Rayons de convergence

Exercice 15.1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{z^n}{n^3}, \qquad \sum (\sqrt{n})^n z^n, \qquad \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n\sqrt{n}} z^n,$$

$$\sum \sin(n) z^n, \qquad \sum \frac{2\,\mathrm{sh}(n)}{n(n+1)} z^n, \qquad \sum \frac{(2n)!}{n!n^n} z^n.$$

Exercice 15.2

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, où a_n est le nombre de diviseurs entiers de l'entier n.

Exercice 15.3

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum d_n z^n$, où d_n est la n-ème décimale de π.

Exercice 15.4 –

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe, et $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Montrer que les deux séries entières $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ et $\sum \frac{A_n}{n!} z^n$ ont le même rayon de convergence.

Exercice 15.5

Soit (a_n) une suite de nombres complexes non nuls. On note R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ et R′ le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{1}{a_n} z^n$.

1. Démontrer que si $R > 0$, alors, $R' \leqslant \dfrac{1}{R}$.
2. Démontrer que si $R = +\infty$, alors, $R' = 0$.
3. On considère la suite (a_n) définie par $a_{2n} = 1$ et $a_{2n+1} = \dfrac{1}{2^{2n+1}}$. Prouver que $R = 1$ et $R' = \frac{1}{2}$. Que dire de l'inégalité de la question 1 ?
4. Déterminer une suite (a_n) telle que $R = 0$ et $R' = +\infty$.

(mis à jour le 21 janvier 2025)

Exercice 15.6 –

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs, à valeurs finies, R_a et R_b.
Montrer que le rayon de convergence R de $\sum a_n b_n z^n$ vérifie $R \geqslant R_a R_b$.
Donner un exemple où l'inégalité est stricte, et un autre où il y a égalité.

Exercice 15.7 – Un calcul des coefficients à partir de la somme

On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, et on note S sa somme.

Montrer que, pour tout $r \in]0, R[$, $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{S\left(re^{i\theta}\right)}{\left(re^{i\theta}\right)^n} d\theta$.

Calculs de sommes

Exercice 15.8

Donner leurs rayons de convergence, puis calculer les sommes des séries entières suivantes :

$$\sum (n^3 - n^2 + 1)x^n, \qquad \sum \frac{n^3 - 2n + 1}{n!}x^n, \qquad \sum \frac{x^n}{n(2n+1)},$$

$$\sum \frac{x^n}{(2n-1)!}, \qquad \sum \frac{x^{2n}}{(n+1)(2n)!}.$$

Exercice 15.9

Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum H_n x^n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 15.10 – Mines-ponts PSI

Justifier l'existence et calculer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+2)2^n}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$.

Exercice 15.11

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières réelles

$$\sum \frac{\cos(na)}{n!\sin^n(a)} x^n \quad \text{et} \quad \sum \frac{\sin(na)}{n!\sin^n(a)} x^n.$$

Exercice 15.12 – Mines-Ponts PSI

Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière dont la suite des coefficients est $\left(\frac{1}{3n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Développement en série entière d'une fonction

Exercice 15.13

Développer en série entière, et préciser leurs rayons de convergence, les fonctions suivantes :

$$x \mapsto \sin^2(x)\cos(x), \qquad x \mapsto (\cos(x))\mathrm{e}^x, \qquad x \mapsto \ln(x^2+x+1).$$

Exercice 15.14 – CCINP - MP

Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$ admet un développement en série entière en 0 dont on précisera le rayon de convergence et l'expression des coefficients en fonction de n.

Exercice 15.15

1. Montrer que :

$$\forall x \in]-1\,;\,1[,\ \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos^2(t)}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(t)\mathrm{d}t\right)x^n.$$

2. Établir, en posant $u = \tan(t)$, que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos^2(t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}.$$

3. Déterminer la valeur de $\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 15.16 – Centrale PC

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, minorer le rayon de convergence de la série entière dont la suite des coefficients est $(\mathrm{Tr}(A^p))_{p\in\mathbb{N}}$, et exprimer sa somme en fonction du polynôme caractéristique de A.

Exercice 15.17

Soit la fonction $f : x \mapsto f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t+t^2} dt$.

1. Démontrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
2. Démontrer que, si $|x| < 1$, on a : $f'(x) = \frac{1-x}{1-x^3}$.
3. Déterminer le développement en série entière de f' sur $]-1,1[$, et en déduire celui de f sur $]-1,1[$.

Exercice 15.18 –

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. On note S sa somme.
On suppose qu'il existe une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes non nuls qui tend vers 0, et telle que $S(z_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Montrer que S est la fonction nulle.

Exercice 15.19

1. Développez $f : t \mapsto \frac{t}{2-t^2}$ en série, et donnez son rayon de convergence.
2. Donnez la loi et l'espérance d'une variable aléatoire X de fonction génératrice f.
3. Déterminez la loi de la variable aléatoire $Y = \frac{X}{2}$.

Exercice 15.20 – Loi binomiale négative

1. Donnez le développement en série entière de $\frac{1}{(1-x)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0\,;1[$, et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k$.
   (a) Montrer que X est bien une variable aléatoire.
   (b) Déterminez la fonction génératrice de X, puis calculez l'espérance et la variance de X.

Solutions

Une correction de l'exercice 15.1 *énoncé*

On va noter R le rayon de convergence de chacune de ces séries entières.

1. ➟ Si $x = 1$, $\frac{x^n}{n^3} = \frac{1}{n^3} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, donc 1 n'est pas hors du disque de convergence de $\sum \frac{z^n}{n^3}$, d'où $\mathrm{R} \geqslant 1$.
   ➟ Si $x > 1$, $\frac{x^n}{n^3} = \frac{\mathrm{e}^{n\ln(x)}}{n^3} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty$ par croissances comparées, donc aucun $x > 1$ n'est dans le disque de convergence de $\sum \frac{z^n}{n^3}$, d'où $\mathrm{R} \leqslant 1$.
   ➟ En conclusion, $\mathrm{R} = 1$.
2. Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$,
$$(\sqrt{n})^n x^n = \mathrm{e}^{n\times\frac{1}{2}\ln(n)+n\ln(x)} = \mathrm{e}^{n\times\left(\frac{1}{2}\ln(n)+\ln(x)\right)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty$$
   donc $\mathrm{R} = 0$.
3. Soit $x \in]0 ; +\infty[$,
$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n\sqrt{n}} x^n &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n\sqrt{n}} x^n \\ &= \mathrm{e}^{-n\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+n\ln(x)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)+n\ln(x)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}(1+o(1))+n\ln(x)}\end{aligned}$$
   Dans l'exposant, on a une somme dans laquelle $n\ln(x)$ est le terme dominant tant que $\ln(x) \neq 0$, donc qui est dans ce cas équivalente à $n\ln(x)$. Ainsi cet exposant tend vers $+\infty$ si $x > 1$, et vers $-\infty$ si $x < 1$.
   Par conséquent en composant par l'exponentielle :
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n\sqrt{n}} x^n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$
   donc le premier cas entraîne que $]1 ; +\infty[$ est hors du disque de convergence, donc que $\mathrm{R} \leqslant 1$, et le second cas entraîne que $]0 ; 1[$ est dans le disque de convergence, donc que $1 \leqslant \mathrm{R}$. Par conséquent $\mathrm{R} = 1$.
4. ➟ Pour $z = 1$, $\sin(n)z^n = \sin(n)$ est le terme général d'une suite bornée, donc $1 \leqslant \mathrm{R}$;

- pour $z = 1$, $\sin(n)z^n = \sin(n)$ ne tend pas vers 0 (je le prouve ci-dessous) donc $R \leqslant 1$.
  Montrons par l'absurde que $\sin(n)$ ne tend pas vers 0 : supposons que $\sin(n)$ tend vers 0.
  Alors $\cos(2n) = 1 - 2\sin^2(n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1 - 2 \times 0^2 = 1$.
  Mais par conséquent
  $$\sin(2n+1) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$$
  $$\sin(2n+1) = \sin(2n)\cos(1) + \cos(2n)\sin(1) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \sin(1)$$
  donc par unicité de la limite $\sin(1) = 0$, ce qui est faux.

5. Pour tout $x > 0$,
$$\frac{2\operatorname{sh}(n)}{n(n+1)}x^n = \frac{\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}}{n(n+1)}x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^n}{n^2}x^n = \frac{1}{n^2}(x\mathrm{e})^n$$
$$\xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \begin{cases} +\infty \text{ \textit{(par croissances comparées)}} & \text{si } x > \frac{1}{\mathrm{e}}, \text{ donc } R \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \\ 0 & \text{si } x \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}, \text{ donc } R \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}. \end{cases}$$
d'où $R = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

6. Soit $x \in]0\,;+\infty[$, on utilise le critère de Camembert : on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = a_n x^n = \frac{(2n)!}{n!n^n}x^n$, alors $u_n > 0$, et
$$\begin{aligned}
\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)^{n+1}}x^{n+1} \times \frac{n!n^n}{(2n)!}x^{-n} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n x \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n^2}{n^2} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} x \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} 4\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} x \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} 4\mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}x \\
&\xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 4 \times \mathrm{e}^{-1}x \ \text{\textit{(car} } n\ln(1+\tfrac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \tfrac{1}{n} = 1\text{\textit{)}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

- si $4 \times \mathrm{e}^{-1}x > 1$, c'est-à-dire $x > \frac{\mathrm{e}}{4}$, alors grâce au critère de d'Alembert, $\sum u_n = \sum a_n x^n$ diverge, donc $\mathrm{R} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{4}$;
- si $4 \times \mathrm{e}^{-1}x < 1$, c'est-à-dire $x < \frac{\mathrm{e}}{4}$, $\sum u_n = \sum a_n x^n$ converge, donc $\mathrm{R} \geqslant \frac{\mathrm{e}}{4}$;
- ainsi le rayon de convergence est $\frac{\mathrm{e}}{4}$.

Une correction de l'exercice 15.2 *énoncé*

Tout entier n admet au moins un diviseur, car 1 divise tous les entiers, et au plus n diviseurs, donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ 1 \leqslant a_n \leqslant n,$$

d'où en particulier :

$$1 = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(a_n),$$
$$\text{et } a_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(n).$$

Ainsi par comparaison des rayons de convergence, le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est inférieur au rayon de convergence de $\sum z^n$, qui vaut 1, et supérieur au rayon de convergence de $\sum n z^n$, qui vaut aussi 1 *(par exemple grâce à la première dérivée de la série géométrique ; ou avec le critère de d'Alembert ; ou encore parce que $(n \times 1^n)$ n'est pas bornée mais $(nx^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 par croissances comparées pour $0 \leqslant x < 1$; ou autre méthode de votre choix)*.
Donc le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est 1.

Une correction de l'exercice 15.3 *énoncé*

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant d_n \leqslant 9$, donc en particulier $d_n 1^n$ est le terme général d'une suite bornée, ce qui prouve que $\mathrm{R}_d \geqslant 1$.
- Mais comme π est irrationnel, sa partie décimale est illimitée, et non périodique, donc d_n ne tend pas vers 0. En effet, si c'était le cas, à partir d'un certain rang, on aurait $|d_n| < \frac{1}{2}$, et comme d_n est un entier entre 0 et 9, la seule possibilité serait qu'à partir d'un certain rang, $d_n = 0$, ce qui est faux.

  Par conséquent, la suite de terme général $d_n 1^n$ ne tend pas vers 0, donc $1 \geqslant \mathrm{R}_d$.
- On peut donc conclure que $\mathrm{R}_d = 1$.

Plus généralement, il est un exercice classique de montrer que si une suite est à valeurs entières (c'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$), et si elle est convergente, alors elle est stationnaire, (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

Une correction de l'exercice 15.4 *énoncé*

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{A}_n}{n!} z^n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k}{n!} z^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n!} z^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} z^k \times \frac{z^{n-k} k!}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} z^k \times \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{(n-k)!k!}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} z^k \times \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{1}{\binom{n}{k}},
\end{aligned}$$

donc par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\mathrm{A}_n}{n!} z^n \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{a_k}{k!} z^k \times \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{1}{\binom{n}{k}} \right| \\
= \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k|}{k!} |z|^k \times \frac{|z|^{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{1}{\binom{n}{k}}.
\end{aligned}$$

Or pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $\binom{n}{k}$ est un entier strictement positif, donc supérieur ou égal à 1, d'où $0 < \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant 1$, et en multipliant par des réels positifs

$$\forall k \in [\![0\,;n]\!], \quad \frac{|a_k|}{k!} |z|^k \times \frac{|z|^{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant \frac{|a_k|}{k!} |z|^k \times \frac{|z|^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Enfin en additionnant pour k de 0 à n :

$$\left| \frac{\mathrm{A}_n}{n!} z^n \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k|}{k!} |z|^k \times \frac{|z|^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \mathrm{R}_a$, alors par définition du rayon de convergence, la suite $\left(\frac{a_k}{k!} z^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc il existe un réel M tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_k}{k!} z^k\right| = \frac{|a_k|}{k!} |z|^k \leqslant \mathrm{M},$$

puis comme au-dessus :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{A}_n}{n!} z^n\right| \leqslant \mathrm{M} \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^{n-k}}{(n-k)!} &= \mathrm{M} \sum_{p=0}^{n} \frac{|z|^p}{p!} \quad \textit{(en posant } p = n-k\textit{)} \\ &\leqslant \mathrm{M}\,\mathrm{e}^{|z|} \quad \textit{(qui est indépendant de } n\textit{)}\end{aligned}$$

donc la suite $\left(\frac{\mathrm{A}_n}{n!} z^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, ce qui prouve que $|z| \leqslant \mathrm{R}_\mathrm{A}$.
Par conséquent, $\mathrm{R}_\mathrm{A} \geqslant \mathrm{R}_a$.

(ii) Réciproquement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n!} x^n &= \frac{\mathrm{A}_n - \mathrm{A}_{n-1}}{n!} \times x^n \\ &= \left(\frac{\mathrm{A}_n}{n!} - \frac{\mathrm{A}_{n-1}}{(n-1)!} \times \frac{1}{n}\right) x^n \\ &= \frac{\mathrm{A}_n}{n!} x^n - \frac{\mathrm{A}_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} \times \frac{x}{n}\end{aligned}$$

donc si $|x| < \mathrm{R}_\mathrm{A}$, alors

$$\frac{\mathrm{A}_n}{n!} x^n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$$

donc aussi

$$\frac{\mathrm{A}_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$$

et a fortiori

$$\frac{\mathrm{A}_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} \times \frac{x}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0,$$

donc finalement

$$\frac{a_n}{n!} x^n = \frac{\mathrm{A}_n}{n!} x^n - \frac{\mathrm{A}_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} \times \frac{x}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0, \text{donc } |x| \leqslant \mathrm{R}_a.$$

On en déduit que $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_\mathrm{A}$.

(iii) On peut donc conclure que $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_\mathrm{A}$.

Une correction de l'exercice 15.5

énoncé

1. Supposons que $x > \frac{1}{\mathrm{R}}$.

   Alors $0 < \frac{1}{x} < \mathrm{R}$, donc $a_n \left(\frac{1}{x}\right)^n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, d'où $\left|\frac{1}{a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n}\right| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty$.

   Mais

   $$\left|\frac{1}{a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n}\right| = \left|\frac{1}{a_n}x^n\right|$$

   donc $\left|\frac{1}{a_n}x^n\right| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty$, et a fortiori la suite de terme général $\frac{1}{a_n}x^n$ n'est pas bornée.
   On en déduit que $\mathrm{R}' \leqslant \frac{1}{\mathrm{R}}$.
2. Si $\mathrm{R} = +\infty$, alors pour tout $x > 0$, avec le même raisonnement que dans la question précédente, $\left|\frac{1}{a_n}x^n\right| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty$, donc $\mathrm{R}' = 0$.
3. La suite (a_n) est définie par

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{2n} & = 1 \\ a_{2n+1} & = \frac{1}{2^{2n+1}}. \end{cases}$$

   Ainsi,
   - $a_n \times 1^n = a_n$ ne tend pas vers 0, car $a_{2n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1$, d'où $\mathrm{R} \leqslant 1$,
   - mais $(a_n \times 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $\mathrm{R} \geqslant 1$.
   - On en déduit que $\mathrm{R} = 1$.

   D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\frac{1}{a_n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{a_n 2^n} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

   donc pour les mêmes raisons, $\mathrm{R}' = \frac{1}{2}$.
   Donc cette inégalité peut être stricte.
4. Il suffit de prendre $a_n = n!$.

Une correction de l'exercice 15.6 — énoncé

- Soit $x \in]0\ ;\ R_a R_b[$.
  Alors $\frac{x}{R_b} < R_a$, donc en prenant $\alpha \in \left]\frac{x}{R_b}\ ;\ R_a\right[$, on a $\beta = \frac{x}{\alpha} \in \left]\frac{x}{R_a}\ ;\ R_b\right[$.
  Par conséquent, $0 < \alpha < R_a$ et $0 < \beta < R_b$, donc

$$|a_n \alpha^n| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0, \text{ et } |b_n \beta^n| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

  Ainsi, comme $x = \alpha\beta$,

$$|a_n b_n x^n| = |a_n \alpha^n| \times |b_n \beta^n| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0,$$

  d'où $R \geqslant R_a R_b$.
- Les séries entières $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n+1}$ ont pour rayon de convergence 1, et la série des produits $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n x^n$ est nulle, donc de rayon de convergence infini.
- Il y a égalité des rayons de convergence pour les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constantes égales à 1.

Une correction de l'exercice 15.7 — énoncé

- Soit $r \in]0, R[$.
  Par définition du rayon de convergence, la série $\sum a_n r^n$ converge absolument, et même pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, $\left|re^{i\theta}\right| = r < R$ donc la série $\sum a_n \left(re^{i\theta}\right)^n$ converge absolument, d'où l'existence de $S(re^{i\theta})$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Pour tout $\theta \in [0,2\pi]$,

$$\forall \theta \in [0,2\pi], \quad \frac{S\left(re^{i\theta}\right)}{\left(re^{i\theta}\right)^n} = \frac{1}{\left(re^{i\theta}\right)^n} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left(re^{i\theta}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left(re^{i\theta}\right)^{k-n}.$$

  Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $u_k : \theta \mapsto a_k \left(re^{i\theta}\right)^{k-n}$. Ces fonctions sont continues sur $[0,2\pi]$, et

$$\|u_k\|_\infty^{[0,2\pi]} = \frac{1}{r^n} |a_k| r^k = \underset{n \to +\infty}{O} \left(|a_k| r^k\right)$$

  or $0 < r < R$, donc $\sum |a_k| r^k$ converge, et par domination, la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement, d'où uniformément, sur $[0,2\pi]$.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions :

$$\int_0^{2\pi} \frac{S\left(re^{i\theta}\right)}{\left(re^{i\theta}\right)^n} d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\theta) d\theta$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_k(\theta) d\theta$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^{k-n} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta.$$

Or

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta = \begin{cases} \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi, \text{ si } k = n, \\ \left[\dfrac{e^{i(k-n)\theta}}{i(k-n)}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

Donc un seul terme est non nul dans la somme, et on obtient l'égalité :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{S\left(re^{i\theta}\right)}{\left(re^{i\theta}\right)^n} d\theta = \frac{1}{2\pi} a_n r^{n-n} 2\pi = a_n \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 15.8 *énoncé*

1. Soit R le rayon de convergence de cette série.
   - Si $0 < x < 1$, alors

     $$(n^3 - n^2 + 1)x^n = (n^3 - n^2 + 1)e^{n\ln(x)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0 \ \textit{(car } \ln(x) > 0\textit{)}$$

     donc $R \geqslant 1$;
   - Pour $x = 1$,

     $$(n^3 - n^2 + 1)x^n = (n^3 - n^2 + 1) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty$$

     donc $R \leqslant 1$;
   - ainsi $R = 1$.

Le critère de d'Alembert aurait aussi très bien marché ici, car

$$\left|\frac{((n+1)^3-(n+1)^2+1)x^{n+1}}{(n^3-n^2+1)x^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|.$$

➟ Soit $x \in]-1\ ;\ 1[$,

On connaît les dérivées successives de la série géométrique, qui donnent des séries entières dont les coefficients sont de la forme $\frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\cdots$.
Donc lorsque des coefficients sont sous forme polynomiale en n, il est d'usage pour se faciliter la tâche de les écrire comme combinaison linéaire des $n(n-1)(n-2)\cdots$.
Ici, n^3-n^2+1 est de degré 3, donc on l'écrit

$$n^3-n^2+1 = an(n-1)(n-2)+bn(n-1)+cn+d$$

et on calcule facilement les coefficients en prenant successivement $n=0$, puis $n=1$, puis $n=2$, et on se débrouille pour finir le taf.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(n^3-n^2+1)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[n(n-1)(n-2)+2n(n-1)+1\right]x^n\\
&= x^3\times\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)(n-2)x^{n-3}+2x^2\times\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}+\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\\
&\text{(on reconnaît les dérivées de la série géométrique)}\\
&= x^3\times\frac{6}{(1-x)^4}+2x^2\times\frac{2}{(1-x)^3}+\frac{1}{1-x}\\
&= \frac{x^3+7x^2-3x+1}{(1-x)^4}.\end{aligned}$$

2. Pour tout réel x,

$$\left|\frac{\frac{(n+1)^3-2(n+1)+1}{(n+1)!}x^{n+1}}{\frac{n^3-2n+1}{n!}x^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}|x| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0,$$

donc le rayon de convergence est $+\infty$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3-2n+1}{n!}x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)-n+1}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^n+3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(n-3)!}x^n+3\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n \\ &= x^3\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n+3x^2\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n-x\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n \\ &= (x^3+3x^2-x+1)\mathrm{e}^x,\end{aligned}$$

donc en particulier le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$.

3. On étudie d'abord la série entière $\sum \frac{n}{(n+1)}x^n$, puis on remplacera x par $\frac{1}{3}$.
   - La suite de terme général $\frac{n}{(n+1)}1^n = \frac{n}{(n+1)}$ converge vers 1, donc elle est bornée, d'où $\mathrm{R}\geqslant 1$.
     Mais cette suite ne tend pas vers 0 donc $\mathrm{R}\leqslant 1$.
     Ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n}{(n+1)}x^n$ est 1, ce qui prouve en particulier la convergence de la série de départ car $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$.

> *Ici aussi, le critère de d'Alembert peut faire l'affaire, car* $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|$.

➟ Pour tout $x \in]-1\,;\,1[$, avec $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)} x^n &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)} x^{n+1} \\
&= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} n \int_0^x t^n \,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n t^n \right) \mathrm{d}\,t \quad \textit{(par intégration terme à terme sur } [0\,;\,x] \textit{ ou } [x\,;\,0] \textit{ de la série entière } \textstyle\sum n t^n \textit{ de rayon de convergence 1)} \\
&= \frac{1}{x} \int_0^x \left(t \sum_{n=0}^{+\infty} n t^{n-1} \right) \mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{x} \int_0^x \left(t \times \frac{1}{(1-t)^2} \right) \mathrm{d}\,t \quad \textit{(on a reconnu la dérivée de la série géométrique)} \\
&= \frac{1}{x} \int_0^x \left(\frac{t}{(1-t)^2} \right) \mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{x} \int_0^x \left(\frac{1-(1-t)}{(1-t)^2} \right) \mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{x} \int_0^x \left(\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t} \right) \mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{x} \left[\frac{1}{(1-t)} + \ln(1-t) \right]_0^x \\
&= \frac{1}{x} \left[\frac{1}{(1-x)} + \ln(1-x) - 1 \right] = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}.
\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)3^n} = \frac{3}{2} + 3\ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

4. Pour $x = 1$, $\frac{x^n}{n(2n+1)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$ donc le rayon de convergence R de la série vérifie $\mathrm{R} \geqslant 1$. Mais par croissances comparées, si $x > 1$, alors $\frac{x^n}{n(2n+1)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty$, donc $\mathrm{R} \leqslant 1$. Ainsi $\mathrm{R} = 1$.
Pour tout x tel que $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} \quad \textit{(grâce à la première question).}$$

Or on sait que pour tout $t \in \left]-1\,;\,1\right[$,

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^p}{p} = -\ln(1-t) \text{ et } \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \frac{t^p}{p} = \ln(1+t)$$

donc

$$\begin{aligned}
\ln(1+t) - \ln(1-t) &= \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \frac{t^p}{p} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^p}{p} \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty} \left((-1)^{p+1} + 1\right) \frac{t^p}{p} \\
&= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \quad \textit{(car } \left((-1)^{p+1}+1\right) = 0 \textit{ si } p \textit{ est pair, et } \left((-1)^{p+1}+1\right) = 2 \textit{ si } p \textit{ est impair).}
\end{aligned}$$

Ainsi, si $x \in \left]0\,;\,1\right[$,

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} &= 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} - 1\right) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n}}{2n+1} - 2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}} \times 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}}{2n+1} - 2 = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) - 2,
\end{aligned}$$

et si $x \in \left]-1\,;\,0\right[$,

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\sqrt{|x|}^2\right)^n}{2n+1} - 2 = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(\sqrt{|x|}\right)^{2n}}{2n+1} - 2 \\
&= \frac{2}{\sqrt{|x|}} \arctan\left(\sqrt{|x|}\right) - 2.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(2n+1)} = \begin{cases} 2 - \ln(1-x) - \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right), & \text{si } x \in \left]0\,;\,1\right[, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ 2 - \ln(1-x) - \frac{2}{\sqrt{|x|}} \arctan\left(\sqrt{|x|}\right), & \text{si } x \in \left]-1\,;\,0\right[. \end{cases}$$

5. Ici encore avec d'Alembert, le rayon de convergence est $+\infty$.
   Puis comme
$$x=\begin{cases}\left(\sqrt{x}\right)^2 & \text{si } x\geqslant 0,\\ -\left(\sqrt{|x|}\right)^2 & \text{si } x\leqslant 0,\end{cases}$$
   on a
$$x^n=\begin{cases}\sqrt{x}\times\left(\sqrt{x}\right)^{2n-1} & \text{si } x\geqslant 0,\\ (-1)^n\sqrt{|x|}\times\left(\sqrt{|x|}\right)^{2n-1} & \text{si } x\leqslant 0.\end{cases}$$
   d'où
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n-1)!}=\begin{cases}\sqrt{x}\,\mathrm{sh}(\sqrt{x}), & \text{si } x\geqslant 0,\\ -\sqrt{|x|}\sin(\sqrt{|x|}), & \text{si } x<0,\end{cases}$$

6. Pour les mêmes raisons, le rayon de convergence de $\sum\frac{x^{2n}}{(n+1)(2n)!}$ est $+\infty$.
   Notons pour tout réel x, $\mathrm{S}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(n+1)(2n)!}$.
   Alors
$$x^2\mathrm{S}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)(2n)!},$$
   donc, comme on peut dériver terme à terme les fonctions développables en série entière,
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(x^2\mathrm{S}(x))}{\mathrm{d}x}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2(n+1)x^{2(n+1)-1}}{(n+1)(2n)!}\\&=2x\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\\&=2x\times\mathrm{ch}(x).\end{aligned}$$
   D'où par le théorème fondamental de l'analyse, largement licite ici puisque la fonction $f:x\mapsto x^2\mathrm{S}(x)$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ \ f(x)=f(0)+\int_0^x 2t\ \mathrm{ch}(t)\mathrm{d}t&\\ =\Big[2t\,\mathrm{sh}(t)\Big]_0^x-\int_0^x 2\ \mathrm{sh}(t)\mathrm{d}t&\quad \textit{(brave intégration par parties de PCSI)}\\ =2x\,\mathrm{sh}(x)-2\Big[\mathrm{ch}(t)\Big]_0^x=2x\,\mathrm{sh}(x)-2\,(\mathrm{ch}(x)-1).&\end{aligned}$$

Ainsi pour tout réel x non-nul,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)(2n)!} = \mathrm{S}(x) = \frac{1}{x^2} f(x) = 2\,\frac{x\,\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) + 1}{x^2}.$$

Une correction de l'exercice 15.9

énoncé

Comme $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \times 1$, on reconnaît que la suite de terme général H_n est le produit de Cauchy des suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.

La suite de terme général $\frac{1}{n}$ débute au rang $n = 1$, par souci de définition, mais on fait démarrer l'autre suite au rang $n = 0$!
En effet,

- *le produit de Cauchy de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ est le produit de Cauchy des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par*

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad \text{et} \quad b_n = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

ce qui donne la suite de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a_k \times b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \mathrm{H}_n\,;$$

- *tandis que le produit de Cauchy de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (les deux commençant au rang $n = 1$) est le produit de Cauchy des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par*

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad \text{et} \quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

qui donne la suite de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} a_k \times b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \neq \mathrm{H}_n.$$

$\sum \frac{1}{n} x^n$ et $\sum x^n$, or ces deux ont pour rayon de convergence 1, donc $\sum \mathrm{H}_n x^n$ a un rayon de convergence R supérieur ou égal à 1.

Mais pour $x = 1$, $\mathrm{H}_n 1^n = \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$ par divergence de la série harmo-

nique, donc $\mathrm{R} \leqslant 1$.
Ainsi $\mathrm{R} = 1$, et pour tout $x \in]-1\ ;\ 1[$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{H}_n x^n &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \\ &= -\ln(1-x) \times \frac{1}{1-x} = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 15.10

énoncé

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+2)2^n} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 15.11

énoncé

Pour tout réel x,

$$\frac{\cos(na)}{n!\sin^n(a)} x^n = \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\frac{\mathrm{e}^{ina}}{n!\sin^n(a)} x^n\right) = \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\frac{1}{n!}\left(\frac{x\mathrm{e}^{ia}}{\sin(a)}\right)^n\right).$$

et de même

$$\frac{\sin(na)}{n!\sin^n(a)} x^n = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{n!}\left(\frac{x\mathrm{e}^{ia}}{\sin(a)}\right)^n\right).$$

Or on sait que la série de terme général $\frac{1}{n!}\left(\frac{x\mathrm{e}^{ia}}{\sin(a)}\right)^n$ est une série exponentielle convergente dont la somme vaut

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x\mathrm{e}^{ia}}{\sin(a)}\right)^n &= \mathrm{e}^{\frac{x\mathrm{e}^{ia}}{\sin(a)}} = \mathrm{e}^{\frac{x\cos(a)}{\sin(a)} + i\frac{x\sin(a)}{\sin(a)}} \\ &= \mathrm{e}^{x\,\mathrm{cotan}(a) + ix} \quad \textit{(rappelons que } \mathrm{cotan} = \tfrac{\cos}{\sin}\textit{)} \\ &= \mathrm{e}^{x\,\mathrm{cotan}(a)} \times \mathrm{e}^{ix} \\ &= \mathrm{e}^{x\,\mathrm{cotan}(a)} \times (\cos(x) + i\sin(x))\end{aligned}$$

donc les séries de termes généraux respectifs $\frac{\cos(na)}{n!\sin^n(a)} x^n$ et $\frac{\sin(na)}{n!\sin^n(a)} x^n$ sont convergentes, et ont pour sommes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(na)}{n!\sin^n(a)} x^n = e^{x\cot(a)} \times \cos(x),$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n!\sin^n(a)} x^n = e^{x\cot(a)} \times \sin(x).$$

La convergence pour tout réel x prouve en passant que leur rayon de convergence est $+\infty$.

Une correction de l'exercice 15.12

énoncé

(1). Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{1}{3n+2} x^n$.

Pour $x = 1$, la suite de terme général $\frac{1}{3n+2} x^n$

- tend vers 0, donc $R \geqslant 1$;
- n'est pas sommable, par équivalence à la suite de terme général $\frac{1}{3} \times \frac{1}{n}$ qui ne l'est pas non plus, donc $R \leqslant 1$.

Ainsi $R = 1$.

(2). Soit $x \in]-1\ ;\ 1[$, notons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+2} x^n$.

Pour tout $u \in]-1\ ;\ 1[$, on va d'abord calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+2} u^{3n+2}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+2} u^{3n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^u t^{3n+1} \mathrm{d}t.$$

La série entière $\sum t^{3n+1}$ a pour rayon de convergence 1 *(je vous laisse le prouver !)*, donc les bornes 0 et u de l'intégrale sont bien dans son intervalle de convergence, ce qui justifie l'interversion de la somme infinie et de l'intégrale suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+2} u^{3n+2} = \int_0^u \sum_{n=0}^{+\infty} t^{3n+1} \mathrm{d}t = \int_0^u t \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(t^3\right)^n \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^u t \times \frac{1}{1-t^3} \mathrm{d}t = \int_0^u \frac{t}{1-t^3} \mathrm{d}t.$$

(3). Ici, comme $1 - t^3 = -(t-1)(t^2+t+1) = -(t-1)(t-j)(t-\bar{j})$, il faut avoir l'idée, ou sinon c'est l'examinateur qui la soufflera, de décomposer $\frac{t}{1-t^3}$ sous la forme

$$\frac{t}{1-t^3} = \frac{a}{t-1} + \frac{b\,t+c}{t^2+t+1}.$$

Pour cela, plusieurs moyens sont bons, comme

- tout développer à droite et identifier :

$$\frac{-t}{t^3-1} = \frac{(a+b)t^2+(a-b+c)t+(a-c)}{t^3-1}$$
$$\Leftarrow \begin{cases} a+b & =0 \\ a-b+c & =-1 \\ a-c & =0 \end{cases} \iff a=-b=-\frac{1}{3}=c.$$

- remplacer t par trois valeurs, et obtenir de nouveau un système :

$$\text{pour } t=0,\ \ -a+c=0,$$
$$\text{pour } t=-1,\ \ \textit{etc.}$$

- multiplier gauche et droite successivement par $t-1$, et prendre la limite en 1 :

$$(t-1)\times\frac{t}{1-t^3} = \begin{cases} \frac{-t}{t^2+t+1} & \xrightarrow[t\longrightarrow 1]{} -\frac{1}{3} \\ a+(t-1)\times\left(\frac{b\,t+c}{t^2+t+1}\right) & \xrightarrow[t\longrightarrow 1]{} a \end{cases}$$

  donc $a=-\frac{1}{3}$.
  Pour b et c, on se débrouille ensuite avec $t=0$ et $t=-1$...

Bref, on obtient

$$\forall t\in\,]-1\,;\,1[,\ \ \frac{t}{1-t^3} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t-1}{t^2+t+1}\right).$$

Enfin, comme on sait *(avec les bonnes conditions sur f, bien sûr)* qu'une primitive de $\frac{f'}{f}$ est $\ln\circ f$, et qu'une primitive de $\frac{f}{1+f^2}$ est $\arctan\circ f$, on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{t-1}{t^2+t+1} &= \frac{\frac{1}{2}(2t+1)-\frac{3}{2}}{t^2+t+1} \quad \textit{(pour faire apparaître la dérivée de } t\mapsto t^2+t+1\textit{)}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{2t+1}{t^2+t+1}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{t^2+t+1}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{2t+1}{t^2+t+1}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{2t+1}{t^2+t+1}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{2t+1}{t^2+t+1}-\sqrt{3}\times\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, toujours pour tout $u\in\,]-1\,;\,1[$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3n+2}u^{3n+2} &= \int_0^u \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^u \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{2}\times\frac{2t+1}{t^2+t+1}-\sqrt{3}\times\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{3}\left[-\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln\left|t^2+t+1\right|-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^u\\
&= \frac{1}{3}\left(-\ln(1-u)+\frac{1}{2}\ln\left(u^2+u+1\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left.-\sqrt{3}\left(\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u+\frac{1}{2}\right)\right)-\frac{\pi}{6}\right)\right).
\end{aligned}$$

(4). Et donc, pour finir dans la joie et la beauté, il faut noter que pour tout réel α qui n'est pas un entier positif, $x^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}$ est a priori défini seulement pour $x>0$, donc pour pour tout réel x non nul dans $]-1\,;\,1[$,

$$x=\begin{cases}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0,\\ \left(-|x|^{\frac{1}{3}}\right)^3 & \text{si } x<0.\end{cases}$$

Ainsi, si $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+2} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+2} \left(\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+2} \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{3n} \\
&= \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+2} \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{3n+2} \\
&= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \left(-\ln\left(1 - x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1\right)\right. \\
&\qquad \left. - \sqrt{3}\left(\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{6}\right)\right),
\end{aligned}$$

et si $x < 0$, de la même façon

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+2} x^n = \frac{1}{3\,|x|^{\frac{2}{3}}} &\left(-\ln\left(1 + |x|^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(|x|^{\frac{2}{3}} - |x|^{\frac{1}{3}} + 1\right)\right. \\
&\left. - \sqrt{3}\left(\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-|x|^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{6}\right)\right).
\end{aligned}$$

sans oublier que pour $x = 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+2} x^n = \frac{1}{2}.$$

Tout ceci nous plongeant évidemment dans un état intense d'enthousiasme.

Une correction de l'exercice 15.13 *énoncé*

De manière générale, il est plus facile de faire des combinaisons linéaires de sommes de séries que des produits, car pour ces derniers il faut utiliser le produit de Cauchy qui n'est pas un outil aisé. C'est pourquoi la linéarisation, dont le couteau suisse est la formule d'Euler, va nous être utile dès que sont utilisées des fonctions trigonométriques.

➟ Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
\sin^2(x)\cos(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 \times \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\\
&= -\frac{1}{8}\left(e^{i2x}-2+e^{-i2x}\right)\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\\
&= -\frac{1}{8}\left(e^{i3x}-e^{ix}-e^{-ix}+e^{-i3x}\right)\\
&= -\frac{1}{8}\left(2\cos(3x)-2\cos(x)\right) = -\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{1}{4}\cos(x)\\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(3x)^{2n}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1-9^n}{4\times(2n)!}x^{2n}
\end{aligned}$$

➟ Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
\cos(x)e^x &= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(e^{ix}\times e^x\right)\\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(e^{(1+i)x}\right)\\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}[(1+i)x]^n\right)\\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}[\sqrt{2}e^{i\pi/4}]^n x^n\right)\\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sqrt{2}^n e^{in\pi/4}x^n\right)\\
&= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sqrt{2}^n\left(\cos(n\frac{\pi}{4})+i\sin(n\frac{\pi}{4})\right)x^n\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sqrt{2}^n\cos(n\frac{\pi}{4})x^n.
\end{aligned}$$

➟ Pour tout réel $x\neq 1$, on sait que $\sum\limits_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, donc en particulier, $1+x+x^2=\frac{1-x^3}{1-x}$.

Donc pour tout réel $x \neq 1$,

$$\ln(x^2+x+1) = \ln\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right),$$

puis pour $x \in]-1\ ;\ 1[$, $1-x^3>0$ et $1-x>0$, donc

$$\begin{aligned}
\ln(x^2+x+1) &= \ln(1-x^3) - \ln(1-x) \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(x^3)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n \quad \textit{(avec le développement en série entière de } \ln(1-\square)\textit{)} \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^{3n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec } a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{si } n \text{ n'est pas multiple de } 3, \\ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n/3} = -\dfrac{2}{n}, & \text{si } n \text{ est un multiple de } 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme on ne peut décidément pas se satisfaire de cette expression de a_n, car séparer des cas est toujours une forme de défaite, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{cases} 1 & \textit{si } n = 3k, \\ -\dfrac{1}{2} & \textit{si } n = 3k+1, \\ -\dfrac{1}{2} & \textit{si } n = 3k+2. \end{cases}$$

donc

$$\frac{1}{3}\left(2\cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right)+1\right) = \begin{cases} 1 & \textit{si } n = 3k, \\ 0 & \textit{si } n = 3k+1 \textit{ ou } n = 3k+2. \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{3}\left(2\cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right)+1\right)\frac{1}{n/3} \\
&= -\frac{2}{n}\cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \left]-1\,;\,1\right[$,

$$\ln\left(x^2+x+1\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}\cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right)x^n.$$

Une correction de l'exercice 15.14 *énoncé*

(1). Pour tout réel $x \in \left]-1\,;\,1\right[$, grâce à la première dérivée de la série géométrique de raison $-x$,

$$\begin{aligned}
\frac{3x+7}{(x+1)^2} = (3x+7)\times\frac{1}{(1-(-x))^2} &= (3x+7)\times\sum_{n=1}^{+\infty} n(-x)^{n-1}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 3n(-1)^{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 7n(-1)^{n-1}x^{n-1}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 3n(-1)^{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 7(n+1)(-1)^n x^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 3n(-1)^{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 7(n+1)(-1)^n x^n + 7\\
&= 7 + \sum_{n=1}^{+\infty} (3n-7(n+1))(-1)^{n-1}x^n\\
&= 7 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-4n-7)(-1)^{n-1}x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (4n+7)(-1)^n x^n.
\end{aligned}$$

(2). Notons R le rayon de convergence de la série entière ci-dessus.

- On vient de voir sa convergence pour tout $x \in \left]-1\,;\,1\right[$, donc on peut déjà d'affirmer que $\mathrm{R} \geqslant 1$.
- Mais pour $x=-1$,

$$(4n+7)(-1)^n x^n = 4n+7 \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \infty,$$

donc $\mathrm{R} \leqslant |-1| = 1$.

Par conséquent, $\mathrm{R}=1$.

(3). En conclusion, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$ admet en 0 le développement en série entière

$$\frac{3x+7}{(x+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(4n+7)(-1)^n x^n,$$

dont le rayon de convergence vaut 1.

Une correction de l'exercice 15.15 *énoncé*

1. Soit $x \in]-1\ ;\ 1[$.

➟ Comme $\left|x\cos^2(t)\right| \leqslant |x| < 1$, la série géométrique de raison $x\cos^2(t)$,

$$\frac{1}{1-x\cos^2(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(x\cos^2(t)\right)^n.$$

De plus :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \left(x\cos^2(t)\right)^n$ est continue sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$;
- pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, et tout $t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned}
|\mathrm{R}_\mathrm{N}(t)| &= \left|\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} f_n(t)\right| = \left|\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty}\left(x\cos^2(t)\right)^n\right| \\
&= \left|x\cos^2(t)\right|^{\mathrm{N}+1}\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x\cos^2(t)\right)^n\right| \\
&= \left|x\cos^2(t)\right|^{\mathrm{N}+1} \times \left|\frac{1}{1-x\cos^2(t)}\right| \leqslant \frac{|x|^{\mathrm{N}+1}}{1-x}
\end{aligned}$$

(car $t \mapsto 1-x\cos^2(t)$ est croissante et positive sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\left|\frac{1}{1-x\cos^2(t)}\right| \leqslant \frac{1}{1-x}$)

donc

$$\|\mathrm{R}_\mathrm{N}\|_\infty^{\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]} \leqslant \frac{|x|^{\mathrm{N}+1}}{1-x} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$$

donc $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

> *On aurait pu montrer encore plus facilement la convergence normale de $\sum f_n$ sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ car*
>
> $$\|f_n\|_\infty^{\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]} = \sup_{t\in\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]} \left|\left(x\cos^2(t)\right)^n\right| = |x|^n$$
>
> *et $(|x|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable car $|x|<1$.*

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions, qui justifie le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x\cos^2(t)\right)^n \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \left(x\cos^2(t)\right)^n \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t\right) x^n.
\end{aligned}$$

2. La fonction tan est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, et établit une bijection entre $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ et $]0\ ;\ +\infty[$, donc en posant $u=\tan(t)$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$, $\cos^2(t) = \frac{1}{1+\tan^2(t)} = \frac{1}{1+u^2}$, et

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{x}{1+u^2}} \times \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+1-x}\,\mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{1-x}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-x}}\right)\right]_{u\to 0}^{u\to+\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}} \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

3. Pour tout $x\in\,]-1\ ;\ 1[$, on connaît le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$, ainsi en remplaçant x par $-x$ qui est encore dans $]-1\ ;\ 1[$, et α par $-\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1+(-x))^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-x)^n,$$

or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\\
&=\left(-\frac{1}{2}-0\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)\\
&=\frac{(-1)(-1-2)\cdots(-1-2(n-1))}{2^n}\\
&=\frac{(-1)^n(1\times 3\times\cdots\times(2n-1))}{2^n}\\
&=\frac{(-1)^n}{2^n}\times 1\times 3\times\cdots\times(2n-1)\\
&=\frac{(-1)^n}{2^n}\times\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(2n-1)\times(2n)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\\
&=\frac{(-1)^n}{2^n}\times\frac{(2n)!}{2^n\times(n!)}\\
&=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\times\frac{(2n)!}{(n!)}=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\times(n!)\times\binom{2n}{n},
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n},$$

et par conséquent,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}(-x)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n.$$

On en déduit donc, grâce aux deux premières questions, que pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(t)\mathrm{d}\,t\right)x^n=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n,$$

donc par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients, ce qui donne :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(t)\mathrm{d}\,t=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}=\frac{1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}\pi.$$

Une correction de l'exercice 15.16 *énoncé*

(1). La matrice A, comme toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, autrement dit est semblable à une matrice triangulaire dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de A.
Autrement dit, en notant $\mathrm{Sp(A)} = \{\, \lambda_i \mid i \in [\![1\ ;\ n]\!] \,\}$ (les λ_i n'étant pas forcément deux à deux distinctes), il existe une matrice inversible $\mathrm{P} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\mathrm{A} = \mathrm{P} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}}_{=\mathrm{T}} \times \mathrm{P}^{-1}.$$

Ainsi par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^p = \mathrm{PT}^p\mathrm{P}^{-1}$.
Puis, aussi par récurrence (voir l'exercice 9.3) on a

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \ \mathrm{T}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}.$$

Comme les matrices semblables ont la même trace, on peut conclure que

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^p) = \mathrm{Tr}(\mathrm{T}^p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp(A)}} \lambda^p.$$

(2). Pour tout réel $\alpha > 0$, la suite $((\alpha x)^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, $|\alpha x| < 1$, donc si, et seulement si, $|x| < \frac{1}{\alpha}$, donc la série entière $\sum \alpha^n x^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{\alpha}$.
Ainsi, par somme de séries convergentes, la série de terme général $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^p)x^p = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^p x^p$ converge pour tout réel x tel que $|x| < \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$, par conséquent le rayon de convergence de $\sum \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^p)x^p$ est supérieur ou égal à $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$.

(3). Soit x un réel tel que $|x| < \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$, alors pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, la série $\sum \lambda_i^p x^p$ converge, donc

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^p)x^p = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p x^p = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \lambda_i^p x^p\right) \quad \textit{(par linéarité de la somme)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_i x} \quad \textit{(avec la série géométrique).}$$

(4). Pour donner cette somme en fonction de χ_A, il faut remarquer que

$$\chi_A = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n) = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i),$$

donc que

$$\chi_A' = \sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(X-\lambda_i),$$

d'où

$$\frac{\chi_A'}{\chi_A} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(X-\lambda_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{X-\lambda_j}.$$

C'est une expression qui n'est pas au programme de PC, mais qui est un classique : pour un polynôme P, l'expression $\frac{P'}{P}$ est appelée dérivée logarithmique.

Si P est scindé, et s'écrit $P = a_n\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ alors, avec une utilisation scandaleuse du logarithme, en dérivant

$$\ln(P) = \ln(a_n) + \sum_{i=1}^{n}\ln(X-a_i),$$

on obtient

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X-a_i},$$

ou encore, en notant $a_1,\dots,a_p$ les racines de P avec pour ordres de multiplicités respectifs $m_1,\dots,m_p$:

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{p}\frac{m_i}{X-a_i}.$$

Ainsi pour tout réel x non nul,

$$\begin{aligned}\frac{\chi_A'\left(\frac{1}{x}\right)}{\chi_A\left(\frac{1}{x}\right)} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{x} - \lambda_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{x}{1-\lambda_j x} \\ &= x \times \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_j x}.\end{aligned}$$

Ainsi pour tout x tel que $|x| < \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$,

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{Tr}(A^p)x^p = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\chi_A'\left(\frac{1}{x}\right)}{\chi_A\left(\frac{1}{x}\right)} & \text{si } x \neq 0, \\ \mathrm{Tr}(I_n) = n & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Une correction de l'exercice 15.17 *énoncé*

1. Pour tout réel x :
   - $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^2} = \frac{1}{(t+1/2)^2+3/4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty\,;\,x]$;
   - $\frac{1}{1+t+t^2} \underset{t\to-\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $]-\infty\,;\,-1]$, donc par équivalence $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^2}$ est aussi intégrable sur $]-\infty\,;\,-1]$, d'où sur $]-\infty\,;\,x]$. C.Q.F.D
2. Pour tout réel x,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t+t^2}\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \frac{1}{1+t+t^2}\mathrm{d}t = C + \int_{0}^{x} \frac{1}{1+t+t^2}\mathrm{d}t$$

   donc par le théorème fondamental de l'analyse, f est de classe $mathcal C^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$f : x \mapsto = \frac{1}{1+x+x^2}.$$

3. Pour tout réel $x \neq 1$,

$$1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x},$$

donc pour tout $x \in]-1\ ;\ 1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3}.$$

4. Pour tout $x \in]-1\ ;\ 1[$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{1-x^3} - x \times \frac{1}{1-x^3} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} - x \times \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec } a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n\%3 == 0, \\ -1 & \text{si } n\%3 == 1, \\ 0 & \text{si } n\%3 == 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

5. Pour tout $x \in]-1\ ;\ 1[$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{(par le théorème fondamental de l'analyse)} \\
&= f(0) + \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \,\mathrm{d}t \\
&= f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \textit{(par intégration terme à terme des séries entières prop9.14).}
\end{aligned}$$

On calcule le terme constant $f(0)$ par

$$\begin{aligned}
f(0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\frac{3}{4}+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

On conclut ainsi que :

$$f(x) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

$$\text{avec } a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n\%3 == 0, \\ -1 & \text{si } n\%3 == 1, \\ 0 & \text{si } n\%3 == 2. \end{cases}$$

Une correction de l'exercice 15.18

énoncé

La fonction $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est définie sur

$$B_o(O,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}.$$

Par unicité du développement en série entière, cette fonction est nulle si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il y a (au moins) un coefficient a_n non nul, et notons p le rang, ou l'indice, du premier coefficient non nul :

$$p = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}.$$

Alors $a_0 = \ldots = a_{p-1} = 0$, $a_p \neq 0$, et pour tout $z \in \mathrm{B}_o(\mathrm{O}, \mathrm{R})$,

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n z^n &= a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \cdots \\ &= z^p \sum_{n=p}^{+\infty} a_n z^{n-p} = z^p \left(a_p + a_{p+1} z + \cdots\right) \\ &= z^p \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p} z^n. \end{aligned}$$

Notons $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p} z^n$, alors pour tout $z \neq 0$, $g(z) = \frac{\mathrm{S}(z)}{z^p}$. De plus, par décalage d'indice, la série entière $\sum a_{n+p} z^n$ a, comme $\sum a_n z^n$, pour rayon de convergence R, donc sa somme g est définie et continue sur $\mathrm{B}_o(\mathrm{O}, \mathrm{R})$, et en particulier en 0. Ainsi

$$\lim_{z \to 0} g(z) = g(0).$$

En particulier, comme $\lim_{k \to +\infty} z_k = 0$, par composition des limites

$$g(z_k) \xrightarrow[k \longrightarrow +\infty]{} g(0).$$

Mais d'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $z_k \neq 0$, et $\mathrm{S}(z_k) = 0$, donc

$$g(z_k) = \frac{\mathrm{S}(z_k)}{z_k^p} = 0.$$

Par conséquent,

$$g(z_k) \xrightarrow[k \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

Ainsi, par unicité de la limite, $g(0) = 0$.
Malheureusement, on remarque que $g(0) = a_p$, donc par conséquent $a_p = 0$, ce qui contredit la définition de l'entier p, et achève notre raisonnement par l'absurde.

Une correction de l'exercice 15.19 *énoncé*

1. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$,

$$\begin{aligned}\frac{t}{2-t^2} &= \frac{t}{2} \times \frac{1}{1-\frac{t^2}{2}} \\ &= \frac{t}{2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t^2}{2}\right)^n \quad \textit{(si, et seulement si, } \left|\tfrac{t^2}{2}\right| < 1, \textit{ c'est-à-dire } |t| < \sqrt{2}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} t^{2n+1}.\end{aligned}$$

   Le rayon de convergence est $\sqrt{2}$.

2. Soit X une variable aléatoire discrète dont f est la série génératrice.
   - On sait que la série génératrice d'une variable aléatoire discrète a pour suite de coefficients $(\mathbb{P}(X = n))_{n\in\mathbb{N}}$, donc (par unicité de ces coefficients) $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = 2n+1) = \frac{1}{2^{n+1}},$$
$$\mathbb{P}(X = 2n) = 0.$$

> *Bien observer que les puissances de t dans le développement en série entière de $f(t)$ sont impaires, donc on est face à une série entière « lacunaire » où les coefficients des termes de puissances paires sont nuls.*

   Le rayon de convergence de la série génératrice de X est $\sqrt{2}$, et $\sqrt{>1}$. Or on sait que la somme d'un série entière est $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle de convergence, en l'ocurrence sur $\left]-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right[$.

Attention de ne pas confondre la fonction f et la fonction somme de la série génératrice ! Tout ce que l'on sait, c'est que ces deux fonctions coincident sur $\left]-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right[$, mais la seconde n'est même pas définie en dehors de cet intervalle, tandis que f est définie et même $\mathscr{C}^\infty$ sur les intervalles $\left]-\infty\,;\,-\sqrt{2}\right[$ et $\left]\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$.
C'est la dérivabilité en 1 de la somme de la série génératrice qui nous intéresse pour l'existence et le calcul de l'espérance de X, et non la dérivabilité en 1 de f.

Donc la somme de la série génératrice de X est a fortiori dérivable en 1, ce qui nous permet d'affirmer alors que X admet une espérance, et que celle-ci vaut

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}_\mathrm{X}'(1) = f'(1),$$

or f est $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition, avec pour tout $t \neq \pm\sqrt{2}$,

$$f'(t) = \frac{(2-t^2)-t(-2t)}{(2-t^2)^2} = \frac{2+t^2}{(2-t^2)^2},$$

donc

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \frac{3}{1^2} = 3.$$

3. L'ensemble des valeurs de Y est

$$\mathrm{Y}(\Omega) = \left\{ n + \frac{1}{2} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbb{N} + \frac{1}{2},$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Y} = n + \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = 2n+1) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Une correction de l'exercice 15.20

énoncé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la formule du binôme négatif (*qui donne* $\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$ *dans le*

cours) nous donne le développement en série entière demandé

$$\forall x \in \left]-1\,;\,1\right[,\quad \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n-1+k}{k} x^k.$$

2. (a) Le développement de la question précédente nous donne, au rang $n-1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = p^n \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n-1+k}{k} (1-p)^k = p^n \times \frac{1}{(1-(1-p))^n} = 1, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

   (b) La fonction génératrice de X, qui est bien une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$, est la somme de la série entière $\sum \mathbb{P}(X=k)\,x^k$ de terme général $\binom{n+k-1}{k} p^n \left((1-p)x\right)^k$.
   Or de nouveau avec la formule du binôme négatif, on sait que cette série converge si, et seulement si, $|(1-p)x| < 1$, donc si, et seulement si, $|x| < \frac{1}{1-p}$, donc cette série entière a pour rayon de convergence $\frac{1}{1-p}$, et pour tout $x \in \left]-\frac{1}{1-p}\,;\,\frac{1}{1-p}\right[$:

$$\begin{aligned} G_X(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} p^n \left((1-p)x\right)^k \\ &= p^n \times \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{(n-1)+k}{k} \left((1-p)x\right)^k \\ &= \frac{p^n}{(1-(1-p)x)^n}. \end{aligned}$$

   Ainsi, comme $\frac{1}{1-p} \geqslant 1$, le réel 1 est à l'intérieur de l'intervalle de convergence dans lequel la somme G_X est $\mathscr{C}^\infty$. Donc G_X est en particulier deux fois dérivable en 1, ce qui prouve que X admet une espérance et une variance qui valent $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$, et $\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2$.
   Or les dérivées de G_X sont

$$\begin{aligned} G_X' &: x \mapsto \frac{n(1-p)p^n}{(1-(1-p)x)^{n+1}}, \\ \text{et } G_X'' &: x \mapsto \frac{n(n+1)(1-p)^2 p^n}{(1-(1-p)x)^{n+2}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n(1-p)p^n}{(1-(1-p))^{n+1}} = \frac{n(1-p)}{p},$$

$$\text{et } \mathbb{V}(X) = \frac{n(n+1)(1-p)^2p^n}{(1-(1-p))^{n+2}} + \frac{n(1-p)}{p} - \left(\frac{n(1-p)}{p}\right)^2 = n\frac{1-p}{p^2}.$$