-\ln(n)x} dx = \left[\frac{1}{-\ln(n)} e^{-\ln(n)x} \right]_{\alpha}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{-\ln(n)} [0 - e^{-\ln(n)\alpha}] = \frac{1}{n^\alpha \ln(n)}. \end{aligned}$$

On veut donc prouver que

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{n^x} dx,$$

ce qui revient à intervertir somme et intégrale, ou à intégrer terme à terme.

On va appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

- ⇒ Pour tout $n \geq 2$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-\ln(n)x}$ est continue et intégrable sur $[\alpha ; +\infty[$.
- ⇒ La série de fonctions $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge simplement sur $]1 ; +\infty[$, donc sur $[\alpha ; +\infty[$, et a pour somme $x \mapsto \zeta(x) - 1$.
- ⇒ Mais $\|f_n\|_{\infty}^{[\alpha ; +\infty[} = \frac{1}{n^\alpha}$ est sommable, donc $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge normalement, et a fortiori uniformément, sur $[\alpha ; +\infty[$.

Ainsi les fonctions f_n étant continues sur $[\alpha ; +\infty[$, on peut affirmer que la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} f_n = \zeta - 1$ est aussi continue sur $[\alpha ; +\infty[$.

- ⇒ Pour tout $n \geq 2$,

$$\int_{\alpha}^{+\infty} |f_n(x)| dx = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{n^x} dx = \frac{1}{n^\alpha \ln(n)},$$

donc on déduit de la question 1 que la série de terme général $\int_{\alpha}^{+\infty} |f_n(x)| dx$ converge.

Les conditions du théorème d'intégration terme à terme sont donc réunies, et son application donne le résultat voulu.

Une correction de l'exercice 13.21

énoncé

Notons encore une fois pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

1.



On veut prouver la convergence normale de la série des f_n , mais on a un problème avec f_0 qui n'est pas bornée sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On va donc travailler sur la série des f_n avec $n \geq 1$, puis ajouter à la fin la fonction f_0 qui est aussi continue sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

- Tout d'abord, on constate que les fonctions f_n sont toutes continues sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on sait que, comme on a bien pris $n \geq 1$,

$$-\frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2^n} \leq \frac{\pi}{4},$$

donc la fonction $\tan$ étant croissante sur cet intervalle

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \leq \tan\left(\frac{x}{2^n}\right) \leq \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

d'où

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Par conséquent, $\|f_n\|_{\infty}^{]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- Ainsi, comme la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ est sommable, on en déduit par domination que la suite de terme général $\|f_n\|_{\infty}^{]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[}$ est aussi sommable, donc que la série des fonctions f_n (pour $n \geq 1$) converge normalement, et a fortiori uniformément, et à plus fortes raisons simplement, sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- On en déduit que la fonction somme $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est définie et continue sur cet intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, et comme f_0 est aussi continue sur cet intervalle, on peut conclure que $f_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Au rang $N = 0$,

$$2^{N+1} \sin\left(\frac{x}{2^N}\right) \times \prod_{n=0}^N \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x).$$

Supposons que pour un $N \in \mathbb{N}$,

$$2^{N+1} \sin\left(\frac{x}{2^N}\right) \prod_{n=0}^N \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sin(2x),$$

alors au rang suivant :

$$\begin{aligned} & 2^{N+2} \sin\left(\frac{x}{2^{N+1}}\right) \prod_{n=0}^{N+1} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \\ &= 2^{N+2} \sin\left(\frac{x}{2^{N+1}}\right) \times \left(\cos\left(\frac{x}{2^{N+1}}\right) \times \prod_{n=0}^N \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \right) \\ &= 2^{N+1} \left(2 \sin\left(\frac{x}{2^{N+1}}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2^{N+1}}\right) \right) \times \prod_{n=0}^N \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \\ &= 2^{N+1} \left(\sin\left(2 \times \frac{x}{2^{N+1}}\right) \right) \prod_{n=0}^N \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \\ &\quad (\text{car } \sin(2\Box) = 2 \sin(\Box) \cos(\Box)) \\ &= 2^{N+1} \sin\left(\frac{x}{2^N}\right) \prod_{n=0}^N \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \quad (\text{on reconnaît ici la quantité de l'hypothèse de récurrence}). \\ &= \sin(2x) \quad \text{c.Q.F.D.} \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On a établi à la question 1 la convergence normale, donc uniforme, sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ de la série dont la somme est f . Cette convergence est alors encore vraie sur tout segment de cet intervalle, sur lequel on peut donc

intégrer la somme terme à terme :

$$\begin{aligned}
 \int_0^x f(t) dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{t}{2^n}\right) \right) dt \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \tan\left(\frac{t}{2^n}\right) \frac{1}{2^n} dt \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{x/2^n} \tan(u) du \quad (\text{en posant } u = \frac{t}{2^n}) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[-\ln|\cos(u)| \right]_0^{x/2^n} \quad (\text{il est pratique de savoir que : } \tan = \frac{\sin}{\cos} = -\frac{(\cos)'}{\cos} = (-\ln|\cos|)') \\
 &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left|\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|.
 \end{aligned}$$

Cette somme est, par définition de la convergence d'une série, la limite de la somme finie

$$\sum_{n=0}^N \ln\left|\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| = \ln\left(\left|\prod_{n=0}^N \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|\right),$$

et grâce à la question précédente, pour $x \neq 0$,

$$\sum_{n=0}^N \ln\left|\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| = \ln\left(\left|\frac{\sin(2x)}{2^{N+1} \sin\left(\frac{x}{2^N}\right)}\right|\right).$$

Or $\frac{x}{2^N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, donc $\sin\left(\frac{x}{2^N}\right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{x}{2^N}\right)$, et

$$2^{N+1} \sin\left(\frac{x}{2^N}\right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{N+1} \times \left(\frac{x}{2^N}\right) = 2x \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 2x,$$

donc par continuité du logarithme et de la valeur absolue

$$\ln\left(\left|\frac{\sin(2x)}{2^{N+1} \sin\left(\frac{x}{2^N}\right)}\right|\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln\left(\left|\frac{\sin(2x)}{2x}\right|\right).$$

On peut donc conclure que pour tout réel non nul x de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$,

$$\int_0^x f(t) dt = -\ln\left(\left|\frac{\sin(2x)}{2x}\right|\right).$$

Enfin, grâce au théorème fondamental de l'analyse, comme on sait que f est continue sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on peut affirmer que la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en 0. On va donc, sur $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$, dériver la fonction $x \mapsto -\ln\left(\left|\frac{\sin(2x)}{2x}\right|\right)$ pour obtenir f :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}, f(x) = -\frac{2}{\tan(2x)} + \frac{1}{x}.$$

$$f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0.$$

Une correction de l'exercice 13.22

énoncé

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n la fonction $x \mapsto \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

1. Pour tout réel $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{x^n}{1+x^{2n}} &= 0 \text{ si } x = 0, \\ \frac{x^n}{1+x^{2n}} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^n}{1} = x^n \text{ si } 0 < x < 1, \\ \frac{x^n}{1+x^{2n}} &= \frac{1}{2} \text{ si } x = 1, \\ \frac{x^n}{1+x^{2n}} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^n}{x^{2n}} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \text{ si } x > 1, \end{aligned}$$

donc

→ si $x \geq 0$ et $x \neq 1$, $f_n(x)$ est nul ou équivaut au terme général d'une suite sommable, d'où la convergence simple de $\sum f_n$, et par conséquent la définition de S sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$;

→ En revanche, pour $x = 1$, $\sum f_n(1) = \sum \frac{1}{2}$ diverge, donc S n'est pas définie en 1.

On peut conclure que l'ensemble de définition demandé est

$$\mathcal{D} = [0; 1[\cup]1; +\infty[$$

2. Toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$.

De plus, on remarque que sur tout segment $[a; b] \subset [0; 1[$,

$$\forall x \in [a; b], |f_n(x)| = \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq x^n \leq b^n,$$

donc

$$\|f_n\|_{\infty}^{[a; b]} \leq b^n,$$

d'où la convergence normale, et a fortiori uniforme, de $\sum f_n$ sur tout segment de $]0 ; 1[$.

On en déduit par le [théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions](#) que $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est continue sur $]0 ; 1[$.

De l'autre côté de 1, on remarque que pour tout $x \in]1 ; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n} \times \frac{1}{x^n}}{x^{2n} \times \left(1 + \frac{1}{x^{2n}}\right)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^{2n}} = S\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, par continuité de $inv : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]1 ; +\infty[$ à valeurs dans $]0 ; 1[$, et continuité de S sur $]0 ; 1[$, on en déduit que $S = S \circ inv$ est aussi continue sur $]1 ; +\infty[$.

3. $\Rightarrow$ Tout d'abord, la remarque $S(x) = S\left(\frac{1}{x}\right)$ nous permet de n'étudier S que sur $]0 ; 1[$, pour ensuite en déduire le comportement sur le reste de $\mathcal{D}$.
 $\Rightarrow$ Toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$.

De plus, on remarque que pour tout segment $[a ; b] \subset]-1 ; 1[$, on a $[a ; b] \subset [-\alpha ; \alpha]$ avec $\alpha = \max(|a|, |b|)$, donc

$$\forall x \in [a ; b], |f_n(x)| = \frac{|x|^n}{1+|x|^{2n}} \leq |x|^n \leq \alpha^n,$$

donc $\|f_n\|_{\infty}^{[a; b]} \leq \alpha^n$, d'où, sachant que $0 \leq \alpha < 1$, la convergence normale, et a fortiori uniforme, de $\sum f_n$ sur tout segment de $] -1 ; 1[$.

On en déduit par le [théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions](#) que $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est continue sur $] -1 ; 1[$.

De l'autre côté de 1, on remarque que pour tout réel x tel que $|x| > 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n} \times \frac{1}{x^n}}{x^{2n} \times \left(1 + \frac{1}{x^{2n}}\right)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^{2n}} = S\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, par continuité de $inv : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $] -\infty ; -1[\cup] 1 ; +\infty[$ à valeurs dans $] -1 ; 1[$, et continuité de S sur $] -\frac{1}{x} ; \frac{1}{x}[$, on en déduit que $S = S \circ inv$ est aussi continue sur $] -\infty ; -1[\cup] 1 ; +\infty[$.

→ ⊕ Tout d'abord, la remarque $S(x) = S\left(\frac{1}{x}\right)$ nous permet de n'étudier S que sur $] -1 ; 1[$, pour ensuite en déduire le comportement sur le reste de $\mathcal{D}$.

⊕



N'oublions pas que même les fonctions non dérivables ont le droit d'avoir un sens de variations ! Donc avant de se jeter sur la dérivation de f pour connaître ses variations, on peut aussi comparer $f(a)$ et $f(b)$ pour $a < b$!

Soient deux réels a, b tels que $0 \leq a < b < 1$. Alors

$$\begin{aligned} S(b) - S(a) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{1+b^{2n}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{b^n}{1+b^{2n}} - \frac{a^n}{1+a^{2n}} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n(1+a^{2n}) - a^n(1+b^{2n})}{(1+b^{2n})(1+a^{2n})} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(b^n - a^n)(1 - (ab)^n)}{(1+b^{2n})(1+a^{2n})}. \end{aligned}$$

Or $ab \in [0 ; 1[$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - (ab)^n > 0$, et par conséquent

$$\frac{(b^n - a^n)(1 - (ab)^n)}{(1+b^{2n})(1+a^{2n})} > 0$$

d'où $S(b) - S(a) > 0$.

On a donc prouvé que S est strictement croissante sur $[0 ; 1[$.

⊕ Ensuite si $1 < a < b$, alors $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 1$, et grâce au sens de variation précédent : $S\left(\frac{1}{a}\right) > S\left(\frac{1}{b}\right)$.

D'où, sachant que pour tout réel non nul x de $\mathcal{D}$, $S(x) = S\left(\frac{1}{x}\right)$, on peut conclure que $S(a) > S(b)$.

On a donc établi que S est strictement décroissante sur $] 1 ; +\infty[$.



Sur le brouillon, on constate que $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^n$, donc en cachette, au mépris des règles de calcul sur les équivalents qui nous interdisent de les additionner, on se dit que peut-être que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

On essaie donc de prouver ce résultat.

Montrons que $S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{1-x}$, pour cela montrons que

$$\frac{1-x}{x} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)x^{n-1}}{1+x^{2n}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

→ Notons pour tout $x \in [0 ; 1/2]$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n(x) = \frac{(1-x)x^{n-1}}{1+x^{2n}}.$$

Alors toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0 ; 1/2]$ comme rapport de fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.

→ De plus, pour tout $x \in [0 ; 1/2]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|1-x| \leq 1$ et $1+x^{2n} \geq 1$, donc

$$|u_n(x)| \leq |x|^{n-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\text{donc } \|u_n\|_{\infty}^{[0;1/2]} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

On en déduit par domination par la suite géométrique sommable de raison $\frac{1}{2}$ que $\sum \|u_n\|_{\infty}^{[0;1/2]}$ converge,

donc que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0 ; 1/2]$,

donc que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0 ; 1/2]$.

Ainsi la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)x^{n-1}}{1+x^{2n}}$ est continue sur $[0 ; 1/2]$ comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur $[0 ; 1/2]$.

En particulier en 0, on obtient que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)x^{n-1}}{1+x^{2n}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{0^{n-1}}{1+0^{2n}} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1, \text{ c.Q.F.D.}$$

⊕ Comme $\frac{1-x}{x}S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, on en déduit par composition des limites que

$$\frac{1-1/x}{1/x} S(1/x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1,$$

d'où

$$(x-1)S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1,$$

ce qui permet d'affirmer que

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{1-x}.$$

Une correction de l'exercice 13.23

énoncé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0 ; +\infty[$, on note $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. $\Rightarrow$ Soit $x > 0$.

⊕ la suite de terme général $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$ est alternée,

⊕ la suite de terme général $|f_n(x)| = \frac{1}{n+x}$ est décroissante et converge vers 0,

donc grâce au critère spécial des séries alternées, la série $\sum f_n(x)$ converge, donc la série de fonctions $\sum f_n$ est simplement convergente sur $]0 ; +\infty[$.

$\Rightarrow$ Pour tout $x > 0$, grâce au critère spécial des séries alternées, on sait aussi que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$|R_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq |f_{N+1}(x)| = \frac{1}{N+1+x},$$

donc

$$\|R_N\|_{\infty}^{]0; +\infty[} \leq \frac{1}{N+1}$$

et par encadrement, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|R_N\|_{\infty}^{]0; +\infty[} = 0$, ce qui prouve la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $]0 ; +\infty[$.

Mais les fonctions f_n sont toutes continues sur $]0 ; +\infty[$, donc on peut conclure que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est une fonction continue sur $]0 ; +\infty[$.

⇒ Soient $0 < a < b$,

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+b} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+a} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+b} - \frac{1}{n+a} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a-b}{(n+b)(n+a)} \\ &= (a-b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+b)(n+a)}. \end{aligned}$$

La somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+b)(n+a)}$ est aussi la somme d'une série alternée qui vérifie les conditions du critère spécial des séries alternées, donc grâce à icelui, on sait que la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+b)(n+a)}$ est du signe de son premier terme $\frac{1}{ba}$.

Or ce terme est positif, donc $f(b) - f(a)$ est du signe de $(a-b)$, ce qui prouve que f est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

2. (a) Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) + f(x+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x} \quad (\text{en posant } n' = n+1 \text{ dans la deuxième somme}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \\ &= \frac{(-1)^0}{0+x} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

(b) Quand x tend vers 0, $x+1$ tend vers 1, et comme f est continue sur $]0 ; +\infty[$ donc en 1, $f(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(1)$.

Ainsi comme $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, alors

$$f(x) = \frac{1}{x} - f(x+1) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Une correction de l'exercice 13.24

énoncé

1. $\Rightarrow$



Vérifier que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx)}$ est définie sur $]0 ; +\infty[$ revient à vérifier que pour tout $x > 0$, la somme infinie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx)}$ existe, autrement dit que pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx)}$ converge.
Par conséquent, répondre à cette question revient à prouver la convergence simple sur $]0 ; +\infty[$ de la série des fonctions $x \mapsto \frac{1}{n(1+nx)}$.

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$,

$$u_n(x) = \frac{1}{n(1+nx)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

d'où (...blablabla...).

$\Rightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : x \mapsto \frac{1}{n(1+nx)}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$.

De plus u_n est décroissante sur $]0 ; +\infty[$, donc

⊕ $\|u_n\|_{\infty}^{]0 ; +\infty[} = \frac{1}{n}$ qui n'est pas sommable,

⊕ mais en revanche, pour tout segment $[a ; b] \subset]0 ; +\infty[$, $\|u_n\|_{\infty}^{[a ; b]} = u_n(a) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (vu juste avant),

donc $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de $]0 ; +\infty[$.

On peut ainsi conclure que $f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $]0 ; +\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n(1+nx)}$ est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, donc pour tous réels a, b tels que $0 < a < b$, on a $f_n(a) > f_n(b)$, puis par convergence simple de $\sum f_n$ les deux séries $\sum f_n(a)$ et $\sum f_n(b)$ convergent, donc en additionnant ces inégalités de $n = 1$ à $+\infty$, par conservation des inégalités larges à la

limite, les séries concernées étant convergentes, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(a) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(b)$, c'est-à-dire $f(a) \geq f(b)$.

Donc $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.



N'oublions pas que même les fonctions non dérivables ont le droit d'avoir un sens de variations ! Donc avant de se jeter sur la dérivation de f pour connaître ses variations, on peut aussi comparer $f(a)$ et $f(b)$ pour $a < b$!

3. (a) $\Rightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

$\Rightarrow$ De plus, on a déjà vu que u_n est décroissante et positive sur $]0 ; +\infty[$, donc qu'en particulier

$$\|u_n\|_{\infty}^{[1; +\infty[} = u_n(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

Ainsi $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1 ; +\infty[$.
Ainsi par le théorème de la double-limite :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) \quad (\text{par le théorème de la double-limite}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

(b)



On sait que

$$\frac{x}{n(1+nx)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

donc, sur le brouillon où on a tous les droits, on écrit en additionnant tout ça, au mépris de toutes les règles de calcul sur les équivalents, que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}.$$

On va prouver ce résultat de nouveau avec le théorème de la double-limite en montrant que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Notons $v_n(x) = \frac{x}{n(1+nx)}$.

⇒ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\lim} \frac{1}{n^2}.$$

⇒ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in [1 ; +\infty[$,

$$|v_n(x)| = \left| \frac{1}{n\left(\frac{1}{x} + n\right)} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

donc

$$\|v_n\|_{\infty}^{[1; +\infty[} \leq \frac{1}{n^2},$$

d'où par domination la convergence normale, donc uniforme, de $\sum v_n$ sur $[1 ; +\infty[$.

On peut donc de nouveau appliquer le théorème de la double-limite qui nous donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

4. Fixons un réel x dans $]0; +\infty[$.

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t(1+tx)}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$. On en déduit que pour tout $n \geq 2$, par croissance de l'intégrale,

$$\int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \int_n^{n+1} \varphi(n) dt = \varphi(n) = \int_{n-1}^n \varphi(n) dt \leq \int_{n-1}^n \varphi(t) dt.$$

Pour tout $N \geq 2$, on additionne ces inégalités pour n allant de 2 à N , et on obtient grâce à la relation de Chasles :

$$\int_2^{N+1} \varphi(t) dt \leq \sum_{n=2}^N \varphi(n) \leq \int_1^N \varphi(t) dt.$$

Or en remarquant que $\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}$,

$$\begin{aligned} \int_2^{N+1} \varphi(t) dt &= [\ln(t) - \ln(1+tx)]_2^{N+1} = \left[\ln\left(\frac{t}{1+tx}\right) \right]_2^{N+1} \\ &= \ln\left(\frac{N+1}{1+(N+1)x}\right) - \ln\left(\frac{2}{1+2x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{N+1} + x}\right) - \ln\left(\frac{2}{1+2x}\right) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{2}{1+2x}\right) = \ln\left(\frac{1+2x}{2x}\right). \end{aligned}$$

De même

$$\int_1^N \varphi(t) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1+x}{x}\right).$$

et comme

$$\sum_{n=2}^N \varphi(n) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(1+nx)} - \frac{1}{1+x} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{1+x}$$

on en déduit par prolongement des inégalités larges à la limite, que

$$\ln\left(\frac{1+2x}{2x}\right) \leq f(x) - \frac{1}{1+x} \leq \ln\left(\frac{1+x}{x}\right),$$

qui équivaut à

$$-\ln(x) + \ln\left(\frac{1+2x}{2}\right) + \frac{1}{1+x} \leq f(x) \leq -\ln(x) + \ln(1+x) + \frac{1}{1+x}.$$

Mais $\ln\left(\frac{1+2x}{2}\right) + \frac{1}{1+x}$ et $\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}$ sont bornés quand x tend vers 0, donc sont négligeables devant $-\ln(x)$, ainsi les deux termes qui encadrent $f(x)$ sont équivalents à $-\ln(x)$, d'où

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x).$$

Une correction de l'exercice 13.25

énoncé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x , on note $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

→ Si $x < 0$, $|f_n(x)| = \frac{e^{n|x|}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par croissances comparées, donc la série de terme général $f_n(x)$ diverge grossièrement.

→ Si $x \geq 0$,

⊕ la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} = \left((-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée,

⊕ tandis que la suite $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{e^{-nx}}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (car les deux suites $(e^{-nx})_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ le sont toutes les deux et sont positives),

⊕ et tend vers 0,

donc par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum f_n(x)$ converge.

On en déduit que la fonction somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est définie sur $[0 ; +\infty[$, autrement dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0 ; +\infty[$.

2. → Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0 ; +\infty[$,

→ et on vient de voir que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0 ; +\infty[$.

→ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = (-1)^n \frac{-ne^{-nx}}{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} e^{-nx},$$

donc pour tout segment $[a ; b] \subset]0 ; +\infty[$,

$$\forall x \in [a ; b], \quad |f'_n(x)| \leq \frac{n}{n+1} e^{-nx} \leq e^{-nx} \leq e^{-na},$$

donc $\|f'_n\|_{\infty}^{[a;b]} \leq e^{-na} = (e^{-a})^n$, qui est le terme général d'une suite géométrique sommable puisque $|e^{-a}| < 1$.

Ainsi $\sum f'_n$ est normalement convergente, donc uniformément convergente, sur tout segment de $]0 ; +\infty[$.

On peut donc conclure grâce au [théorème de dérivation terme à terme des sommes de séries de fonctions](#) que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0 ; +\infty[$, avec pour dérivée

$$f' : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} e^{-nx}.$$

3. On en déduit que la dérivée de $x \mapsto e^{-x} f(x)$ est :

$$\begin{aligned} x &\mapsto -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) \\ &= -e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} e^{-nx} + e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} e^{-nx} \\ &= -e^{-x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} e^{-nx} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} e^{-nx} \right) \\ &= -e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1+n}{n+1} e^{-nx} = -e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-e^{-x})^n \\ &= -e^{-x} \times \frac{1}{1 - (-e^{-x})} = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} \\ &= \frac{d}{dx} (\ln(1 + e^{-x})). \end{aligned}$$

Par conséquent il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0, \quad e^{-x} f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + C,$$

d'où

$$\forall x > 0, \quad f(x) = (\ln(1 + e^{-x}) + C) e^x.$$

Il nous faut trouver la valeur de C . On va utiliser pour cela la limite de f en $+\infty$.

⇒ D'une part, pour tout $x > 0$, $f(x) = \ln(1 + e^{-x})e^x + Ce^x$, or

$$\ln(1 + e^{-x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x} \text{ car } e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $\ln(1 + e^{-x})e^x \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^{-x} \times e^x = 1$, donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } C = 0, \\ +\infty & \text{si } C < 0, \\ +\infty & \text{si } C > 0. \end{cases}$$

⇒ D'autre part,

→ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geq 1; \end{cases}$$

→ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_{\infty}^{[1; +\infty[} = \frac{e^{-n}}{n+1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc $\sum f_n$ converge normalement, et a fortiori converge uniformément, sur $[1; +\infty[$.

donc grâce au théorème de la double-limite,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} e^{-nx} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 1.$$

Ainsi par unicité de la limite (de f en $+\infty$), on en déduit que $C = 0$, donc que

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = \ln(1 + e^{-x})e^x.$$

4. La fonction $x \mapsto \ln(1 + e^{-x})e^x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et coïncide avec f sur $[0; +\infty[$, donc f est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.

Une correction de l'exercice 13.26

énoncé

1. Pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$|x \cos(x)| \leq |x| < 1,$$

donc $1 - x \cos(x) \neq 0$.

Ainsi la fonction $x \mapsto \frac{x \sin x}{1 - x \cos x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1 ; 1[$ comme rapport de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Puis en composant par arctan qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on obtient une fonction

$$f : x \mapsto \arctan \left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right)$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1 ; 1[$.

Je vous laisse retrouver grâce à la formule de dérivation de la composée de fonctions que pour tout $x \in] -1 ; 1[$,

$$f'(x) = \frac{-x^2 + x \cos(x) + \sin(x)}{x^2 - 2x \cos(x) + 1}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in] -1 ; 1[$, on note

$$f_n(x) = \frac{(x)^n \sin(nx)}{n}.$$

On va appliquer le théorème de dérivation terme à terme.

⇒ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1 ; 1[$, de dérivée définie par

$$f'_n(x) = x^n \cos(nx) + x^{n-1} \sin(nx);$$

⇒ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in] -1 ; 1[$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n} \leq |x|^n,$$

donc comme $|x| < 1$, on en déduit par comparaison que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable, donc que $\sum f_n$ converge simplement sur $] -1 ; 1[$.

⇒ Tout segment de $] -1 ; 1[$ est inclus dans un segment de la forme $[-\alpha ; \alpha]$, où $\alpha \in [0 ; 1[$, et je vous laisse prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f'_n\|_{\infty}^{[-\alpha ; \alpha]} \leq |\alpha|^{n-1} + |\alpha|^n$$

ce qui nous donne par domination la convergence de $\sum \|f'_n\|_{\infty}^{[-\alpha ; \alpha]}$, donc la convergence normale, et a fortiori uniforme, de $\sum f'_n$ sur tout segment de $] -1 ; 1[$.

On peut donc conclure que la fonction $g = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $] -1 ; 1[$, de dérivée définie pour tout $x \in] -1 ; 1[$ par

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos(nx) + x^{n-1} \sin(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \operatorname{Re}(e^{inx}) + x^{n-1} \operatorname{Im}(e^{inx}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Re}(x^n e^{inx}) + \operatorname{Im}(x^{n-1} e^{inx}) \quad (\text{car } x \in \mathbb{R}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Re}(x^n e^{inx}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Im}(x^{n-1} e^{inx}) \\ &\quad (\text{ces deux séries convergent par domination par } |x|^n \text{ et } |x|^{n-1}) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx}\right) + \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{inx}\right) \\ &\quad (\text{par propriété des séries complexes}). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx} &= x e^{ix} \sum_{n=0}^{+\infty} (x e^{ix})^n \\ &= x e^{ix} \frac{1}{1 - x e^{ix}} \quad (\text{car } |x e^{ix}| < 1) \\ &= \frac{x e^{ix} (1 - x e^{-ix})}{(1 - x e^{ix})(1 - x e^{-ix})} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{inx} &= e^{ix} \sum_{n=0}^{+\infty} (xe^{ix})^n \\
 &= e^{ix} \frac{1}{1 - xe^{ix}} \\
 &\quad (\text{car } |xe^{ix}| < 1) \\
 &= \frac{e^{ix} (1 - xe^{-ix})}{(1 - xe^{ix})(1 - xe^{-ix})} \\
 &= \frac{e^{ix} - x}{1 - 2x \cos(x) + x^2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \operatorname{Re} \left(\frac{xe^{ix} - x^2}{1 - 2x \cos(x) + x^2} \right) \\
 &\quad + \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix} - x}{1 - 2x \cos(x) + x^2} \right) \\
 &= \frac{x \cos(x) - x^2}{1 - 2x \cos(x) + x^2} + \frac{\sin(x)}{1 - 2x \cos(x) + x^2} \\
 &= \frac{x \cos(x) - x^2 + \sin(x)}{1 - 2x \cos(x) + x^2}.
 \end{aligned}$$

Et là, fous de surprise, nous constatons que la fonction f et la fonction g ont la même dérivée sur $] -1 ; 1[$, donc qu'il existe un réel C tel que sur cet intervalle $g = f + C$. Mais le plus gueudin, c'est que $f(0) = \arctan(0) = 0$ tandis que $g(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$, donc $C = 0$, et finalement $f = g$!

Autrement dit, pour tout $x \in] -1 ; 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n} = \arctan \left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right).$$

Une correction de l'exercice 13.27

énoncé

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

I.1 - Existence de la solution

1. Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, je ne détaille pas comment la série de terme général $\varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, ou même est carrément sommable car $\varphi_k(x) = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

Donc pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $\sum \varphi_k(x)$ converge, ce qui prouve la convergence simple de la série des fonctions φ_k sur $]0 ; +\infty[$.

2. Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$,

$$\begin{aligned}\varphi(x+1) + \varphi(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+1+k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \text{ (en posant } k' = k+1 \text{ dans la première somme)} \\ &= - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} - \frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{x^2}, \text{ C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

3. Je me contente de dire que le critère spécial des séries alternées nous permet d'affirmer que les restes des séries qui le satisfont sont en valeur absolue inférieures à la valeur absolue de leur premier terme.

4. La question 2. assure la deuxième condition de (P).

Si on applique le résultat précédent avec $n = 0$, alors

$$\forall x \in]0 ; +\infty[, \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \right| \leq \frac{1}{(x+1)^2}, \text{ donc } |\varphi(x) - \varphi_0(x)| \leq \frac{1}{(x+1)^2},$$

or $\frac{1}{(x+1)^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc par encadrement $\varphi(x) - \varphi_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, et comme $\varphi_0(x) = \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on peut conclure que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0, \text{ C.Q.F.D.}$$

I.2 - Unicité de la solution

5. Soit f une solution du problème (P).

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on prouve l'égalité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, l'initialisation est donnée par (P), $f(x) = -f(x+1) + \frac{1}{x^2}$. L'hérédité se fait aussi avec (P) appliquée en remplaçant x par la valeur $x+n+1 > 0$.

Ainsi

$$\forall x \in]0 ; +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = (-1)^n f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \varphi_k(x).$$

6. Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$,

⇒ par hypothèse $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $f(x+n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;

⇒ et par définition de φ , $\sum_{k=0}^n \varphi_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(x)$;

⇒ ainsi,

$$(-1)^n f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \varphi_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} f(x) \\ 0 + \varphi(x) \end{cases}$$

d'où par unicité de la limite $f(x) = \varphi(x)$.

Ceci montre bien l'unicité de la solution de (P), et nous avons prouvé l'existence au début.

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

7. On note $I = [\varepsilon, +\infty[$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $|\varphi_k| : x \mapsto \frac{1}{(x+k)^2}$ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$, donc

$$\|\varphi_k\|_{\infty}^{[\varepsilon; +\infty[} = \varphi_k(\varepsilon) = \frac{1}{(\varepsilon + k)^2}$$

donc $\|\varphi_k\|_{\infty}^{[\varepsilon; +\infty[} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$, ce qui permet de prouver que $\sum \varphi_k$ converge normalement, donc uniformément, sur $[\varepsilon ; +\infty[$.



Sauf erreur de ma part, le résultat de la question 3 permettait d'établir que $\|R_n\|_{\infty}^{]0; +\infty[} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$, inégalité grâce à laquelle on prouve que $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur $]0 ; +\infty[$, donc a fortiori sur tout $[\varepsilon ; +\infty[$.

Je ne comprends pas trop pourquoi l'énoncé a introduit cet ε dans cette question...

8. $\Rightarrow$ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ_k est continue sur $]0 ; +\infty[$,
 $\Rightarrow$ et pour tout segment $[a ; b] \subset]0 ; +\infty[$, on vient de voir que $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur tout $[a ; +\infty[$, donc a fortiori converge uniformément sur $[a ; b]$.

Le théorème de continuité des limites et sommes de suites de fonctions permet de conclure que φ est continue sur $]0 ; +\infty[$.

Comme φ vérifie (P), on a en particulier pour tout $x \in]0 ; +\infty[$,

$$x^2 \varphi(x) = 1 - x^2 \varphi(x+1).$$

On sait que φ est continue sur $]0 ; +\infty[$, donc en particulier en 1, d'où

$$x^2 \varphi(x) = 1 - x^2 \varphi(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 - 0^2 \times \varphi(1) = 1,$$

autrement dit $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

9. On sait déjà que $\sum \varphi_k$ converge simplement sur $]0 ; +\infty[$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction φ_k est $\mathcal{C}^1$ sur $]0 ; +\infty[$ comme fraction rationnelle définie sur $]0 ; +\infty[$, de dérivée

$$\varphi'_k : x \mapsto (-1)^k \frac{-2}{(x+k)^3} = (-1)^{k+1} \frac{2}{(x+k)^3}.$$

Mais la fonction $x \mapsto \left| \varphi'_k \right| = \frac{2}{(x+k)^3}$ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$, donc pour tout segment $[a ; b] \subset]0 ; +\infty[$,

$$\left\| \varphi'_k \right\|_{\infty}^{[a ; b]} = \frac{2}{(a+k)^3} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^3},$$

donc (...) d'où la convergence normale, donc uniforme, de $\sum \varphi'_k$ sur tout segment de $]0 ; +\infty[$.

Les conditions du théorème de dérivation terme à terme sont donc vérifiées, et permettent de conclure que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0 ; +\infty[$.

10. Pour tout réel $x > 0$, le critère spécial des séries alternées, dont je vous laisse montrer que la série de terme général $\frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$ vérifie les conditions, assure que la somme $\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{(x+k)^3}$ est du signe de son premier terme, ici $\frac{-2}{x^3}$, donc de signe négatif. On en déduit que φ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

11. La fonction φ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$, donc pour tout $x > 0$,

$$2\varphi(x+1) \leq \varphi(x) + \varphi(x+1) = \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x).$$

On a donc déjà la première inégalité de l'énoncé.

Pour la deuxième, il suffit de prendre $x \in]1; +\infty[$, et d'appliquer l'inégalité de gauche au réel $x - 1$ qui est bien dans $]0; +\infty[$, ce qui donne

$$2\varphi(x) = 2\varphi((x-1)+1) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Par encadrement, on en déduit directement que

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}.$$

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Soit $x > 0$ fixé.

On note pour $k \in \mathbb{N}$, $f_k : t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t)$.

12. $\Rightarrow$ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction f_k est continue sur $]0; 1]$, et par croissances comparées (voir la technique des intégrales de Bertrand)

$$f_k(t) = t^{x+k-1} \ln(t) = \frac{\ln(t)}{t^{1-(x+k)}} \underset{t \rightarrow 0}{=} \left(\frac{1}{t^{1-\frac{x+k}{2}}} \right)$$

or $1 - \frac{x+k}{2} < 1$, donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{1-\frac{x+k}{2}}}$ est intégrable sur $]0; 1]$, et où par domination, f_k l'est aussi.

$\Rightarrow$ On pose

$$\oplus u(t) = \ln(t) \text{ donc } u'(t) = \frac{1}{t},$$

$$\oplus \text{ et } v'(t) = t^{x+k-1} \text{ en choisissant } v(t) = \frac{t^{x+k}}{x+k},$$

et comme

$$\oplus \text{ les fonctions } u \text{ et } v \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, 1],$$

$$\oplus \text{ et } u(t)v(t) \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissances comparées,}$$

on peut effectuer une intégration par parties qui finit par donner

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) dt &= \left[\frac{1}{x+k} t^{x+k} \ln(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x+k} t^{x+k} \times \frac{1}{t} dt \\ &= (0 - 0) - \frac{1}{x+k} \int_0^1 t^{x+k-1} dt = -\frac{1}{(x+k)^2}, \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

13.



Grâce à la question précédente, pour tout $x \in]0 ; 1]$,

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \times \int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^k t^{x+k-1} \ln(t) dt,$$

d'où l'idée d'intervertir somme (infinie et intégrale).

Soit $x \in]0 ; +\infty[$, notons pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $t \in]0 ; 1[$,

$$f_k(t) = (-1)^k t^{x+k-1} \ln(t).$$



On choisit l'intervalle $]0 ; 1[$ plutôt que $]0 ; 1]$ pour avoir ci-dessous la convergence simple de la série des $x \mapsto (-1)^k t^{x+k-1} \ln(t)$.

Alors

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction f_k est continue sur $]0 ; 1[$;
- pour tout $t \in]0 ; 1[$, $f_k(t) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} O(t^k)$, d'où la sommabilité de la suite $(f_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$, et par conséquent la convergence simple de $\sum f_k$ sur $]0 ; 1[$, avec pour tout $t \in]0 ; 1[$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{x+k-1} \ln(t) = \ln(t) t^{x-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k \\ &= \ln(t) t^{x-1} \times \frac{1}{1+t} = \frac{\ln(t) t^{x-1}}{1+t}, \end{aligned}$$

- donc la fonction $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est continue sur $]0 ; 1[$;
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, on sait déjà que

$$\int_0^1 |f_k(t)| dt = \frac{1}{(x+k)^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2},$$

d'où la convergence de la série $\sum_0^1 |f_k(t)| dt$.

Ainsi le théorème d'intégration terme à terme permet d'affirmer que,

- ⇒ tout d'abord $t \mapsto \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0 ; 1[$,
- ⇒ de plus on peut intervertir série et intégrale ce qui donne bien l'égalité voulue.

Une correction de l'exercice 13.28

énoncé

 Calcul de $\sigma(1)$

1. On note D l'ensemble de définition de σ .

⇒ Si $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, alors par croissance comparée $\left| \frac{x^k}{k^2} \right| = \frac{e^{k \ln|x|}}{k^2} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$, donc la série $\sum \frac{x^k}{k^2}$ diverge grossièrement et par conséquent $D \subset [-1, 1]$.

⇒ Par ailleurs, pour $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_k : x \mapsto \frac{x^k}{k^2}$ est continue sur l'intervalle $[-1, 1]$, et de plus $\|f_k\|_\infty^{[-1; 1]} = \frac{1}{k^2}$ donc $\sum f_k$ converge normalement, donc uniformément, et a fortiori simplement, sur $[-1, 1]$.

On en déduit que σ est définie sur $D = [-1; 1]$, et continue sur D comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues.

2. ⇒ Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$, notons $P = \alpha X^2 + \beta X$.

Ainsi $P' = 2\alpha X + \beta$ et $P'' = 2\alpha$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des intégrations par parties successives avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0; \pi]$ nous donnent

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P(t) \cos(nt) dt &= \left[P(t) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi P'(t) \frac{\sin(nt)}{n} dt \\ &= 0 + \left[P'(t) \frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi P''(t) \frac{\cos(nt)}{n^2} dt \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P''(t) \frac{\cos(nt)}{n^2} dt &= \left[2\alpha \frac{\sin(nt)}{n^2} \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0, \\ \text{et } \left[P'(t) \frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_{t=0}^{t=\pi} &= \frac{(-1)^n P'(\pi) - P'(0)}{n^2} \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt = \frac{(-1)^n (2\pi\alpha + \beta) - \beta}{n^2}.$$

En prenant $\beta = -1$ et $\alpha = \frac{1}{2\pi}$, on a $(-1)^n (2\pi\alpha + \beta) - \beta = 1$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$$

⇒ Soit $t \in]0, \pi]$.

Alors $t/2 \in]0, \pi/2]$ et ainsi $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$ et les termes de l'égalité existent bien.

Par récurrence (je détaillerai peut-être plus tard)

Avec la formule d'Euler

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikt} + \sum_{k=1}^n e^{-ikt} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikt} + \sum_{k=-n}^{-1} e^{ikt} \right) \quad (\text{en posant } k' = -k \text{ dans la seconde somme}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=-n}^n e^{ikt} - e^{i \times 0 \times t} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{-int} \times \sum_{k=0}^{2n} e^{ikt} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-int} \times \frac{1 - e^{i(2n+1)t}}{1 - e^{it}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-int} \times \frac{e^{i\frac{2n+1}{2}t} \left(e^{-i\frac{2n+1}{2}t} - e^{i\frac{2n+1}{2}t} \right)}{e^{i\frac{t}{2}} \left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}} \right)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{i \times 0 \times t} \times \frac{-2i \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{-2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 \right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}, \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

3. ⇒ On effectue une intégration par parties avec les fonctions φ et $t \mapsto \frac{-\cos(xt)}{x}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0 ; \pi]$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt &= \left[\varphi(t) \frac{-\cos(xt)}{x} \right]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^\pi \varphi'(t) \frac{\cos(xt)}{x} dt \\ &= \frac{\varphi(0) - \varphi(\pi) \cos(\pi x) + \int_0^\pi \varphi'(t) \cos(xt) dt}{x} \end{aligned}$$

Ainsi grâce aux inégalités triangulaires

$$\left| \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| \times |\cos(\pi x)| + \int_0^\pi |\varphi'(t)| |\cos(xt)| dt}{x},$$

donc en majorant $|\cos|$ par 1, et avec la croissance de l'intégrale

$$\left| \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \int_0^\pi |\varphi'(t)| dt}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

ainsi par encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = 0.$$

⇒ On sait que

$$\sigma(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2},$$

donc selon la première égalité de la question 2 :

$$\sigma(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sum_{k=1}^n \cos(kt) dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right) dt \quad \begin{array}{l} \text{(d'après la question 1,} \\ \text{et parce que } \int_{[0;1]} = \int_{]0;1]} \end{array} \\ &= \int_0^\pi \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{1}{2} t^2 \right]_0^\pi = -\frac{\pi^2}{6}.$$

On obtient donc que

$$\sigma(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt + \frac{\pi^2}{6}.$$

On voit donc que pour obtenir notre résultat, il ne nous reste plus qu'à montrer que

$$\int_0^\pi \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce pour quoi on utilise le résultat établi au début de la question, résultat connu sous le nom de lemme de Riemann-Lebesgue.

⊕ La fonction

$$t \mapsto \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

est continue sur $]0 ; \pi]$, et

$$\frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-t}{2 \times \frac{t}{2}} = -1,$$

donc la fonction

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } 0 < t \leq \pi, \\ -1 & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

est continue sur $[0 ; \pi]$.

⊕ Cette même fonction φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0 ; \pi]$ de dérivée

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{(2t - 2\pi) \sin(t/2) - (1/2)(t^2 - 2\pi t) \cos(t/2)}{4\pi \sin^2(t/2)} \\ &= \frac{4(t - \pi) \sin(t/2) - (t^2 - 2\pi t) \cos(t/2)}{8\pi \sin^2(t/2)} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{4(t - \pi) \left(\frac{t}{2} + o(t^2)\right) - (t^2 - 2\pi t) \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3)\right)}{8\pi \sin^2(t/2)} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{t^2 + o(t^2)}{8\pi \sin^2(t/2)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2}{8\pi(t/2)^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi}, \end{aligned}$$

donc grâce au théorème de la limite de la dérivée, on peut affirmer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0 ; \pi]$.

⊕ On peut donc appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue :

$$\int_0^\pi \varphi(t) \sin(x) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

donc par composition des limites, comme $\frac{(2n+1)t}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on a le résultat voulu, grâce auquel je vous laisse conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

Équivalents

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$.

⇒ La fonction $t \mapsto (\sin(t))^x = \exp(x \ln(\sin(t)))$ est continue sur $]0, \pi/2]$.

⇒ Comme $t \mapsto (\sin(t))^x$ est positive sur $]0, \pi/2]$, l'intégrale $\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt$ converge si, et seulement si, la fonction $t \mapsto (\sin(t))^x$ est intégrable sur $]0; \frac{\pi}{2}]$.



Ce préambule sert pour le « si, et seulement si, » qui est utile pour savoir aussi pour quelles valeurs de x l'intégrale **DIVERGE**.

De plus

$$(\sin(t))^x \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^x = \frac{1}{t^{-x}},$$

donc par équivalence, la fonction $t \mapsto (\sin(t))^x$ est intégrable sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ si et seulement si $t \mapsto \frac{1}{t^{-x}}$, ce qui est vrai si, et seulement si, $-x < 1$.

On peut donc affirmer que le domaine de définition de f est I .

Soit $x \in I$.

Alors $x + 2 \in I$, donc $f(x + 2)$ est défini.

On pose $u(t) = (\sin(t))^{x+1}$ et $v(t) = \sin(t)$, alors

⇒ les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0; \frac{\pi}{2}]$;

⇒ on choisit $v(t) = -\cos(t)$, ainsi comme $x + 1 > 0$,

$$(u \times v)(t) = -\cos(t) \times (\sin(t))^{x+1} \xrightarrow{t \rightarrow 0} -1 \times 0 = 0.$$

On peut donc effectuer une intégration par parties, qui donne

$$\begin{aligned}
 f(x+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{x+2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t) \times v'(t) dt \\
 &= [(u \times v)(t)]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \times (x+1) \cos(t) \times \sin(t)^x dt \\
 &= (x+1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^2(t)}_{=1-\sin^2(t)} \sin(t)^x dt \right) \\
 &= (x+1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^x dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{x+2} dt \right) \\
 &= (x+1)(f(x) - f(x+2)),
 \end{aligned}$$

d'où l'égalité demandée après une étape de calcul.

5.  *J'ai oublié de préciser que cette question est destinée aux cinq de-
mis, car elle demande d'appliquer le théorème de dérivation des
intégrales à paramètre, que l'on verra plus tard dans l'année.*

On note g la fonction définie par

$$\begin{aligned}
 g : I \times]0, \pi/2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (x, t) &\longmapsto (\sin(t))^x
 \end{aligned}$$

- (i) Pour tout $t \in]0, \pi/2]$, la fonction $x \mapsto \exp(x \ln(\sin(t)))$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I de dérivées successives :

$$x \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) = \ln^k(\sin(t)) (\sin(t))^x.$$

- (ii) Pour tout $x \in I$,

- les fonctions $t \mapsto g(x, t)$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t)$ sont continues sur $]0, \pi/2]$;
- on a vu dans la première question que la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$;
- quand t tend vers 0, $\sin(t)$ est un infiniment petit donc $\ln(\sin(t)) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$, d'où

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t) \times t^x = o\left(t^{\frac{x-1}{2}}\right).$$

Or $x > -1$, donc $t \mapsto t^{\frac{x-1}{2}} = \frac{1}{t^{-\frac{x-1}{2}}}$ avec $-\frac{x-1}{2} < 1$.

- (iii)  On établit l'hypothèse de domination de la dérivée seconde sur tout intervalle $[a ; +\infty[$, avec $a \in \mathbb{I}$.

$\forall x \in [a ; +\infty[$, $\forall t \in]0, \pi/2]$,

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^x = \ln^2(\sin(t)) e^{x \ln(\sin(t))}$$

(car $0 < \sin(t) \leq 1$ donc $\ln(\sin(t)) < 0$, et avec la croissance de l'exponentielle)

d'où $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^a = \varphi_a(t)$,

et (comme au-dessus) φ_a est intégrable sur $]0 ; \frac{\pi}{2}]$ car $\varphi_a(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{-\frac{a-1}{2}}}\right)$.

Le théorème de dérivations successives des intégrales à paramètre s'applique donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

De plus pour tout $x \in \mathbb{I}$,

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x dt \leq 0,$$

$$\text{et } f''(x) = \int_0^{\pi/2} \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^x dt \geq 0,$$

ainsi f est décroissante et convexe sur I.

6. On sait que pour tout $x > -1$, $f(x) = \frac{(x+2)f(x+2)}{x+1}$, et comme, étant $\mathbb{C}^2$ sur I, f est continue sur en 1, donc

$$(x+2)f(x+2) \xrightarrow{x \rightarrow -1} 1 \times f(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = 1,$$

d'où

$$f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}.$$

7. $\Rightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n est dans I, et en multipliant par $f(n+1)$, on obtient

$$(n+1)f(n)f(n+1) = (n+2)f(n+1)f(n+2).$$

Ainsi la suite de terme général $((n+1)f(n)f(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, et est égale à $(0+1)f(0)f(1) = \frac{\pi}{2}$, c.Q.F.D.

⇒ ⊕ La fonction f est décroissante sur I , car pour tout $t \in]0 ; \frac{\pi}{2}]$, $0 < \sin(t) \leq 1$, donc si $-1 < a < b$, $\sin(t)^b < \sin(t)^a$, et la croissance de l'intégrale donne $f(b) \leq f(a)$.

⊕ On en déduit que

$$\frac{\pi}{2(n+1)} = f(n)f(n+1) \leq f(n)^2 \leq f(n)f(n-1) = \frac{\pi}{2n},$$

donc par encadrement $f(n)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$, et comme $f(n) \geq 0$,

$$f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

⊕ Soit $x \geq 1$.

En notant $n_x = \lfloor x \rfloor$ la partie entière de x , on a $1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$.

Ainsi

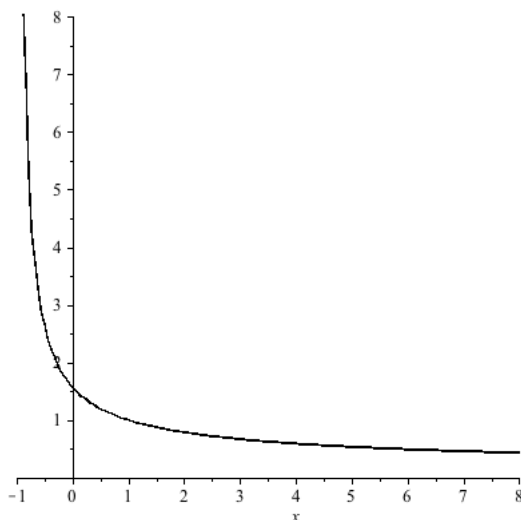
$$\sqrt{\frac{\pi}{2(\lfloor x \rfloor + 2)}} \leq f(\lfloor x \rfloor + 1) \leq f(x) \leq f(\lfloor x \rfloor) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2\lfloor x \rfloor}}$$

Or $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$, d'où par encadrement d'équivalents, on a $\lfloor x \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$, et $\lfloor x \rfloor + 2 \sim x$, puis de nouveau par encadrement d'équivalents, on obtient

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

8. Sur le graphique doivent apparaître les points $(0, f(0)) = (0, \pi/2)$, $(1, f(1)) = (1, 1)$, les asymptotes d'équations $x = -1$ et $y = 0$.

On observera que f est décroissante et convexe.



Il n'est pas aisé de faire apparaître les équivalents sur un graphique surtout à main levée.

Convergence d'une suite de fonctions

9. $\Rightarrow$ Pour tout réel x , $a^2 \cos^2(x) + b^2 \sin^2(x)$ est une somme de réels positifs, donc c'est un réel positif qui s'annule si, et seulement si, $a^2 \cos^2(x) = b^2 \sin^2(x) = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\cos^2(x) = \sin^2(x) = 0$ puisque $a > 0$ et $b > 0$, mais alors on aurait $1 = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 0$, ce qui reviendrait à nier l'existence de toute chose.

Ainsi pour tout réel x , la fonction $x \mapsto a^2 \cos^2(x) + b^2 \sin^2(x)$ est à valeurs dans $]0 ; +\infty[$, et elle est évidemment $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc en composant par la fonction $\ln$ qui est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $]0 ; +\infty[$, on obtient que la fonction $\Psi : x \mapsto \ln(a^2 \cos^2(x) + b^2 \sin^2(x))$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Soit $x \in \mathbb{R}$.

D'une part

$$\Psi'(x) = \frac{2(b^2 - a^2) \cos(x) \sin(x)}{a^2 \cos^2(x) + b^2 \sin^2(x)} = \frac{(b^2 - a^2) \sin(2x)}{a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2(x)}$$

D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\rho^k \sin(2kx) = \rho^k \operatorname{Im}(e^{ik2x}) = \operatorname{Im}\left((\rho e^{i2x})^k\right),$$

or $|\rho e^{i2x}| = |\rho|$, et comme $a > 0$ et $b > 0$, $b - a < a + b$ et $a - b < a + b$, d'où $|a - b| < |a + b|$, et $|\rho| < 1$.

Ainsi la série géométrique $\sum (\rho e^{2ix})^k$ converge, et par conséquent

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k e^{2ikx} \right).$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k e^{2ikx} &= \sum_{k=0}^{+\infty} (\rho e^{2ix})^k = \frac{1}{1 - \rho e^{2ix}} \\ &= \frac{1 - \rho e^{-2ix}}{(1 - \rho e^{2ix})(1 - \rho e^{-2ix})} = \frac{1 - \rho e^{-2ix}}{|1 - \rho e^{2ix}|^2} \\ &= \frac{1 - \rho \cos(2x) + i \rho \sin(2x)}{(1 - \rho \cos(2x))^2 + (\rho \sin(2x))^2} \\ &= \frac{1 - \rho \cos(2x)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(2x)} + i \frac{\rho \sin(2x)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(2x)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx) = \frac{\rho \sin(2x)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(2x)} = \frac{\rho \sin(2x)}{1 + \rho^2 - 2\rho (1 - 2\sin^2(x))},$$

puis en remplaçant ρ par son expression et avec quelques petits calculs, on finit par obtenir

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx) = \frac{(b^2 - a^2) \sin(2x)}{a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2(x)}, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

10. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme Ψ' est continue sur $\mathbb{R}$, alors par le théorème fondamental de l'analyse :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \Psi(0) + \int_0^x \Psi'(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k 4 \sin(2kt) \right) dt \\ &= \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) \right) dt \quad (\text{en posant } f_k : t \mapsto 4\rho^k \sin(2kt)). \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction f_k est continue sur $\mathbb{R}$, et de plus

$$\|f_k\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \leq 4\rho^k$$

donc, comme $|\rho| < 1$, la série $\sum f_k$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$, et a fortiori sur le segment entre 0 et x .

On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un segment :

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \Psi(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^x f_k(t) dt \right) \\ &= \ln(a^2) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{-4\rho^k \cos(2kt)}{2k} \right]_{t=0}^{t=x} \\ &= 2\ln(a) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho^k \cos(2kx)}{k} - \frac{\rho^k}{k} \right)\end{aligned}$$

On sait, avec le développement en série entière de $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $] -1 ; 1[$, que

$$\ln(1-\rho) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k},$$

ainsi

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= 2\ln(a) - 2\ln(1-\rho) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k \cos(2kx)}{k} \\ &= 2\ln\left(\frac{a}{1-\rho}\right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k \cos(2kx)}{k}\end{aligned}$$

Enfin $\frac{a}{1-\rho} = \frac{a}{1-\frac{b-a}{a+b}} = \frac{a(a+b)}{(a+b)-(b-a)} = \frac{a+b}{2}$, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k$$

11. Pour tout $x \in [0 ; \pi]$, avec le résultat de la question précédente,

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \Psi(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-2) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k \Psi(x)$$

Or les fonctions $u_0 : x \mapsto 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \Psi(x)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k : x \mapsto (-2) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k \Psi(x)$, sont continues sur $[0, \pi]$.

De plus comme Ψ est bornée sur $[0, \pi]$ car continue sur ce segment, ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|u_k\|_{\infty}^{[0; \pi]} \leq \|\Psi\|_{\infty}^{[0; \pi]} \times \frac{2}{k} \rho^k = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

On peut utiliser derechef le théorème d'intégration terme à terme sur un segment :

$$\int_0^{\pi} \Psi(x)^2 dx = 2 \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^{\pi} \Psi(x) dx - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} \int_0^{\pi} \cos(2kx) \Psi(x) dx \quad (*)$$

Encore une fois, et sans détailler parce qu'il y en a marre à force, grâce à la convergence uniforme de la série des fonctions dont la somme est Ψ , et en utilisant adroitement que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\pi} \cos(2px) dx = \left[\frac{1}{2p} \sin(2px) \right]_0^{\pi} = 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \Psi(x) dx &= \int_0^{\pi} 2 \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) dx - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} \int_0^{\pi} \cos(2kx) dx \\ &= 2\pi \ln\left(\frac{a+b}{2}\right), \end{aligned}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, toujours avec la même méthode

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(2kx) \Psi(x) dx &= 2 \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^{\pi} \cos(2kx) dx \\ &\quad - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^n}{n} \int_0^{\pi} \cos(2kx) \cos(2nx) dx. \end{aligned}$$

Or on a vu que $\int_0^{\pi} \cos(2kx) dx = 0$, et de même pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi} \cos(2kx) \cos(2nx) dx &= \int_0^{\pi} \cos(2(k+n)x) dx + \int_0^{\pi} \cos(2(k-n)x) dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ \int_0^{\pi} \cos(4kx) dx + \int_0^{\pi} 1 dx = \pi & \text{si } k = n. \end{cases} \end{aligned}$$

donc $\int_0^\pi \cos(2kx) \Psi(x) dx = -\pi \frac{\rho^k}{k}$.

En injectant ce résultat dans l'égalité baptisée (*) dans la page précédente :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \Psi(x)^2 dx &= 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \times 2\pi \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} \left(-\pi \frac{\rho^k}{k} \right) \\ &= 4\pi \left(\ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \right)^2 + 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^{2k}}{k^2}. \end{aligned}$$

On conclut enfin que

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 4\pi \left(\ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \right)^2 + 2\pi \sigma(\rho^2).$$

12. Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{et} \quad b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

donc

$$a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin^2(t) > 0$$

et en composant par $\ln$ qui est continue sur $]0; +\infty[$,

$$\Psi_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\sin^2(t)) = 2 \ln(\sin(t)).$$

On a établi la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ vers $t \mapsto 2 \ln(\sin(t))$.

L'énoncé original parle de convergence uniforme sur $]0, \pi]$, il s'agit d'une erreur d'énoncé.

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction Ψ_n^2 est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$,
- (ii) On déduit de ce qu'on vient de voir au dessus que la suite d'applications $(\Psi_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ vers $t \mapsto 4 \ln^2(\sin(t))$.
- (iii) La fonction limite $t \mapsto 4 \ln^2(\sin(t))$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$
- (iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \leq b_n = 1 - a_n \leq 1,$$

donc tout le monde étant positif là dedans

$$\frac{1}{4} \sin^2(t) \leq a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t) \leq \frac{1}{4} \cos^2(t) + \sin^2(t) \leq \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

puis par croissance de $\ln$, on a

$$2 \ln(\sin(t)) - 2 \ln(2) \leq \Psi_n(t) \leq \ln(1) = 0.$$

On obtient ainsi l'hypothèse de domination :

$$\forall t \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right], \quad |\Psi_n^2(t)| \leq 4 \ln(2)^2 - 8 \ln(2) \ln(\sin(t)) + 4 \ln(\sin(t))^2,$$

et on montre un peu comme dans la question 9 que $t \mapsto 4 \ln(2)^2 - 8 \ln(2) \ln(\sin(t)) + 4 \ln(\sin(t))^2$ est continue et intégrable sur $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$.

Le théorème de convergence dominée peut s'appliquer, ce qui donne l'existence des membres, et l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} 4 \ln^2(\sin(t)) dx = 4D_2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme pour tout $x \in [0 ; \pi]$, $\Psi_n(\pi - x) = \Psi_n(x)$, on a en effectuant le changement de variable $u = \pi - x$

$$\int_0^{\pi} \Psi_n(x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \Psi_n(x)^2 dx = 2 \int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx$$

Ainsi grâce au résultat de la question 11 :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx &= 2\pi \left(\ln \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right) \right)^2 + \pi \sigma(\rho_n^2) \\ &= 2\pi \ln(2)^2 + \pi \sigma((b_n - a_n)^2), \end{aligned}$$

car $a_n + b_n = 1$ en ayant posé $\rho_n = \frac{b_n - a_n}{b_n + a_n} = b_n - a_n$ (on a bien $b_n > 0$ et $a_n > 0$).

Comme on a vu dans la première partie que la fonction σ est continue sur $[-1, 1]$ et vérifie $\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}$, on a

$$\sigma((b_n - a_n)^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6},$$

d'où

$$4D_2 = 2\pi \ln(2)^2 + \frac{\pi^3}{6}.$$

Avec la partie 2, on peut conclure que

$$f''(0) = D_2 = \frac{\pi \ln(2)^2}{2} + \frac{\pi^3}{24}.$$

Une correction de l'exercice 13.29

énoncé

1. (a) Pour tout $t \in [0, 1]$, $1 + t^2 \leq 2$ donc $\frac{1}{(1+t^2)^n} \geq \frac{1}{2^n}$, ce qui donne par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \geq \int_0^1 \frac{1}{2} dt, \text{ c'est-à-dire } I_n \geq \frac{1}{2^n}.$$

- (b) La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0; +\infty[$, et pour tout $t \in]0; +\infty[$,

$$\left| \frac{1}{(1+t^2)^n} \right| = \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{t^{2n}},$$

or $t \mapsto \frac{1}{t^{2n}}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, donc par domination $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est aussi intégrable sur $[1; +\infty[$, et donc sur $[0; +\infty[$ par continuité sur cet intervalle.

On en déduit que l'intégrale qui définit K_n est convergente, et qu'en particulier pour $n = 1$:

$$K_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\arctan(t) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

- (c) Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $t \leq t^2$ d'où par décroissance de $\square \mapsto \frac{1}{(1+\square)^n}$,

$$\frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{(1+t)^n}.$$

Prenons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$ (ce que l'énoncé aurait du faire!), alors $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^n}$ est continue sur $[1; +\infty[$, et inférieure sur cet intervalle à $t \mapsto \frac{1}{t^n}$ qui est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Ainsi les deux intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^n} dt$ convergent, et par croissance de l'intégrale

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^n} dt \\ &= \int_1^{+\infty} (1+t)^{-n} dt = \left[\frac{1}{-n+1} (1+t)^{-n+1} \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n2^n}\right), \end{aligned}$$

donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n2^n}\right).$$

(d) Par la relation de Chasles

$$K_n = I_n + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt,$$

donc par la question précédente,

$$K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} I_n + O\left(\frac{1}{n2^n}\right).$$

On sait que $I_n \geq \frac{1}{2^n}$, donc en particulier $I_n > 0$, et

$$\frac{K_n}{I_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + O\left(\frac{1}{n2^n \times I_n}\right).$$

Derechef avec $I_n \geq \frac{1}{2^n}$, on a

$$\frac{1}{n2^n \times I_n} \leq \frac{1}{n},$$

donc $O\left(\frac{1}{n2^n \times I_n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ est une quantité qui tend vers 0, ce qui nous permet de conclure que

$$\frac{K_n}{I_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1, \text{ donc que } K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n.$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0 ; +\infty[$, et

$$(u \times v)(t) = \frac{t}{(1+t^2)^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n-1}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} K_n &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} t \times \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= 2n \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2) - 1}{(1+t^2)^{n+1}} dt = 2n \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= 2n (K_n - K_{n+1}), \end{aligned}$$

dont je vous laisse déduire l'égalité voulue : $K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n} K_n$.

(f) La relation précédente, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit : $K_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) K_n$ donc, comme $K_1 = \frac{\pi}{2}$, on a par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} K_n &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \times \frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2k} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n))^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \pi. \end{aligned}$$

On en déduit avec la formule de Stirling que

$$K_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi \sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n+1} \left(2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

donc

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

2. (a) Par le changement de variable $u = \sqrt{n} \times t$, qui vérifie de manière évidente les conditions requises, on a

$$\sqrt{n} \times I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^n} du.$$

- (b) On va appliquer le théorème de la convergence dominée à la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des fonctions :

$$f_n : u \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n} & \text{si } u \in [0 ; \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } u > 0. \end{cases}$$

- $\Rightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $[0 ; +\infty[$;
 $\Rightarrow$ pour tout $u \geq 0$,

$$-n \ln \left(1 + \frac{u^2}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n \times \frac{u^2}{n} = -u^2$$

donc

$$f_n(u) = e^{-n \ln \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)} \quad (\text{dès que } n > u^2)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-u^2},$$

d'où la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) vers $u \mapsto e^{-u^2}$ sur $[0, +\infty[$.

- $\Rightarrow$ Cette fonction limite est bien continue par morceaux sur $[0 ; +\infty[$.



Il nous reste à établir l'inégalité de domination, autrement dit majorer $|f_n(u)| = e^{-n \ln \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)}$ par un $\varphi(u)$, où φ est intégrable sur $]0 ; +\infty[$.

Après une tentative infructueuse avec $\varphi(u) = e^{-u^2}$, puis avec force tête dans les mains et ratures de calculs au crayon sur mon brouillon, j'ai eu l'idée de tenter de majorer $|f_n(u)| = \frac{1}{\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^n}$ par $\frac{1}{1+u^2}$.

Or

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{1+u^2}$$

$$\Leftrightarrow n \ln \left(1 + \frac{u^2}{n}\right) - \ln(1+u^2) \geq 0 \quad \begin{array}{l} (\text{après manipulations et} \\ \text{composition par le loga-} \\ \text{rithme qui est croissant}) \end{array}$$

donc il a fallu étudier le signe de la fonction $u \mapsto n \ln \left(1 + \frac{u^2}{n}\right) - \ln(1+u^2)$, tâche pour laquelle le plus idoine semble la classique étude de ses variations.

$\Rightarrow$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u \mapsto$

$n \ln \left(1 + \frac{u^2}{n}\right) - \ln(1 + u^2)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'_n(u) &= n \times \frac{\frac{1}{n} \times 2u}{1 + \frac{u^2}{n}} - \frac{2u}{1 + u^2} = 2u \left(\frac{1}{1 + \frac{u^2}{n}} - \frac{1}{1 + u^2} \right) \\ &= 2u \left(1 - \frac{1}{n} \right) \times \frac{u^2}{\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)(1 + u^2)}. \end{aligned}$$

Cette fonction est clairement positive sur $[0 ; +\infty[$, donc g_n est croissante sur $[0 ; +\infty[$, et comme $g_n(0) = 0$, on peut conclure sa positivité sur $[0 ; +\infty[$, dont on déduit comme annoncé dans le préambule l'inégalité de domination

$$\forall u \in [0 ; +\infty[, |f_n(u)| \leq \frac{1}{1 + u^2},$$

par la fonction $u \mapsto \frac{1}{1 + u^2}$, qui est notoirement intégrable sur $\mathbb{R}$, donc a fortiori sur $[0 ; +\infty[$, car sa primitive arctan a des limites finies en $\pm\infty$.

On a vérifié toutes les conditions du théorème de convergence dominée, et donc il serait idiot de ne pas l'appliquer pour obtenir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \, dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$$

et

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) \, dx = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \, dx = \sqrt{n} I_n$$

D'où l'égalité voulue.

- (c) D'après la question 1(f), on sait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Puis la parité et le changement $u = \sqrt{2}t$ donnent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} \, du = \sqrt{2\pi}.$$

3. (a) Pour tout $t \geq x$, $\varphi(t) \leq \frac{t}{x} \varphi(t)$, or les fonctions $t \mapsto \varphi(t)$ et $t \mapsto \frac{t}{x} \varphi(t)$ sont intégrables sur $[0; +\infty[$, notamment pour la première, et dominée par $\frac{1}{t^2}$ (voire par e^{-t} !) pour la seconde, donc par croissance de l'intégrale

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{t \varphi(t)}{x} dt.$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{t \varphi(t)}{x} dt &= \frac{1}{x \sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} t e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{x \sqrt{2\pi}} \left[-e^{-t^2/2} \right]_x^{+\infty} \\ &= \frac{e^{-x^2/2}}{x \sqrt{2\pi}} = \frac{\varphi(x)}{x}, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité demandée.

- (b) Posons $g : x \mapsto \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt - \frac{x}{x^2+1} \varphi(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$.

Les fonctions φ , $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ et, par le théorème fondamental de l'analyse,

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt - \int_0^x \varphi(t) dt$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc la fonction g est $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$, avec pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\varphi(x) - \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \varphi(x) + \frac{x}{x^2+1} \varphi'(x) \\ &= \frac{-(x^2+1)^2 - x^2 + 1 + x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \times \varphi(x) = \frac{-2\varphi(x)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi la fonction g est décroissante sur $[0, +\infty[$, et comme (je vous laisse vous en convaincre) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, on en déduit que $g(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ donc que

$$\frac{x}{x^2+1} \varphi(x) \leq \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt.$$

- (c) Les deux questions précédentes nous donnent pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\frac{x}{x^2+1} \varphi(x) \leq \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Or $\frac{x}{x^2+1} \varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$ donc

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$$

D'après la question 2(c)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1, \text{ donc } 1 - \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt,$$

ainsi

$$1 - \Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}, \text{ c.Q.F.D.}$$

4. (a) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$x_{n,n-k} = -\sqrt{n} + \frac{2(n-k)}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} - \frac{2k}{\sqrt{n}} = -x_{n,k}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une somme de réels positifs étant plus grande que chacun de ses termes on a

$$\binom{n}{k} \leq \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

ainsi B_n est majorée par $\sqrt{n}$ et elle est positive. Comme de plus la fonction φ est bornée, la fonction $B_n - \varphi$ l'est aussi, d'où l'existence de Δ_n .

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les intervalles $\left] x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right[$ et $\left] x_{n-1,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n-1,k} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right[$ sont symétriques par rapport à 0 et B_n prend la même valeur sur les deux intervalles, de plus φ est paire, donc $(B_n - \varphi)(\mathbb{R}^+) = (B_n - \varphi)(\mathbb{R}^-)$, d'où

$$\Delta_n = \sup_{x \geq 0} |B_n(x) - \varphi(x)|.$$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n,k} \geq 0 \Leftrightarrow 2k \geq n$.

Pour $k \geq \frac{n}{2}$ comparons les valeurs de B_n sur les intervalles $\left] x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right[$ et $\left] x_{n,k+1} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k+1} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right[$.
On a

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k} \leq 1$$

donc B_n est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

5. (a) Si $k \in I_n$ alors $n \leq 2k \leq (\ell + 1)\sqrt{n} + n$ et $-\frac{\ell + 1}{2}\sqrt{n} + \frac{n}{2} \leq n - k \leq \frac{n}{2}$, ce qui donne $O\left(\frac{1}{k}\right) = O\left(\frac{1}{n-k}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, par la formule de Stirling on a

$$\begin{aligned} k!(n-k)! &= \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= 2\pi e^{-n} k^{k+1/2} (n-k)^{n-k+1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} B_n(x_{n,k}) &= \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} \binom{n}{k} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2\pi e^{-n} k^{k+1/2} (n-k)^{n-k+1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \end{aligned}$$

écrivons : $(n-k)^{n-k+1/2} = \left(\frac{n}{2}\right)^{n-k+1/2} \left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}$ et $k^{k+1/2} = \left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2} \left(\frac{n}{2}\right)^{k+1/2}$, ce qui donne

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2} \left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}}.$$

- (c) • On a $x_{n,k} = -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}} \in [0, \ell + 1]$ donc $\frac{2k}{n} = 1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}$, $2 - \frac{2k}{n} = 1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}$ et $\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} = k - \frac{n}{2}$, par suite

$$\begin{aligned} B_n(x_{n,k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{k+1/2} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{n-k+1/2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} + \frac{n+1}{2}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} + \frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}} \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ On a } \left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} = e^{-\frac{x_{n,k}^2}{n} + O(\frac{1}{n})}, \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} = e^{\frac{x_{n,k}^2}{2} + O(\frac{1}{\sqrt{n}})}$$

et

$$\left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} = e^{\frac{x_{n,k}^2}{2} + O(\frac{1}{\sqrt{n}})} \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} B_n(x_{n,k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{x_{n,k}^2}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \end{aligned}$$

- (d) Les intervalles $\left[x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ forment une partition de $\left[0, \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
Soit $n \geq \ell^2$, on a alors $[0, \ell] \subset \left[0, \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

D'après la question précédente $B_n(x_{n,k}) - \varphi(x_{n,k}) = B_n(x_{n,k}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Pour tout $x \in [0, \ell]$ il existe $k \in I_n$ tels que $x \in \left[x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, l'inégalité des accroissements finis donne $|\varphi(x) - \varphi(x_{n,k})| \leq |x - y| \sup_{c \in \mathbb{R}} \left| \frac{ce^{-\frac{c^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right|$
donc $\varphi(x) - \varphi(x_{n,k}) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (ici la constante du O ne dépend pas de x).

Ainsi pour tout $x \in [0, \ell]$, $B_n(x) - \varphi(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (la constante du O ne dépend pas de x), donc il existe $n_0 \geq \ell^2$ tel que, pour tout $n \geq n_0$ et $k \in I_n$, $|B_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, uniformément pour tout $x \in [0, \ell]$, d'où pour $n \geq n_1 = \max(n_0, \ell^2)$

$$\sup_{x \in [0, \ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

- (e) Comme dans la question précédente, soit $n \geq \ell^2$ tels que $\ell \in \left[x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et $k \in I_n$ donc $B_n(\ell) = B_n(x_{n,k})$ et

$$B_n(\ell) = \varphi(x_{n,k}) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

écrivons $\varphi(x_{n,k}) = (\varphi(\ell) + \varphi(x_{n,k}) - \varphi(\ell))$, par l'inégalité des accroissements finis $\varphi(x_{n,k}) - \varphi(\ell) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ par suite $B_n(\ell) = \varphi(\ell) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

$\varphi(\ell) > 0$ donc il existe $n_2 \geq 0$ tel que si $n \geq n_2$ alors $|B_n(\ell) - \varphi(\ell)| \leq \varphi(\ell)$ et $B_n(\ell) \leq 2\varphi(\ell)$.

6. Soit $\varepsilon > 0$ et $\ell \in \mathbb{R}^+$ tel que $\varphi(\ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'après les questions précédentes il existe n_1 et n_2 tel que si $n \geq \max(n_1, n_2)$ alors

$$\sup_{x \in [0, \ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } B_n(\ell) \leq 2\varphi(\ell).$$

B_n et φ sont décroissantes sur $\mathbb{R}^+$, donc pour tout $x \geq \ell$,

$$0 \leq B_n(x) \leq B_n(\ell) \leq 2\varphi(\ell) \Rightarrow |B_n(x) - \varphi(\ell)| \leq \varphi(\ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

de l'écriture

$$|B_n(x) - \varphi(x)| \leq |B_n(x) - \varphi(\ell)| + |\varphi(x) - \varphi(\ell)|$$

et $|\varphi(x) - \varphi(\ell)| = \varphi(\ell) - \varphi(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ on a

$$|B_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

ce qui donne $\sup_{x \in [\ell, +\infty[} |B_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$.

Ainsi pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$

$$\Delta_n = \sup_{x \geq 0} |B_n(x) - \varphi(x)| \leq 2\varepsilon$$

La suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 donc (B_n) converge uniformément vers φ sur $\mathbb{R}$.