Révisions de PCSI

Exercice 14.1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}([-1\,;\,1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique :

$$(f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}\,t.$$

1. Montrer que $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto \sin(\pi x)$ et $f_3 : x \mapsto \cos(\pi x)$ forment une famille orthogonale de E.
2. Calculer la distance de $f : x \mapsto 1 - x$ à $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

Exercice 14.2

1. Vérifier que l'application

$$(P, Q) \mapsto (P \mid Q) = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$

définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 14.3

On munit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle A \mid B \rangle = \mathrm{Tr}(A^T \times B)$.

1. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la distance de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à $F^\perp$.

Exercice 14.4 – Applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\,1]$ nulle en 0, montrer que

$$\forall x \in [0\,;\,1],\ \ f(x)^2 \leqslant x \int_0^1 f'(t)^2 \mathrm{d}\,t.$$

Exercice 14.5

Montrer l'existence du réel $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \mathrm{d}\,x$, et le calculer.

(mis à jour le 20 décembre 2024)

Exercice 14.6 – Expression et matrice d'une réflexion

1. Soit u un vecteur non nul d'un espace euclidien E. Montrer que la réflexion s d'axe $\text{Vect}(u)$ vérifie pour tout $x \in E$: $s(x) = x - 2\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u$.
2. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion d'axe $\text{Vect}(1,-1,1)$ *(autrement dit la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x - y + z = 0$)*.
3. Déterminer la matrice, dans une base orthonormale (i, j) d'un plan euclidien, de la réflexion d'axe $\text{Vect}(2i - j)$.

Exercice 14.7

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique.

1. Déterminer une base orthonormale de $F = \text{Vect}\big((1,2,0,1),(1,0,0,-1)\big)$.
2. Déterminer les matrices de la projection orthogonale sur F et de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base canonique.

Exercice 14.8

Montrer que $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une réflexion de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera l'axe.

Exercice 14.9 – Oral CCP - sans préparation

Soient $(E, \langle \ \mid \ \rangle)$ un espace euclidien, $(a, b) \in E^2$.

1. Montrer que $f : x \in E \mapsto \langle x \mid a\rangle\, b - \langle x \mid b\rangle\, a$ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ \ \langle f(x) \mid y\rangle = -\langle x \mid f(y)\rangle$.
3. Montrer l'égalité $\text{Ker}(f) = (\text{Im}(f))^\perp$.

Exercice 14.10

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts.

1. Vérifier que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de E.
3. Déterminer la distance de $Q \in E$ au sous-espace $H = \left\{P \in E\,;\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$.

Programme de PC

Exercice 14.11

Soit f une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id_E}) = (\mathrm{Im}(f - \mathrm{id_E}))^\perp$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id_E}) = (\mathrm{Im}(f + \mathrm{id_E}))^\perp$.
2. On suppose qu'il existe un réel α tel que $(f - \alpha\,\mathrm{id_E})^2 = 0$.
   Montrer que $\alpha \in \{-1,1\}$, et en déduire que $f = \mathrm{id_E}$ ou $f = -\mathrm{id_E}$.

Exercice 14.12

Soient $(\mathrm{E}, \langle . \mid . \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. On suppose que : $\forall x \in \mathrm{E},\ \langle x \mid f(x) \rangle = 0$.
   Démontrer que : $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle f(x) \mid y \rangle = -\langle x \mid f(y) \rangle$.
2. Montrer que deux quelconques des trois propriétés suivantes entraînent la troisième : $f \in \mathscr{O}(\mathrm{E})$, $\quad f \circ f = -\mathrm{Id_E}$, $\quad \forall x \in \mathrm{E},\ \langle x \mid f(x) \rangle = 0$.

Exercice 14.13 – (*)

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de la diagonalisabilité de $\mathrm{A} \times \mathrm{A}^\top$ et de $\mathrm{A}^\top \times \mathrm{A}$?
2. Montrer que les produits MN et NM de deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ont les mêmes valeurs propres munis des mêmes ordres de multiplicité géométriques.
3. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale U telle que $\mathrm{AA}^\top = \mathrm{U}^\top \mathrm{A}^\top \mathrm{AU}$.

Exercice 14.14

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 3$, et $(a,b) \in \mathrm{E}^2$.
On considère $f : x \in \mathrm{E} \mapsto \langle a \mid x \rangle a + \langle b \mid x \rangle b$.

1. Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint.
2. Dans le cas où a et b sont non nuls et orthogonaux, déterminer $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id_E})$.
3. On suppose ici que a et b sont unitaires et forment une famille libre.
   (a) Démontrer que 0 est une valeur propre de f et préciser $\mathrm{E}_0(f)$.
   (b) Démontrer que $\langle a \mid b \rangle \in \,]-1,1[$, puis déduire les éléments propres de f.

Exercice 14.15 – Très classique sur les matrices orthogonales

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Montrer les inégalités :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = n\,; \qquad \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n\,; \qquad n \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

Indication : pour la seconde inégalité, on pourra interpréter la somme comme un produit scalaire en utilisant le vecteur colonne $U = (1\ \ 1\dots 1)^\top$.

Exercice 14.16 – Très classique sur les matrices symétriques réelles

Soit $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} m_\lambda \lambda^2$ *(où m_λ est l'ordre de multiplicité algébrique de λ)*

Exercice 14.17 – Théorème de Fisher-Cochran

Soit $(E, \langle\ \ ,\ \ \rangle)$ un espace euclidien.

1. Soit $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que $\langle v(x) \mid x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$. Montrer que $v = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Soient $u_1, \dots, u_p \in \mathcal{S}(E)$. On suppose que $\mathrm{rg}\,(u_1) + \cdots + \mathrm{rg}\left(u_p\right) = n$, et que

$$\forall x \in E,\ \ \langle u_1(x), x\rangle + \cdots + \left\langle u_p(x), x\right\rangle = \langle x \mid x\rangle\,.$$

   (a) Montrer que $u_1 + \cdots + u_p = \mathrm{Id}_E$.
   (b) Montrer que $E = \mathrm{Im}\,(u_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\left(u_p\right)$.
   (c) Montrer que pour tout i, u_i est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(u_i)$.

Exercice 14.18 – Matrice de Hilbert

Soient $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $\dfrac{1}{i+j-1}$.

1. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, exprimer $X^\top HX$ à l'aide d'une intégrale.
2. En déduire que la matrice H est définie positive.

Exercice 14.19 –

Quel est le sous-espace vectoriel engendré par les matrices symétriques définies positives dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 14.20

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f canoniquement associé à :

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Pourquoi f est-elle diagonalisable dans une base orthonormée ?
2. Montrer que f est une isométrie, en déduire ses valeurs propres.
3. Déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de f, et en déduire le polynôme caractéristique de f.
4. Donner une base orthonormée du sous-espace propre $E_1(f)$.
5. Montrer que le sous-espace propre $E_{-1}(f) = (E_1(f))^{\perp}$. En déduire une base de $E_{-1}(f)$.
6. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ de vecteurs propres de f.
   Donner une interprétation géométrique de f.

Exercice 14.21 – Traces partielles

Soit $n \geqslant 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ sa base canonique.
Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Justifier l'existence d'une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.
   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $f(\varepsilon_k) = \lambda_k \varepsilon_k$, et on suppose $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$.
   On note $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de $(e_1, \ldots, e_n)$ à $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.
2. Pour tout $(i, j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} p_{k,j}^2$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} p_{i,k}^2$.
3. Montrer que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $a_{i,i} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2$.
4. (a) Montrer $\forall k \in [\![1\,;\,n]\!]$, $a_{i,i} \leqslant \lambda_k + \sum\limits_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_k) \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2$.

   (b) En déduire que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{k} a_{i,i} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$.

Exercice 14.22 – CCINP PC 2019

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on pose $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$.

1. Justifier que l'intégrale définissant $\langle P \mid Q \rangle$ est convergente
2. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P \mid Q \rangle$ est un produit scalaire.
3. Montrer que $\left\langle X^k \mid 1 \right\rangle = k!$ pour tout entier $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

4. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Préciser la taille de la matrice de α dans la base canonique, et l'expression de son terme général (*il est autorisé d'indexer « à la Python » en partant de* 0).
6. En déduire que α est diagonalisable et donner son spectre.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$.

7. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?
8. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -k\,P_k$.
9. Justifier que P_k est de degré k.
10. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

11. Montrer que α est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}_n[X]$.
12. En déduire que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes que l'on note $x_1, \dots, x_n$.
On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

13. Montrer qu'un n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \cdots\cdots & 1 \\ x_1 & x_2 \cdots\cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

14. En déduire qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$.
15. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

Solutions

Une correction de l'exercice 14.1 *énoncé*

Notons $\langle f \mid g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}\,t$.
Pour préparer un peu le travail, rappelons qu'une fonction impaire a une intégrale nulle sur tout intervalle centré en 0 (sur lequel elle est intégrable, bien sûr) !
Ainsi, en remarquant que sin est impaire, et que cos est paire, donc que pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $x \mapsto \sin^{2p+1}(\pi t)\cos^q(\pi t)$ est impaire, on obtient que

$$\int_{-1}^{1} \sin^{2p+1}(\pi t)\cos^q(\pi t)\mathrm{d}\,t = 0.$$

De plus, on remarque aussi que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{-1}^{1} \cos(p\pi t)\mathrm{d}\,t = \left[\frac{1}{p\pi}\sin(p\pi t)\right]_{t=-1}^{t=1} = 0 \ \ \textit{(car } \sin(\pm p\pi) = 0.\textit{)}$$

1. À l'aide de la remarque préliminaire :

$$\begin{aligned}
\langle f_1 \mid f_2\rangle &= \int_{-1}^{1} \sin(\pi t)\mathrm{d}\,t = 0,\\
\langle f_2 \mid f_3\rangle &= \int_{-1}^{1} \sin(\pi t)\cos(\pi t)\mathrm{d}\,t = 0,\\
\langle f_1 \mid f_3\rangle &= \int_{-1}^{1} \cos(\pi t)\mathrm{d}\,t = \left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\right]_{t=-1}^{t=1} = 0.
\end{aligned}$$

   Donc (f_1, f_2, f_3) est une famille orthogonale.

2. La distance de f à F est $\|f - p_{\mathrm{F}}(f)\|$.
   Pour déterminer $p_{\mathrm{F}}(f)$, on va utiliser la proposition 7.11 qui nous dit que pour toute base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ de V,

$$p_{\mathrm{V}}(x) = \sum_{j=1}^{p} \langle x|e_j\rangle\, e_j.$$

   Il nous faut donc une base orthonormée de F.
   Or (f_1, f_2, f_3) est déjà une famille génératrice de F, de plus elle est orthogonale formée de vecteurs non nuls, donc elle est libre. C'est donc une base orthogonale de F.

Pour en déduire une base orthonormée de F, il suffit de normaliser chacun de ses vecteurs, c'est-à-dire de diviser chacun par sa norme.

$$\begin{aligned}
\|f_1\|^2 &= \langle f_1 \mid f_1\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\,t = 2,\\
\|f_2\|^2 &= \langle f_2 \mid f_2\rangle = \int_{-1}^{1} \sin^2(\pi t)\mathrm{d}\,t = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1-\cos(2\pi t))\,\mathrm{d}\,t = 1,\\
\|f_3\|^2 &= \langle f_3 \mid f_3\rangle = \int_{-1}^{1} \cos^2(\pi t)\mathrm{d}\,t = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(\cos(2\pi t)+1)\,\mathrm{d}\,t = 1,
\end{aligned}$$

donc la famille $(\frac{1}{\sqrt{2}}f_1, f_2, f_3)$ est une base orthonormée de F.
On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
p_{\mathrm{F}}(f) &= \left\langle f \mid \frac{1}{\sqrt{2}}f_1\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}f_1 + \langle f \mid f_2\rangle f_2 + \langle f \mid f_3\rangle f_3\\
&= \frac{1}{2}\langle f \mid f_1\rangle f_1 + \langle f \mid f_2\rangle f_2 + \langle f \mid f_3\rangle f_3.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\langle f \mid f_1\rangle &= \int_{-1}^{1}(1-t)\mathrm{d}\,t = \left[-\frac{(1-t)^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 2\\
\langle f \mid f_2\rangle &= \int_{-1}^{1}(1-t)\sin(\pi t)\mathrm{d}\,t\\
&= \left[(1-t)\left(-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\right)\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos(\pi t)\mathrm{d}\,t\\
&= \left[0-\frac{2}{\pi}\right] - 0 = -\frac{2}{\pi}.\\
\langle f \mid f_3\rangle &= \int_{-1}^{1}(1-t)\cos(\pi t)\mathrm{d}\,t\\
&= \left[(1-t)\left(\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\right)\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin(\pi t)\mathrm{d}\,t\\
&= [0-0] - 0 = 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$p_{\mathrm{F}}(f) = \frac{1}{2}\langle f \mid f_1\rangle f_1 + \langle f \mid f_2\rangle f_2 + \langle f \mid f_3\rangle f_3 x = f_1 - \frac{2}{\pi}f_2,$$

et enfin, la distance demandée est

$$\begin{aligned} d(f,\mathrm{F}) &= \left\| f - \left(f_1 - \frac{2}{\pi} f_2\right) \right\| \\ &= \sqrt{\left\langle f - \left(f_1 - \frac{2}{\pi} f_2\right) \mid f - \left(f_1 - \frac{2}{\pi} f_2\right) \right\rangle}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} &\left\langle f - \left(f_1 - \frac{2}{\pi} f_2\right) \mid f - \left(f_1 - \frac{2}{\pi} f_2\right) \right\rangle \\ &= \int_{-1}^{1} \left(1 - t - \left(1 - \frac{2}{\pi}\sin(\pi t)\right)\right)^2 \mathrm{d}\,t \\ &= \int_{-1}^{1} \left(-t + \frac{2}{\pi}\sin(\pi t)\right)^2 \mathrm{d}\,t \\ &= \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{4}{\pi} t\sin(\pi t) + \frac{4}{\pi^2}\sin^2(\pi t)\right) \mathrm{d}\,t \\ &= \int_{-1}^{1} t^2 \mathrm{d}\,t - \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{1} t\sin(\pi t)\mathrm{d}\,t + \frac{4}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\sin^2(\pi t)\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi}\left(\left[t\left(-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\right)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\mathrm{d}\,t\right) + \frac{4}{\pi^2} \times 1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{8}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \times 1 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}. \end{aligned}$$

On peut enfin conclure que

$$d(f,\mathrm{F}) = \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}}.$$

Une correction de l'exercice 14.2

énoncé

1. La symétrie provient de la commutativité du produit des réels ; la bilinéarité provient de la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication des réels.
   Pour tout polynôme P,

$$(\mathrm{P} \mid \mathrm{P}) = \mathrm{P}(1)^2 + \mathrm{P}'(1)^2 + \mathrm{P}''(1)^2 \geqslant 0.$$

   Enfin, si $(\mathrm{P} \mid \mathrm{P}) = 0$, alors

$$\mathrm{P}(1)^2 + \mathrm{P}'(1)^2 + \mathrm{P}''(1)^2 = 0$$

donc $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$. Or $P \in \mathbb{R}_2[X]$, donc

- *première méthode* : $P = a + bX + cX^2$, d'où $P''(1) = 2c = 0$ donne $c = 0$, puis $P'(1) = b + 2c = 0$ entraîne $b = 0$, et enfin $P(1) = a + b + c = 0$ permet de conclure que $P = 0$;
- *deuxième méthode* : 1 est racine de P d'ordre au moins 3, donc $P = (X-1)^3 Q$, et $\deg(Q) = \deg(P) - 3 \leqslant 2 - 3 = -1$, d'où Q est le polynôme nul, et P aussi.

2. D'après la proposition 10.17, la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ est $d = \left\| X^2 - p(X^2) \right\|$, où $p(X)$ est le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.
Grâce à Gram-Schmidt appliqué à $(1, X)$, on obtient que $(1, X-1)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$:

$$\begin{aligned} \|1\| &= \sqrt{1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0} = 1 \\ (X - 1 \mid 1) &= 0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 0 \\ \|X - 1\| &= \sqrt{0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0} = 1. \end{aligned}$$

Puis la proposition 7.11 nous donne

$$\begin{aligned} p(X^2) &= (X^2 \mid 1)1 + (X^2 \mid X - 1)(X - 1) \\ &= (1 \times 1 + 2 \times 0 + 2 \times 0)1 + (1 \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times 0)(X - 1) \\ &= -1 + 2X, \end{aligned}$$

et enfin la distance demandée est :

$$\begin{aligned} \boxed{d} &= \left\| X^2 - (-1 + 2X) \right\| = \left\| (X-1)^2 \right\| \\ &= \sqrt{0 \times 0 + 0 \times 0 + 2 \times 2} \\ &\boxed{=2}. \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 14.3

énoncé

Rappelons tout d'abord que pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$\langle A \mid B \rangle = \operatorname{Tr}(A^{T} \times B) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (A)_{i,j}(B)_{i,j},$$

autrement dit, le produit scalaire canonique dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*, c'est comme le produit scalaire canonique dans* $\mathbb{R}^{n\times n}$*, c'est-à-dire la somme des produits terme à terme.*
Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ *alors*

$$\operatorname{Tr}(A^{\top} B) = ae + bf + cg + dh.$$

1. Il suffit de regarder F avec un peu de discernement pour comprendre que

$$F = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}(I_2, B) \text{ où } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

donc F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. La distance d de J à $F^{\perp}$ est donnée par

$$\begin{aligned} d &= \|J - p_{F^{\perp}}(J)\| \quad \textit{(proposition 7.13)} \\ &= \|p_F(J)\| \quad \textit{(Remarque 7.12).} \end{aligned}$$

➟ *Avec le premier point de la proposition 7.11* :

- $p_F(J)$ est dans F donc $p_F(J) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;
- de plus $J - p_F(J) = \begin{pmatrix} 1-a & 1-b \\ 1+b & 1-a \end{pmatrix} \in F^{\perp} = (\operatorname{Vect}(I_2, B))^{\perp}$, ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \langle J - p_F(J) \mid I_2 \rangle &= 0 \\ \langle J - p_F(J) \mid B \rangle &= 0 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} (1-a)\times 1 + (1-b)\times 0 + (1+b)\times 0 + (1-a)\times 1 = 0 \\ (1-a)\times 0 + (1-b)\times 1 + (1+b)\times(-1) + (1-a)\times 0 = 0 \end{cases} \\ \iff &a = 1 \text{ et } b = 0. \end{aligned}$$

- Ainsi $p_F(J) = I_2$, donc

$$d = \|I_2\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

➟ *Avec le second point de la proposition 7.11* : les deux matrices I_2 et B sont orthogonales, et $\|I_2\| = \|B\| = \sqrt{2}$, donc une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}I_2, \frac{1}{\sqrt{2}}B\right)$, ainsi

$$\begin{aligned} p_F(J) &= \left\langle J \mid \frac{1}{\sqrt{2}}I_2 \right\rangle \times \frac{1}{\sqrt{2}}I_2 + \left\langle J \mid \frac{1}{\sqrt{2}}B \right\rangle \times \frac{1}{\sqrt{2}}B \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times I_2 + \frac{1}{2} \times 0 \times B = I_2 \end{aligned}$$

donc donc

$$d = \|I_2\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Une correction de l'exercice 14.4 *énoncé*

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, la fonction f étant $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\,1]$, le théorème fondamental de l'analyse nous permet d'affirmer que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$$

or $f(0) = 0$, donc

$$f(x)^2 = \left(\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right)^2.$$

L'application $(u, v) \mapsto \int_0^x u(t)v(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire classique dans $\mathscr{C}([0\,;\,x])$ (voir la proposition 7.1).
De plus les fonctions $t \mapsto 1$ et $t \mapsto f'(t)$ sont continues sur $[0\,;\,x]$, donc en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} f(x)^2 &\leqslant \int_0^x 1^2\mathrm{d}t \times \int_0^x f'(t)^2\mathrm{d}t = x\int_0^x f'(t)^2\mathrm{d}t \\ &\leqslant x\int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t \ \ \textit{(car } f'(t)^2 \geqslant 0 \textit{ et } x \in [0\,;\,1]\textit{)} \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 14.5 *énoncé*

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$. C'est un espace euclidien.

On a vu en proposition 7.1 que c'est bien un produit scalaire sur $\mathscr{C}([0\,;\,1])$, donc ça reste un produit scalaire sur tout sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}([0\,;\,1])$, ce qui est le cas pour $\mathbb{R}_2[X]$.

Ainsi

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (x^2-ax-b)^2 \mathrm{d}x = \inf_{P\in\mathbb{R}_1[X]}\int_0^1 (x^2-P(x))^2\mathrm{d}x = \inf_{P\in\mathbb{R}_1[X]}\left\|X^2-P\right\|^2,$$

et on sait d'après le cours que cette borne inférieure existe, c'est même un minimum atteint en $P = p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)$, et elle définit la distance, ici au carré, entre X^2 et $\mathbb{R}_1[X]$.
Ce projeté orthogonal $P = p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)$ est défini par

$$\begin{gathered}P\in\mathbb{R}_1[X],\ \text{c'est-à-dire } P = aX+b,\\ \text{et } X^2-P\in\mathbb{R}_1[X]^\perp,\ \text{c'est-à-dire } \left\langle X^2-P \mid 1\right\rangle = \left\langle X^2-P\mid X\right\rangle = 0.\end{gathered}$$

Donc il suffit de trouver a, b réels tels que

$$\left\langle X^2-(aX+b)\mid 1\right\rangle = \left\langle X^2-(aX+b)\mid X\right\rangle = 0$$

autrement dit

$$\begin{gathered}\int_0^1 (x^2-ax-b)\mathrm{d}x = 0 \iff \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2-bx\right]_{x=0}^{x=1} \iff 3a+6b=2\\ \int_0^1 (x^2-ax-b)\times x\,\mathrm{d}x = 0 \iff \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-\frac{b}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=1} \iff 4a+6b=3\end{gathered}$$

qui a pour solution $a=1$ et $b=-\frac{1}{6}$.
Par conséquent,

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (x^2-ax-b)^2\mathrm{d}x = \int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{180}.$$

Une correction de l'exercice 14.6

énoncé

1. L'endomorphisme p est la projection orthogonale sur $\mathscr{P} = \mathrm{Vect}(u)^\perp$, donc $q = \mathrm{id}_E - p$ est la projection orthogonale sur $D = \mathrm{Vect}(u)$.
   Or u est un vecteur directeur de D, donc $e = \frac{1}{\|u\|}u$ forme une base orthonormée de D. Ainsi, pour tout $x\in E$, en appliquant la caractérisation du projeté orthogonal de la

proposition 7.11,

$$q(x) = \left\langle x \mid \frac{1}{\|u\|}u \right\rangle \frac{1}{\|u\|}u = \frac{\langle x \mid u\rangle}{\|u\|^2}u,$$

d'où

$$p(x) = x - \frac{\langle x \mid u\rangle}{\|u\|^2}u.$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} s(x) = (2p - \mathrm{id}_E)(x) &= 2\left(x - \frac{\langle x \mid u\rangle}{\|u\|^2}u\right) - x \\ &= x - 2\frac{\langle x \mid u\rangle}{\|u\|^2}u, \end{aligned}$$

C.Q.F.D

2. Notons $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $a = (1, -1, 1)$, et s la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(a)$. Alors $s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - 2\,p_{\mathrm{Vect}(a)}$.
Notons de plus $X_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Or pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$p_{\mathrm{Vect}(a)}(x) = \frac{\langle a \mid x\rangle}{\langle a \mid a\rangle}a = \frac{1}{3}\langle a \mid x\rangle\, a,$$

donc

$$\begin{aligned} \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(p_{\mathrm{Vect}(a)}(x)) &= \frac{1}{X_a{}^\top \times X_a}\underbrace{X_a{}^\top \times X}_{\in\mathbb{R}} \times X_a = \frac{1}{\|a\|^2}X_a \underbrace{X_a{}^\top \times X}_{\in\mathbb{R}} \\ &= \left(\frac{1}{\|a\|^2}X_a \times X_a{}^\top\right) \times X. \end{aligned}$$

Autrement dit

$$\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(p_{\mathrm{Vect}(a)}) = \frac{1}{\|a\|^2}X_a \times X_a{}^\top$$ *(voir cette remarque du cours)*

Ainsi

$$\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(s) = I_3 - 2 \times \frac{1}{3}X_a \times X_a{}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autre méthode : en notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on constate que $x - y + z = 0$ équivaut à $\langle X \mid U \rangle = 0$, donc le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - y + z = 0$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux au vecteur U, donc $\mathscr{P} = \mathrm{Vect}(U)^{\perp}$.
Par conséquent, la réflexion s par rapport à $\mathscr{P}$ est la réflexion d'axe $D = \mathrm{Vect}(U)$, et pour tout $X \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} s(X) &= X - 2\frac{\langle X \mid U \rangle}{\|U\|^2} U \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2 \times \frac{x - y + z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x + 2y - 2z \\ 2x + y + 2z \\ -2x + 2y + z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Notons $u = 2i - j$. Alors grâce à la première question,

$$\begin{aligned} s(i) &= i - 2\frac{\langle i \mid u \rangle}{\langle u \mid u \rangle} u = i - 2 \times \frac{2}{5}(2i - j) = -\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j, \\ \text{et } s(j) &= j - 2\frac{\langle j \mid u \rangle}{\langle u \mid u \rangle} u = j - 2 \times \frac{-1}{5}(2i - j) = \frac{4}{5}i + \frac{3}{5}j, \end{aligned}$$

donc

$$\underset{(i,j)}{\mathrm{Mat}}(s) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Une correction de l'exercice 14.7 *énoncé*

Notons $u = (1,2,0,1)$ et $v = (1,0,0,-1)$.

1. La famille (u, v) est génératrice de F par définition, et elle est libre à l'œil nu, donc c'est une base de F. On lui applique le procédé de Gram-Schmidt pour avoir une base orthonormée de F.
   - $\|u\| = \sqrt{6}$, donc on prend $\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} u$;
   - $e_1 = v - \langle v \mid \varepsilon_0 \rangle \varepsilon_0 = v - \frac{1}{6} \langle v \mid u \rangle u = v$ (et oui : on remarque que $u \perp v$), donc $\varepsilon_1 = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{1}{\sqrt{2}} v$.

   Ainsi la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{6}} u, \frac{1}{\sqrt{2}} v\right)$ est une base orthonormée de F.

2. Pour tout vecteur $x = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on applique la caractérisation du projeté orthogonal de la proposition 7.11, dans la base orthonormée obtenue ci-dessus :

$$\begin{aligned}
p_{\mathrm{F}}(x) &= \left\langle x \mid \frac{1}{\sqrt{6}} u \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} u + \left\langle x \mid \frac{1}{\sqrt{2}} v \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} v \\
&= \frac{1}{6} \langle x \mid u \rangle u + \frac{1}{2} \langle x \mid v \rangle v \\
&= \frac{1}{6}(a + 2b + d) u + \frac{1}{2}(a - d) v \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(a + 2b + d) + \frac{1}{2}(a - d) \\ \frac{1}{6}(a + 2b + d) \times 2 \\ 0 \\ \frac{1}{6}(a + 2b + d) - \frac{1}{2}(a - d) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2a + b - d \\ a + 2b + d \\ 0 \\ -a + b + 2d \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   donc la matrice de p_{F} dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Autre méthode : en notant $(e_1,\ldots,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} p_F(e_1) &= \left\langle e_1 \mid \frac{1}{\sqrt{6}}u\right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}u + \left\langle e_1 \mid \frac{1}{\sqrt{2}}v\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}v \\ &= \frac{1}{6}\langle e_1 \mid u\rangle u + \frac{1}{2}\langle e_1 \mid v\rangle v = \frac{1}{6}u + \frac{1}{2}v \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et de même $p_F(e_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad p_F(e_3) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad p_F(e_4) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$.

et il n'y a plus qu'à mettre en colonnes ces vecteurs dans une matrice pour répondre à la question.

3. La symétrie orthogonale s_F par rapport à F est liée au projecteur orthogonal sur F par la relation $s_F = 2p_F - \mathrm{id}_E$, donc par linéarité de l'application $u \mapsto \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ *pour toute base* $\mathscr{B}$ *de* $\mathbb{R}^4$, on en déduit que la matrice de s_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$2\times\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix} - I_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ -2 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Une correction de l'exercice 14.8 *énoncé*

D'une part, A est symétrique, et ses colonnes forment une base orthonormale, donc elle est orthogonale.

D'autre part $A^2 = I_3$, donc A est une symétrie.

Par conséquent, A est la symétrie orthogonale par rapport à $\operatorname{Ker}(A - I_3)$ et parallèlement à $\operatorname{Ker}(A-I_3)^{\perp} = \operatorname{Ker}(A+I_3)$, qui sera l'axe de la réflexion. Il faut donc déterminer cet axe, et vérifier que c'est une droite.

$A + I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 1\\ -2 & 1 & 5\end{pmatrix}$, et le système homogène correspondant donne $x + y - z = 0$ et $y + z = 0$, donc $\operatorname{Ker}(A + I_3) = \operatorname{Vect}((2,-1,1))$.

On peut donc conclure que A est une réflexion (une fois de plus, comprendre qu'on confond les matrices et leurs endomorphismes canoniquement associés) d'axe $\operatorname{Vect}((2,-1,1))$.

Une correction de l'exercice 14.9 *énoncé*

1. L'application f a évidemment pour ensemble d'arrivée E, et plus particulièrement ses images sont dans $\mathrm{Vect}(a, b)$, et sa linéarité provient de la linéarité à gauche du produit scalaire.
2. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$,

$$\begin{aligned}
\langle f(x) \mid y\rangle &= \langle \langle x \mid a\rangle b - \langle x \mid b\rangle a \mid y\rangle \\
&= \langle x \mid a\rangle \langle b \mid y\rangle - \langle x \mid b\rangle \langle a \mid y\rangle \\
\text{et } -\langle x \mid f(y)\rangle &= -\langle x \mid \langle y \mid a\rangle b - \langle y \mid b\rangle a\rangle \\
&= -\langle y \mid a\rangle \langle x \mid b\rangle + \langle y \mid b\rangle \langle x \mid a\rangle \\
&= -\langle x \mid b\rangle \langle a \mid y\rangle + \langle x \mid a\rangle \langle b \mid y\rangle \\
&= \langle f(x) \mid y\rangle .
\end{aligned}$$

3. ➟ Soient $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$, montrons que $\langle x \mid y\rangle = 0$:

$$\begin{aligned}
\langle x \mid y\rangle &= \langle x \mid f(t)\rangle \quad \textit{(car } y \in \mathrm{Im}(f)\textit{)} \\
&= -\langle f(x) \mid t\rangle \quad \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= -\langle 0_{\mathrm{E}} \mid t\rangle \quad \textit{(car } x \in \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f)$, autrement dit $\mathrm{Ker}(f) \subset (\mathrm{Im}(f)^{\perp}$.

➟ De plus d'après la formule du rang

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{E}),$$

donc

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim\left((\mathrm{Im}(f)^{\perp}\right).$$

➟ On peut donc conclure que $\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$.

Une correction de l'exercice 14.10 *énoncé*

1. L'application est
   - ➟ bilinéaire car $(\lambda \mathrm{P} + \mu \mathrm{Q})(a_k) = \lambda \mathrm{P}(a_k) + \mu \mathrm{Q}(a_k)$;
   - ➟ symétrique car le produit des réels est commutatif ;
   - ➟ et $\langle \mathrm{P}, \mathrm{P}\rangle \geqslant 0$ car c'est une somme de carrés de réels.

De plus, si $\langle P, P\rangle = 0$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} P^2(a_k) = 0 \Longrightarrow \forall k \in [\![0 ; n]\!],\ \ P(a_k) = 0.$$

Or, un polynôme de degré au plus n ayant au moins $n+1$ racines est le polynôme nul. Donc $P = 0$ et la forme bilinéaire est définie positive : c'est donc un produit scalaire.

2. *En pratique, hors situations qui rendent les calculs très simples, le procédé de Gram-Schmidt ne s'applique que dans les cas où on doit « orthonormaliser » des familles de deux ou trois vecteurs. Ici on est censés s'attaquer à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ qui comporte $n+1$ polynômes, donc avant de se résigner à cette tâche ingrate, on essaie de trouver autre chose.*

On peut remarquer que si P ou Q s'annulent en beaucoup de a_k, alors $P(a_k)Q(a_k)$ sera souvent nul. Il nous vient donc l'idée géniale de fouiller du côté de la base des polynômes de Lagrange construits sur la liste $(a_0, \dots, a_n)$.
Ainsi, prenons pour tout $k \in [\![0 ; n]\!]$

$$L_k(X) = \prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i} = \frac{(X-a_0)\cdots(X-a_{k-1}) \times (X-a_{k+1})\cdots(X-a_n)}{(a_k-a_0)\cdots(a_k-a_{k-1}) \times (a_k-a_{k+1})\cdots(a_k-a_n)},$$

on sait que

- → pour tout $(i,j) \in [\![0 ; n]\!]^2$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$;
- → $(L_0, \dots, L_n)$ est une base, appelée **base de Lagrange**, de $\mathbb{K}_n[X]$;
- → les coordonnées d'un polynôme quelconque P de $\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base sont $(P(a_0), \dots, P(a_n))$.

Pour tout $(i,j) \in [\![0 ; n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}\left\langle L_i \mid L_j \right\rangle &= \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)L_j(a_k)\\ &= \begin{cases} L_i(a_i)L_j(a_i) + L_i(a_j)L_j(a_j) = 1\times 0 + 0 \times 1 = 0 & \text{si } i \neq j,\\ L_i(a_i)L_i(a_i) = 1 \times 1 = 1 & \text{si } i = j.\end{cases}\end{aligned}$$

donc la base de Lagrange est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.

3. On remarque que

$$H = \left\{ P \in E \,;\, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) \times 1 = 0 \right\} = \{P \in E \,;\, \langle P \mid 1\rangle = 0\} = \mathrm{Vect}(1)^{\perp}.$$

Ceci prouve déjà dans un premier temps que H est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

D'après le cours, la distance de Q à H est égale à

$$d(Q,H) = \|Q - p_H(Q)\| = \|p_{H^\perp}(Q)\|.$$

Or $H^\perp = \mathrm{Vect}(1)$, donc

$$\boxed{d(Q,H)} = \left\|p_{\mathrm{Vect}(1)}(Q)\right\| = \left\|\frac{\langle Q \mid 1\rangle}{\langle 1 \mid 1\rangle}1\right\| \quad \textit{(voir la remarque 7.11)}$$

$$= \frac{|\langle Q \mid 1\rangle|}{\|1\|} = \frac{\sum_{k=0}^{n} Q(a_k)\times 1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} 1\times 1}} = \boxed{\frac{\sum_{k=0}^{n} Q(a_k)}{\sqrt{n+1}}}.$$

Une correction de l'exercice 14.11

énoncé

1. ➟ Montrons d'abord que $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E) \perp \mathrm{Im}(f-\mathrm{id}_E)$.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$ et $y \in \mathrm{Im}(f-\mathrm{id}_E)$, alors $f(x) = x$ et il existe $t \in E$ tel que $y = (f-\mathrm{id}_E)(t) = f(t) - t$, donc

$$\begin{aligned}
\langle x \mid y\rangle &= \langle f(x) \mid f(t) - t\rangle \quad \textit{(car } f(x) = x \textit{ et } y = f(t)-t\textit{)}\\
&= \langle f(x) \mid f(t)\rangle - \langle f(x) \mid t\rangle \quad \textit{(par linéarité à droite)}\\
&= \langle x \mid t\rangle - \langle f(x) \mid t\rangle \quad \textit{(car } f \in \mathcal{O}(E) \textit{ donc conserve le produit scalaire)}\\
&= \langle f(x) \mid t\rangle - \langle f(x) \mid t\rangle \quad \textit{(de nouveau car } f(x) = x\textit{)}\\
&= 0 \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

   ➟ Ces deux sous-espaces vectoriels étant orthogonaux, ils sont en somme directe, puis grâce au théorème du rang, on sait que

$$\dim(\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)) + \dim(\mathrm{Im}(f-\mathrm{id}_E)) = \dim(E),$$

   donc ils sont bien supplémentaires dans E, ce qui achève de prouver que

$$\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(f-\mathrm{id}_E)^\perp.$$

   On procède de façon similaire pour montrer que

$$\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(f+\mathrm{id}_E)^\perp.$$

2. Supposons que $(f-\alpha\,\mathrm{id}_E)^2 = 0$ (ce zéro désigne en fait l'endomorphisme nul de E !).
   ➟ Si $f - \alpha\,\mathrm{id}_E = 0$, alors $f = \alpha\,\mathrm{id}_E$, et comme f est une isométrie, alors $\alpha = \pm 1$. Ainsi $f = \pm\mathrm{id}_E$.

➟ Si $f - \alpha\,\mathrm{id}_E \neq 0$, alors il existe $x \in E$ tel que $(f - \alpha\,\mathrm{id}_E)(x) \neq 0_E$. Notons $y = (f - \alpha\,\mathrm{id}_E)(x)$, alors

$$\begin{aligned} \text{d'une part} \quad (f - \alpha\,\mathrm{id}_E)(y) &= (f - \alpha\,\mathrm{id}_E)((f - \alpha\,\mathrm{id}_E)(x)) \\ &= (f - \alpha\,\mathrm{id}_E)^2(x) = 0_E \\ \text{d'autre part} \quad (f - \alpha\,\mathrm{id}_E)(y) &= f(y) - \alpha y \end{aligned}$$

donc $f(y) = \alpha y$.
Ainsi

$$\|f(y)\| = |\alpha|\,\|y\|,$$

mais f étant une isométrie,

$$\|f(y)\| = \|y\|,$$

donc

$$(1 - |\alpha|)\,\|y\| = 0,$$

et comme on a fait en sorte que $y \neq 0_E$, on peut conclure que $|\alpha| = 1$, c'est-à-dire $\alpha = \pm 1$.

D'autre part, de $(f - \alpha\,\mathrm{id}_E)^2 = 0$, on en déduit (c'est un résultat désormais classique) que $\mathrm{Im}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E)$.
Mais on sait que $\alpha = \pm 1$, et grâce à la première question, on sait aussi que $\mathrm{Im}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \perp \mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E)$, donc on en déduit que

$$\mathrm{Im}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \perp \mathrm{Im}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E),$$

donc que $\mathrm{Im}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$, ce qui entraîne que $f = \alpha\,\mathrm{id}_E$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 14.12 *énoncé*

1. Soit $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned} \text{d'une part} \quad \langle x + y \mid f(x + y)\rangle &= 0 \\ \text{d'autre part} \quad \langle x + y \mid f(x + y)\rangle &= \langle x + y \mid f(x) + f(y)\rangle \\ &= \langle x \mid f(x)\rangle + \langle x \mid f(y)\rangle \\ &\qquad + \langle y \mid f(x)\rangle + \langle y \mid f(y)\rangle \\ &= \langle x \mid f(y)\rangle + \langle y \mid f(x)\rangle, \end{aligned}$$

donc $\langle x \mid f(y)\rangle + \langle y \mid f(x)\rangle = 0$, ce qui donne peu ou prou la conclusion voulue.

2. ➟ Supposons que $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ et $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.
Montrons que $\forall x \in \mathrm{E},\ \langle x \mid f(x)\rangle = 0$.
Soit $x \in \mathrm{E}$, comme $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$, alors f conserve le produit scalaire, ainsi

$$\begin{aligned}\langle x \mid f(x)\rangle &= \langle f(x) \mid f(f(x))\rangle = \langle f(x) \mid (f\circ f)(x)\rangle = \langle f(x) \mid -x\rangle \\ &= \langle -x \mid f(x)\rangle = -\langle f(x) \mid x\rangle,\end{aligned}$$

donc $\langle f(x) \mid x\rangle = 0$.

➟ Supposons que $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ et $\forall x \in \mathrm{E},\ \langle x \mid f(x)\rangle = 0$.
Montrons que $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.
Soit $x \in \mathrm{E}$, montrons que $(f \circ f)(x) = -x$, autrement dit que

$$(f\circ f)(x) + x = 0_{\mathrm{E}}.$$

> *Ici, pour établir que $\square = 0_{\mathrm{E}}$, l'idée classique dans ce chapitre est d'utiliser le caractère défini du produit scalaire, qui nous dit qu'il suffit de prouver que $\langle \square \mid \square\rangle = 0$!*

$$\|(f\circ f)(x) + x\|^2 = \|(f\circ f)(x)\|^2 + 2\langle (f\circ f)(x) \mid x\rangle + \|x\|^2.$$

Mais $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$, donc

$$\|(f\circ f)(x)\|^2 = \|f(f(x))\|^2 = \|f(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

De plus, grâce à la seconde hypothèse, et à la première question,

$$\begin{aligned}\langle (f\circ f)(x) \mid x\rangle = \langle f(f(x)) \mid x\rangle &= -\langle f(x) \mid f(x)\rangle \\ &= -\|f(x)\|^2 = -\|x\|^2.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\|(f\circ f)(x) + x\|^2 = \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0,$$

dont on déduit que $(f\circ f)(x) + x = 0_{\mathrm{E}}$ C.Q.F.D.

➟ Supposons que $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ et $\forall x \in \mathrm{E},\ \langle x \mid f(x)\rangle = 0$.
Montrons que $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$.
Soit $x \in \mathrm{E}$, alors

$$\begin{aligned}\|f(x)\|^2 &= \langle f(x) \mid f(x)\rangle \\ &= -\langle x \mid f(f(x))\rangle \quad \textit{(grâce à la seconde hypothèse, et à la première question)} \\ &= -\langle x \mid -x\rangle \quad \textit{(avec la première hypothèse)} \\ &= +\langle x \mid x\rangle = \|x\|^2 \quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 14.13 *énoncé*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Les matrices $A \times A^\top$ et $A^\top \times A$ sont symétriques (qu'est-ce que la transposée d'un produit ?) réelles, donc d'après le théorème spectral, elles sont diagonalisables.
2. (a) Soit λ une valeur propre de MN.
   - si $\lambda = 0$, alors MN n'est pas inversible, donc $\det(MN) = 0$. Or $\det(MN) = \det(M)\det(N) = \det(N)\det(M) = \det(NM)$, donc $\det(NM) = 0$, d'où NM n'est pas inversible, ce qui entraîne que 0 est aussi valeur propre de NM.
   - Si $\lambda \neq 0$. Soit X un vecteur propre de MN, alors
   $$MNX = \lambda X$$
   donc en multipliant par N, on obtient
   $$NM(NX) = \lambda(NX).$$
   Mais NX n'est pas nul, car sinon $MNX = \lambda X$ serait nul, ce qui est faux car on a supposé λ et X non nuls (X est un vecteur propre, donc il est non nul).
   Donc on peut conclure que λ est aussi valeur propre de NM, et que NX est un vecteur propre associé.

   (b) Soit λ une valeur propre non nulle de MN. On a vu que pour tout vecteur propre de MN, NX est vecteur propre de NM, donc $X \mapsto NX$ est bien une application de $E_\lambda(MN)$ dans $E_\lambda(NM)$.
   Notons cette application φ.
   - Sa linéarité est évidente par la distributivité du produit matriciel.
   - Par conséquent elle est injective car on a vu que si X est un vecteur propre de MN, autrement dit si $X \in E_\lambda(MN) \setminus \{0\}$, alors $\varphi(X) = NX$ est aussi non nul, donc par contraposée $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.
   - Montrons que φ est surjective. Prenons $Y \in E_\lambda(NM)$, et trouvons X dans $E_\lambda(MN)$ tel que $\varphi(X) = Y$.
   Avec un peu d'intuition et beaucoup de labeur sur le brouillon, tentons le coup avec $X = \frac{1}{\lambda}MY$ (j'avais d'abord essayé MY par échange de M et N...).
     - Premièrement,
     $$\begin{aligned} MNX &= MN\left(\frac{1}{\lambda}MY\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}M(NMY) \\ &= \frac{1}{\lambda}M(\lambda Y) \quad (\textit{car } Y \in E_\lambda(NM)) \\ &= \lambda\left(\frac{1}{\lambda}MY\right) = \lambda X \end{aligned}$$

donc $X \in E_\lambda(MN)$;

- puis, maintenant que $X \in E_\lambda(MN)$,

$$\begin{aligned}\varphi(X) = NX = N\left(\frac{1}{\lambda}MY\right) &= \frac{1}{\lambda}NMY \\ &= \frac{1}{\lambda}\lambda Y \ \ (\textit{car } Y \in E_\lambda(NM)) \\ &= Y \ \ \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

➟ Ainsi nous avons bâti un isomorphisme φ entre $E_\lambda(MN)$ et $E_\lambda(NM)$, qui prouve que ces deux sous-espaces vectoriels sont de même dimension.

3. ➟ Les deux matrices $AA^\top$ et $A^\top A$ ont d'après la question précédente (en prenant $M = A$ et $N = A^\top$) les mêmes valeurs propres, et elles sont diagonalisables, donc en particulier les ordres de multiplicité de leurs valeurs propres sont égales aux dimensions des sous-espaces propres correspondants.

   Or on vient de voir que dans le cas des valeurs propres non nulles, ces sous-espaces propres sont de même dimension, donc ces valeurs propres ont même ordre de multiplicité.

   Enfin, si 0 est valeur propre de ces deux matrices $AA^\top$ et $A^\top A$, alors celles-ci étant diagonalisables, l'ordre de multiplicité de 0 pour chacune de ces deux matrices est égale à n auquel on soustrait la somme des ordres des autres valeurs propres.

   ➟ On en déduit que $AA^\top$ et $A^\top A$ sont semblables, via une matrice orthogonale, à la même matrice diagonale D (composée des valeurs propres répétées autant de fois que leur ordre de multiplicité). Autrement dit, il existe P, Q deux matrices orthogonales telles que

$$D = P^\top(AA^\top)P = Q^\top(A^\top A)Q.$$

   On en déduit que

$$\begin{aligned}AA^\top &= PDP^\top = P(Q^\top(A^\top A)Q)P^\top = (PQ^\top)(A^\top A)QP^\top \\ &= U^\top(A^\top A)U\end{aligned}$$

   où $U = QP^\top$ est bien une matrice orthogonale car produit de matrices orthogonales.

Une correction de l'exercice 14.14 *énoncé*

1. ➟ L'application f va bien de E dans E, et sa linéarité provient de la linéarité à droite du produit scalaire, donc c'est un endomorphisme de E.

➟ Pour tous vecteurs x, y de E,

$$\begin{aligned}\langle f(x) \mid y\rangle &= \langle\langle a \mid x\rangle a + \langle b \mid x\rangle b \mid y\rangle \\ &= \langle a \mid x\rangle\langle a \mid y\rangle + \langle b \mid x\rangle\langle b \mid y\rangle,\end{aligned}$$

dans cette expression, x et y sont interchangeables, donc

$$\langle f(x) \mid y\rangle = \langle f(y) \mid x\rangle = \langle x \mid f(y)\rangle,$$

ce qui achève de prouver que f est un endomorphisme autoadjoint.

2. Soit $x \in \mathrm{E}$.

➟ Si $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$, alors $f(x) = x$, c'est-à-dire

$$x = \langle a \mid x\rangle\, a + \langle b \mid x\rangle\, b,$$

donc en particulier $x \in \mathrm{Vect}(a, b)$.
Donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \subset \mathrm{Vect}(a, b)$.

➟ Plaçons-nous à présent dans $\mathrm{Vect}(a, b)$.
Tout d'abord, on remarque que comme $\langle a \mid b\rangle = 0$, alors

$$\begin{aligned}f(a) &= \|a\|^2\, a \\ f(b) &= \|b\|^2\, b,\end{aligned}$$

D'autre part, les vecteurs a et b sont non nuls et orthogonaux, donc $\left(\frac{1}{\|a\|}\, a, \frac{1}{\|b\|}\, b\right)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(a, b)$, et par conséquent tous les vecteurs x de $\mathrm{Vect}(a, b)$ s'écrivent *(prop 7.8)* :

$$\begin{aligned}x &= \left\langle x \mid \frac{1}{\|a\|}\, a\right\rangle \frac{1}{\|a\|}\, a + \left\langle x \mid \frac{1}{\|b\|}\, b\right\rangle \frac{1}{\|b\|}\, b \\ &= \frac{\langle x \mid a\rangle}{\|a\|^2}\, a + \frac{\langle x \mid b\rangle}{\|b\|^2}\, b\end{aligned}$$

Soit $x \in \mathrm{Vect}(a, b)$. Alors d'après ce qui précède

$$x = \frac{\langle x \mid a\rangle}{\|a\|^2}\, a + \frac{\langle x \mid b\rangle}{\|b\|^2}\, b.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) &\Longleftrightarrow f(x)=x\\
&\Longleftrightarrow \langle x \mid a\rangle\, a+\langle x \mid b\rangle\, b=\frac{\langle x \mid a\rangle}{\|a\|^2}\, a+\frac{\langle x \mid b\rangle}{\|b\|^2}\, b\\
&\Longleftrightarrow \left(1-\frac{1}{\|a\|^2}\right)\langle x \mid a\rangle\, a+\left(1-\frac{1}{\|b\|^2}\right)\langle x \mid b\rangle\, b=0_{\mathrm{E}}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases}\left(1-\frac{1}{\|a\|^2}\right)\langle x \mid a\rangle=0\\ \left(1-\frac{1}{\|b\|^2}\right)\langle x \mid b\rangle=0\end{cases} \quad \textit{(car (a,b) est libre car $a\perp b$)}
\end{aligned}$$

Donc 4 cas sont possibles :

- si $\|a\|\neq 1$ et $\|b\|\neq 1$, alors

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) &\Longleftrightarrow \langle x \mid a\rangle=\langle x \mid b\rangle=0\\
&\Longleftrightarrow x=0_{\mathrm{E}}
\end{aligned}$$

  donc $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathrm{E}})=\{0_{\mathrm{E}}\}$.

- Si $\|a\|=1$ et $\|b\|\neq 1$, alors

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) &\Longleftrightarrow \langle x \mid b\rangle=0\\
&\Longleftrightarrow x=\frac{\langle x \mid a\rangle}{\|a\|^2}\, a\\
&\Longleftrightarrow x\in \operatorname{Vect}(a) \quad \textit{(et je pèse mon équivalence ! Car tout vecteur x de $\operatorname{Vect}(a)$ s'écrit effectivement $x=\frac{\langle x|a\rangle}{\|a\|^2}\, a$)}
\end{aligned}$$

  donc $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathrm{E}})=\operatorname{Vect}(a)$.

- Si $\|b\|=1$ et $\|a\|\neq 1$, alors de même $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathrm{E}})=\operatorname{Vect}(b)$.
- Si $\|a\|=\|b\|=1$, alors $f(x)=x$ pour tout $x\in\operatorname{Vect}(a,b)$, donc $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathrm{E}})=\operatorname{Vect}(a,b)$.

3. (a) La famille (a,b) est libre donc pour tout $x\in \mathrm{E}$,

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Ker}(f) &\Longleftrightarrow \langle a \mid x\rangle\, a+\langle b \mid x\rangle\, b=0\\
&\Longleftrightarrow \langle a \mid x\rangle=\langle b \mid x\rangle=0\\
&\Longleftrightarrow x\in\operatorname{Vect}(a,b)^{\perp},
\end{aligned}$$

donc $\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Vect}(a,b)^{\perp}$. On sait que $\dim(\operatorname{Vect}(a,b))=2$, donc que $\dim(\operatorname{Vect}(a,b)^{\perp})=n-2\geqslant 1$, ainsi $\operatorname{Ker}(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul et donc 0 est valeur propre de f, avec $\mathrm{E}_0(f)=\operatorname{Vect}(a,b)^{\perp}$.

(b) ➟ L'inégalité de Cauchy-Schwarz dit que $|\langle a \mid b\rangle| < \|a\| \times \|b\|$, cette inégalité étant stricte car a et b ne sont pas colinéaires. Donc comme a et b sont unitaires, on a bien $|\langle a \mid b\rangle| < 1$, c'est-à-dire $\langle a \mid b\rangle \in]-1\,;\,1[$.

➟ On sait déjà que 0 est valeur propre de f avec $\dim(E_0(f)) = n-2$. La somme des dimensions des sous-espaces propres étant inférieure à n, car les sous-espaces propres sont en somme directe, on en déduit qu'il n'y a plus de place que pour une seule ou au maximum 2 autres valeurs propres.

Plutôt que de manipuler le cas général $f(x) = \lambda x$, on remarque que

$$f(a) = \langle a \mid a\rangle\, a + \langle b \mid a\rangle\, b = a + \langle a \mid b\rangle\, b$$
$$f(b) = \langle a \mid b\rangle\, a + \langle b \mid b\rangle\, b = \langle a \mid b\rangle\, a + b,$$

donc

$$f(a+b) = f(a) + f(b) = (1+\langle a \mid b\rangle)(a+b)$$
$$f(a-b) = f(a) - f(b) = (1-\langle a \mid b\rangle)(a-b).$$

On sait que $a+b$ et $a-b$ sont non nuls, car (a, b) est libre, donc on en déduit que $1+\langle a \mid b\rangle$ et $1-\langle a \mid b\rangle$ sont valeurs propres de f.

On remarque encore que ces deux valeurs propres sont égales si, et seulement si, $\langle a \mid b\rangle = 0$ et que dans ce cas $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

Donc en conclusion :

- si $\langle a \mid b\rangle \neq 0$, alors
  - 0 est valeur propre avec $\dim(E_0)(f) = n-2$,
  - $1+\langle a \mid b\rangle$ est valeur propre, et son sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}(a+b)$,
  - $1-\langle a \mid b\rangle$ est valeur propre de sous-espace propre associé $\mathrm{Vect}(a-b)$,

  et on peut affirmer que f est diagonalisable.
- si $\langle a \mid b\rangle = 0$, alors
  - 0 est valeur propre avec $\dim(E_0)(f) = n-2$,
  - 1 est valeur propre de sous-espace propre associé

  $$E_1(f) = \mathrm{Vect}\Big((a-b), (a+b)\Big) = \mathrm{Vect}(a, b).$$

  Ici, f est aussi diagonalisable, et en particulier f est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(a, b)$.

Une correction de l'exercice 14.15 *énoncé*

1. On reconnaît

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2 = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}\times\mathrm{A}^\top\right) = \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n) = n.$$

2. On considère le vecteur C égal à la somme des colonnes de A, alors pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$,

$$(\mathrm{C})_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$$

et

$$\langle \mathrm{C} \mid \mathrm{U}\rangle = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}\right)\times 1 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}.$$

Donc grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right|^2 \leqslant \|\mathrm{C}\|^2\times\|\mathrm{U}\|^2.$$

Or $\|\mathrm{U}\|^2 = \sum_{i=1}^n 1^2 = n$.

De même, comme les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, et que C a pour coordonnées $(1,1,\ldots,1)$ dans cette base orthonormée, alors

$$\|\mathrm{C}\|^2 = n.$$

Par conséquent,

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right|^2 \leqslant n^2,$$

ce qui nous donne le résultat voulu.

3. On peut considérer la somme

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$$

comme le produit scalaire (canonique dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) de la matrice $\left(\left|a_{i,j}\right|\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et de la matrice remplie de 1, ainsi grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|\right)^2 &\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|^2 \times \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1^2\\ &= n\times n^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

D'autre part, chaque colonne étant de norme 1, on a pour tout $j \in [\![1\ ;\ n]\!]$,

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |a_{i,j}|^2 = 1,$$

or

$$\begin{aligned}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |a_{i,j}|\right)^2 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |a_{i,j}|^2 + 2\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} |a_{i_1,j}| \times \left|a_{i_2,j}\right| \\ &\geqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |a_{i,j}|^2,\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |a_{i,j}| \geqslant 1$$

puis en additionnant ces inégalités pour $j \in [\![1\ ;\ n]\!]$,

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |a_{i,j}| \geqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n} 1,$$

qui revient à

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \geqslant n.$$

Une correction de l'exercice 14.16

énoncé

On sait que $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^\top \times \mathrm{A}\right)$, donc comme A est symétrique

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^2\right).$$

Mais la matrice A est symétrique réelle, donc par le théorème spectral, elle est ortho-diagonalisable, autrement dit il existe $\mathrm{P} \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^\top\mathrm{AP} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, où $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Ainsi, en notant $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on a $A = PDP^\top$, d'où

$$\begin{aligned} A^2 &= PDP^\top PDP^\top = PD^2P^\top \quad \textit{(car } P^\top = P^{-1}\textit{)}, \\ &= P\,\mathrm{Diag}\left(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2\right) P^\top. \end{aligned}$$

Ainsi deux matrices semblables ayant la même trace, on obtient

$$\mathrm{Tr}\left(A^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda \lambda^2$$

d'où l'égalité demandée.

Une correction de l'exercice 14.17 *énoncé*

1. Soit λ une valeur propre de v, alors il existe un vecteur x non nul tel que $v(x) = \lambda x$. Par conséquent, $0 = (v(x), x) = \lambda \|x\|^2$, et donc $\lambda = 0$ puisque $\|x\| \neq 0$. Ainsi v a pour unique valeur propre 0.
   Puisque v est diagonalisable, et que toutes ses valeurs propres sont nulles, on en déduit que $v = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2. (a) En utilisant la linéarité à gauche du produit scalaire, et les règles de calcul sur les endomorphismes, l'hypothèse de l'énoncé se traduit par

   $$\forall x \in E, \quad \left\langle \left(u_1 + \cdots + u_p - \mathrm{id}_E\right)(x) \mid x \right\rangle = 0.$$

   Les u_i sont des endomorphismes autoadjoints, ainsi que id_E, donc $u_1 + \cdots + u_p - \mathrm{Id}_E$ l'est aussi, d'où grâce à la première question, on conclut que $u_1 + \cdots + u_p = \mathrm{id}_E$.

   (b) La relation précédente montre que tout x de E se décompose en $x = u_1(x) + \cdots + u_p(x)$. Ainsi,

   $$E \subset \mathrm{Im}(u_1) + \cdots + \mathrm{Im}\left(u_p\right),$$

   et l'inclusion réciproque est évidente, donc on a l'égalité.
   On en déduit que

   $$n = \dim(E) = \dim\left(\sum_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(u_i)\right),$$

   donc la relation sur les rangs donnée dans l'énoncé équivaut à

   $$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(u_i)\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{Im}(u_i)),$$

ce qui est une caractérisation de ce que les $\mathrm{Im}(u_i)$ sont en somme directe.
On a donc bien prouvé que

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(u_i).$$

(c) Puisque $\mathrm{id}_\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{p} u_i$, on a en particulier pour tout $x \in \mathrm{E}$ et tout $k \in [\![1 ; p]\!]$,

$$u_k(x) = \sum_{i=1}^{p} u_i(u_k(x)),$$

à gauche de cette égalité un vecteur de $\mathrm{Im}(u_k)$, à droite une somme de vecteurs pris respectivement dans $\mathrm{Im}(u_1), \ldots, \mathrm{Im}\left(u_p\right)$, donc ces sous-espaces $\mathrm{Im}(u_i)$ étant en somme directe d'après la question précédente, on en déduit par identification

$$\forall i \in [\![1 ; p]\!],\ u_i(u_k(x)) = \begin{cases} u_k(x) & \text{si } i = k, \\ 0_\mathrm{E} & \text{sinon,} \end{cases}$$

autrement dit $u_i \circ u_k = 0$ si $i \neq k$, et $u_k^2 = u_k$.
Ainsi, u_k est une projection. Puisqu'en outre l'endomorphisme est autoadjoint, c'est une projection orthogonale !

Une correction de l'exercice 14.18

énoncé

1. Pour une matrice $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, et un vecteur $\mathrm{X} = (x_i) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{AX} = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{AX})_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) x_i = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Ici,

$$\begin{aligned}
X^\top HX &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{1}{i+j-1}x_ix_j = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j\int_0^1 t^{i+j-2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_jt^{i+j-2}\right)\mathrm{d}t \ \ \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_it^{i-1}x_jt^{j-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^n x_jt^{j-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

2. La matrice H est bien symétrique, et elle est définie positive dès que pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $X^\top HX > 0$.

   De la formule précédente, on déduit immédiatement que H est positive.

   De plus, si $\langle HX, X\rangle = 0$, alors par stricte positivité de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment, on déduit que

$$\forall t\in[0\ ;\ 1],\ \sum_{i=1}^n x_it^{i-1} = 0,$$

   autrement dit le polynôme $\sum_{i=1}^n x_iX^{i-1}$ s'annule sur $[0\ ;\ 1]$. Un polynôme ayant une infinité de racines étant le polynôme nul, on en déduit que tous les x_i sont nuls, soit encore que X est nul. Ainsi, H est bien définie positive.

Une correction de l'exercice 14.19 *énoncé*

Soit A une matrice symétrique quelconque. Par le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P telle que $A = PDP^\top$, où D est une matrice diagonale, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Prenons un réel $\mu > \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$. On considère les deux matrices suivantes :

$$B = P\,\mathrm{diag}(\mu+\lambda_1, \dots, \mu+\lambda_n)P^\top \text{ et } C = P\,\mathrm{diag}(\mu, \dots, \mu)P^\top.$$

Alors B et C sont deux matrices symétriques définies positives, car symétriques réelles à valeurs propres strictement positives, et $A = B - C$.
Ainsi, l'espace vectoriel engendré par les matrices symétriques définies positives contient

donc toutes les matrices symétriques, autrement dit contient $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, et l'inclusion réciproque est évidente, donc

$$\mathrm{Vect}\left(\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).$$

Une correction de l'exercice 14.20

énoncé

1. L'endomorphisme f admet pour matrice A qui est symétrique réelle, dans la base canonique qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique, donc f est un endomorphisme autoadjoint, et grâce au théorème spectral, f est diagonalisable dans une base de vecteurs propres orthonormée.
2. On vérifie que $\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}_4$, donc A est une matrice orthogonale. L'endomorphisme f est représentée par la matrice orthogonale A dans la base canonique qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique, donc f est une isométrie.

   On en déduit que ses seules valeurs propres possibles sont réelles car f est symétrique, et sont 1 et -1.

   De plus, comme f est diagonalisable, il ne peut avoir une seule valeur propre, car sinon il aurait pour matrice I_4 ou $-\mathrm{I}_4$ dans une base de vecteurs propres, ce qui en ferait l'identité de $\mathbb{R}^4$ ou son opposée.

   Par conséquent, le spectre de f est $\{1, -1\}$.
3. La matrice A est diagonalisable et ses valeurs propres sont 1 et -1. Notons a et b les ordres de multiplicité respectifs des valeurs propres 1 et -1, alors $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = a - b$, mais aussi $a + b = 4$. Mais on calcule que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 2$, donc $a = 3$ et $b = 1$.

   Par conséquent, le polynôme caractéristique de f (et de A) est

   $$\chi_f(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - 1)^3(\mathrm{X} + 1).$$
4. Soit $\mathrm{X} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on confondra les quadruplets de $\mathbb{R}^4$ et les matrices colonnes

de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
&X \in E_1(f) \\
&\iff (A - I_4)X = 0 \\
&\iff \frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) X = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} -8 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} X = 0 \iff 2x + y - z + t = 0 \\
&\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x + y + t \\ t \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Donc $E_1(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Ces trois vecteurs sont linéairement indépendants, car la matrice de leurs coordonnées est échelonnée, donc ils forme une base de $E_1(f)$.

Notons X_1, X_2, X_3 ces trois vecteurs de la base de $E_1(f)$. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette base (X_1, X_2, X_3).

➟ Tout d'abord, on prend

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|X_1\|} X_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

➟ puis

$$\varepsilon_2 = \frac{X_2 - \langle X_2 | \varepsilon_1 \rangle\, \varepsilon_1}{\|X_2 - \langle X_2 | \varepsilon_1 \rangle\, \varepsilon_1\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

➟ et

$$\varepsilon_3 = \frac{X_3 - [\langle X_3|\varepsilon_1\rangle\,\varepsilon_1 + \langle X_3|\varepsilon_2\rangle\,\varepsilon_2]}{\|X_3 - [\langle X_3|\varepsilon_1\rangle\,\varepsilon_1 + \langle X_3|\varepsilon_2\rangle\,\varepsilon_2]\|} = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\6\end{pmatrix};$$

5. On sait que la matrice A est diagonalisable et a pour valeurs propres 1 et -1, donc $E_1 \oplus E_{-1} = \mathbb{R}^4$.
   De plus si $X \in E_1$, et $Y \in E_{-1}$, alors

$$\begin{aligned}\langle X \mid Y\rangle &= \langle AX \mid AY\rangle \quad \textit{(car A est une isométrie)}\\ &= \langle X \mid -Y\rangle \quad \textit{(par définition de X et Y)}\\ &= -\langle X \mid Y\rangle\,,\end{aligned}$$

   donc $\langle X \mid Y\rangle = 0$.
   Ainsi $E_{-1} = E_1^{\perp}$.
   On a vu plus haut que

$$E_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - z + t = 0\}.$$

   donc en notant $N = (2,1,-1,1)$,

$$E_1 = \{X = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \langle X \mid N\rangle = 0\} = \mathrm{Vect}(N)^{\perp},$$

   d'où $E_{-1} = E_1^{\perp} = \mathrm{Vect}(N)$.
6. Dans la base (E_1, E_2, E_3, N), qui est une base orthonormée adaptée à la somme directe $E_1 \oplus E_1^{\perp} = \mathbb{R}^4$, la matrice de f est

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

   et f est la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(N)$.

Une correction de l'exercice 14.21

énoncé

1. La matrice de f dans la base canonique, qui est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique, est symétrique à coefficients réels, donc f est un endomorphisme autoadjoint, par conséquent diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ grâce au théorème spectral.

De plus si on effectue une permutation des vecteurs de cette nouvelle base, on ne change pas son caractère orthonormé. On peut donc ordonner les valeurs propres associées dans tout ordre voulu, en particulier dans l'ordre décroissant, et appeler $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ cette nouvelle base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

2. La matrice P de passage entre $(e_1, \dots, e_n)$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est une matrice de passage entre deux bases orthonormées, donc elle est orthogonale.
Par conséquent ses colonnes ainsi que ses lignes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
Ainsi, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i,j}^2$ et $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j}^2$, qui sont les carrés des normes respectives de la j^e colonne et de la i^e ligne, sont égales à 1.
3. Pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, $a_{i,i}$ est la coordonnée sur e_i de $f(e_i)$, donc $a_{i,i} = \langle f(e_i) \mid e_i \rangle$.
Or on sait que

$$\begin{aligned} e_i &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle \varepsilon_j, \\ \text{donc } f(e_i) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle \varepsilon_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle f(\varepsilon_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle \lambda_j \varepsilon_j \ \textit{(par définition des } \varepsilon_j \textit{ et } \lambda_j\textit{)} \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle \lambda_j \varepsilon_j \middle| e_i \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle \lambda_j \times \left\langle \varepsilon_j \mid e_i \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2, \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

4. (a) Soit $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$. On déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 \\ &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2. \end{aligned}$$

Or pour tout $j \geqslant k+1$, $\lambda_j \leqslant \lambda_k$, donc en multipliant par le réel positif $\left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2$, on obtient $\lambda_j \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 \leqslant \lambda_k \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2$, puis en additionnant ces inégalités pour j de $k+1$ à n :

$$\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 \leqslant \lambda_k \sum_{j=k+1}^{n} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2,$$

d'où

$$a_{i,i} \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 + \lambda_k \sum_{j=k+1}^{n} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2.$$

Enfin

$$\begin{aligned}\sum_{j=k+1}^{n} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 - \sum_{j=1}^{k} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 \\ &= \|e_i\|^2 - \sum_{j=1}^{k} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 = 1 - \sum_{j=1}^{k} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2,\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}a_{i,i} &\leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 + \lambda_k \left(1 - \sum_{j=1}^{k} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_j - \lambda_k\right) \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 + \lambda_k, \quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

(b) Les inégalités ci-dessus sont vraies pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$ et aussi pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, donc on peut les additionner pour i de 1 à k :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} a_{i,i} &\leqslant \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_j - \lambda_k\right) \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 + \lambda_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_j - \lambda_k\right) \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_k \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_j - \lambda_k\right) \sum_{i=1}^{k} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 + k\lambda_k.\end{aligned}$$

Mais $\sum_{i=1}^{k} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 = 1$, et $\lambda_j - \lambda_k \geqslant 0$ car $j \leqslant k$, donc

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_j - \lambda_k\right) \sum_{i=1}^{k} \left\langle e_i \mid \varepsilon_j \right\rangle^2 + k\lambda_k \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_j - \lambda_k\right) + k\lambda_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j.$$

On peut donc conclure par l'inégalité demandée.

Une correction de l'exercice 14.22 *énoncé*

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

1. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et f la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$.
   - La fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$ comme produit de fonctions continues.
   - De plus, par croissances comparées, $P(t)Q(t)$ étant une combinaison linéaire de puissances de t, on peut affirmer que $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc par domination f est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

   On en conclut que f est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et donc l'intégrale définissant $\langle P \mid Q\rangle$ est convergente.
2. Posons $\Phi : (P, Q) \mapsto \langle P \mid Q\rangle$.
   La question précédente permet de s'assurer que Φ est bien définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$, et Φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   - Par linéarité d'intégrales généralisées convergentes, Φ est linéaire à gauche ainsi qu'à droite,
   - et par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, Φ est symétrique.
   - Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, la fonction $t \mapsto P(t)^2e^{-t}$ est continue et positive sur $[0\,;+\infty[$, donc, par positivité de l'intégrale, $\Phi(P, P) = \int_0^{+\infty} P(t)^2e^{-t}dt \geqslant 0$;
   - si de plus on suppose $\Phi(P, P) = 0$, alors, en rappelant s'il le faut que la fonction $t \mapsto P(t)^2e^{-t}$ est continue et positive sur $[0\,;+\infty[$, on peut en déduire par stricte positivité de l'intégrale, que pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $P(t)^2e^{-t} = 0$, donc que $P(t) = 0$.
     Ainsi le polynôme P a une infinité de racines, ce qui permet de le démasquer : P est le polynôme nul.

   On peut donc conclure que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Soit $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$, on pose $u : t \mapsto t^k$ et $v : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$, alors

   - u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\ ;+\infty[$, avec $u' = t \mapsto k\,t^{k-1}$ et $v' : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$,
   - par croissances comparées $u(t)v(t) \xrightarrow[t\longrightarrow+\infty]{} 0$,

   donc, par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t,$$

   c'est-à-dire,

$$\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, \text{C.Q.F.D.}$$

4. Pour $k=0$, $\left\langle \mathrm{X}^k \mid 1\right\rangle = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!$;
   puis pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente,

$$\left\langle \mathrm{X}^{k+1} \mid 1\right\rangle = (k+1)\left\langle \mathrm{X}^k \mid 1\right\rangle$$

   donc si $\left\langle \mathrm{X}^k \mid 1\right\rangle = k!$, alors $(\mathrm{X}^{k+1}|1) = (k+1)\times k! = (k+1)!$,
   ce qui achève de prouver par récurrence le résultat voulu.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

II.1 - Propriétés de l'application α

5. Si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, alors d'une part $\alpha(\mathrm{P})$ est encore un polynôme à coefficients réels, et de plus $\deg \mathrm{P} \leqslant n$ donc
   - $\deg(\mathrm{P}') \leqslant n-1$ d'où $\deg((1-\mathrm{X})\mathrm{P}') \leqslant 1+(n-1) = n$;
   - $\deg(\mathrm{P}'') \leqslant n-2$ donc $\deg(\mathrm{X}\mathrm{P}'') \leqslant 1+(n-2) = n-1$;
   - ainsi $\deg(\alpha(\mathrm{P})) \leqslant \max(\mathrm{X}\mathrm{P}'', (1-\mathrm{X})\mathrm{P}') \leqslant n$, autrement dit $\alpha(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

   De plus, par linéarité de la dérivation, et bilinéarité du produit des polynômes, α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

6. Comme $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est de dimension $n+1$, la matrice M de α dans la base canonique $(\mathrm{X}^k)_{k\in[\![0\,;\,n]\!]}$ est dans $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Indexons les lignes et les colonnes sur $[\![0 ; n]\!]$, alors pour tout $(i,j) \in [\![0 ; n]\!]^2$, le terme général $m_{i,j}$ de M est le coefficient de X^i du polynôme $\alpha(X^j)$, or

$$\alpha(X^j) = X \times j(j-1)X^{j-2} + (1-X) \times jX^{j-1} = j^2X^{j-1} - jX^j,$$

donc

$$m_{i,j} = \begin{cases} j^2 & \text{si } i = j-1, \\ -j & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, la matrice de α dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & & 0 & -n \end{pmatrix}$$

7. Cette matrice est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres, qui sont aussi celles de α, sont ses coefficients diagonaux à savoir $0, -1, -2, \cdots, -n$, autrement dit

$$\mathrm{Sp}(\alpha) = \left\{-k \mid k \in [\![0 ; n]\!]\right\}.$$

L'application α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, et il possède $n+1$ valeurs propres distinctes, donc il est diagonalisable.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0 ; n]\!]$.

8. Le même théorème qui donne la conclusion de la question précédente nous permet d'affirmer que les sous espaces propres de α sont de dimension 1 :

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\left(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)\right) = 1.$$

9. ➟ Soient Q_k un vecteur engendrant la droite vectorielle $\mathrm{Ker}\left(\alpha + kid_{\mathbb{R}_n[X]}\right)$, et c_k le coefficient dominant de Q_k.

   Alors c_k est non nul et $P_k = \dfrac{1}{c_k} Q_k$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, qui est encore dans $\mathrm{Ker}\left(\alpha + kid_{\mathbb{R}_n[X]}\right)$, donc qui vérifie $\alpha(P_k) = -k\,P_k$.

   ➟ Si deux polynômes vérifient ces propriétés, alors ils sont dans la même droite vectorielle donc ils sont colinéaires, et comme ils ont tous les comme coefficient dominant 1, ils sont forcément égaux.

   Par conséquent, il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $\alpha(P_k) = -k\,P_k$.

10. Pour $k=0$, il est clair que $P_0=1$.
Si k est non nul, alors, en notant d le degré de P_k :
   - le coefficient dominant de $-kP_k$ est $-k$ puisque P_k est unitaire ;
   - le coefficient dominant de $\alpha(P_k) = XP_k'' + (1-X)P_k'$ est (d'après les calculs de la question 6. en prenant $j=d$) $-d$;

   donc, par identification, $-d=-k$ d'où $d=k$, C.Q.F.D.
11. - On vient de voir que $P_0=1$.
   - Soit $P = X+a$ un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant 1. Alors après calcul $\alpha(P) = 1-X$, par conséquent $\alpha(P) = -P$ si et seulement si $a=-1$. Ainsi $P_1 = X-1$.
   - De même, on pose $P = X^2+bX+c$. Ainsi $P' = 2X+b$, $P''=2$ et $\alpha(P) = 2X+(1-X)(2X+b) = -2X^2+(4-b)X+b$, et par conséquent $\alpha(P) = -2P$ si et seulement si $4-b=-2b$ et $b=-2c$ d'où $b=-4$ et $c=2$.
   On a bien $P_2 = X^2-4X+2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \cdots, P_n)$

12. Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$.
Alors par définition,
$$\langle \alpha(P) \mid Q\rangle = \int_0^{+\infty} (tP''(t)+(1-t)P'(t))Q(t)e^{-t}dt,$$
ainsi, on pose $u : t \mapsto tP'(t)e^{-t}$,
   - u et Q sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$,
   - $u' : t \mapsto e^{-t}(tP''(t)+P'(t)-tP'(t))$, et par croissance comparée, $u(t)Q(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$,

   donc, par intégration par parties,
$$\langle \alpha(P) \mid Q\rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt,$$
et comme cette expression est symétrique en P et Q, on peut conclure que
$$\langle \alpha(P) \mid Q\rangle = \langle \alpha(Q) \mid P\rangle,$$
ce qui prouve que α est un endomorphisme autoadjoint.
13. Du résultat précédent on est censés déduire directement que les sous-espaces propres de α sont deux à deux orthogonaux, ce qui entraîne que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille orthogonale.

Au cas où, prouvons quand même ce résultat : soient i et j deux entiers de $[\![0\,;\,n]\!]$ tels que $i<j$.
Alors $j\neq 0$, et par définition de P_j, $\alpha(\mathrm{P}_j)=-j\,\mathrm{P}_j$ donc $\mathrm{P}_j=-\frac{1}{j}\alpha(\mathrm{P}_j)$, ainsi

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{P}_i \mid \mathrm{P}_j\right\rangle &= \left\langle \mathrm{P}_i \mid -\frac{1}{j}\alpha(\mathrm{P}_j)\right\rangle = -\frac{1}{j}\left\langle \mathrm{P}_i \mid \alpha(\mathrm{P}_j)\right\rangle \\ &= -\frac{1}{j}\left\langle \alpha(\mathrm{P}_i) \mid \mathrm{P}_j\right\rangle \quad \textit{(car } \alpha \textit{ est autoadjoint)} \\ &= -\frac{1}{j}\left\langle -i\,\mathrm{P}_i \mid \mathrm{P}_j\right\rangle \quad \textit{(par définition des } \mathrm{P}_k\textit{)} \\ &= \frac{i}{j}\left\langle \mathrm{P}_i \mid \mathrm{P}_j\right\rangle,\end{aligned}$$

donc

$$\left(1-\frac{i}{j}\right)\left\langle \mathrm{P}_i \mid \mathrm{P}_j\right\rangle = 0,$$

ce qui prouve que $\left\langle \mathrm{P}_i \mid \mathrm{P}_j\right\rangle=0$ puisque $i\neq j$, C.Q.F.D.
Par conséquent $(\mathrm{P}_0,\ldots,\mathrm{P}_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, et elle ne comporte pas le vecteur nul donc c'est une famille libre, comme son cardinal est $n+1=\dim(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}])$, on peut conclure que c'est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

14. Soit $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$.
    - Si $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ vérifie $(*)$ alors en particulier, pour tout $j\in[\![0\,;\,n-1]\!]$, en posant $\mathrm{P}=\mathrm{X}^i$

    $$\int_0^{+\infty} t^j \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^j,$$

    autrement dit

    $$\left\langle \mathrm{X}^j \mid 1\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^j,$$

    ce qui donne

    $$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^j = j! \ \textit{(d'après la question 4.)}$$

    ce qui nous donne les n égalités caractérisant l'égalité matricielle voulue.

- Réciproquement, si l'égalité matricielle est vraie, alors on a n égalités qui, comme ci-dessus, nous donnent que

$$\forall j \in [\![0\ ;\ n-1]\!],\quad \int_0^{+\infty} t^j \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^j,$$

ainsi pour tout polynôme $\mathrm{P} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \mathrm{X}^j \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^j \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j \int_0^{+\infty} t^j \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \quad \textit{(par linéarité des intégrales convergentes)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i^j}_{} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{P}(x_i),\quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

15. Le déterminant de la matrice carrée $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \cdots\cdots\cdots 1 \\ x_1 & x_2 \cdots\cdots\cdots x_n \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} \cdots\cdots x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ de l'égalité établie dans la question précédente est le déterminant de Vandermonde

$$\mathrm{V}_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Comme les x_i sont deux à deux distincts, ce déterminant est non nul, donc la matrice est inversible, et par conséquent si le n-uplet $(_1, \dots, _n)$ vérifie $(*)$, alors

$$\begin{pmatrix} {}_1 \\ \lambda_2 \\ {}_n \end{pmatrix} = \mathrm{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

d'où son unicité.

16. Prenons le polynôme $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - x_i)^2$.

Il est bien dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$, et, pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $P(x_i) = 0$ donc $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 0$.

En revanche, la fonction $t \mapsto P(t)e^{-t}$ est continue, positive, et n'est pas la fonction nulle sur $[0\,;+\infty[$ donc, par stricte positivité de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt > 0$.
Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$