Exercices du chapitre 16. Espérances, variances, résultats asymptotiques

Exercice 16.1

Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ et $Y = X^2 + 1$.

1. Quelle est la probabilité que $2X < Y$?
2. Déterminer l'espérance de Y.

Exercice 16.2

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.
Calculer $E(X - \lambda)$ et $E(|X - \lambda|)$.

Exercice 16.3 – Maximum de deux variables suivant la loi géométrique

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$. Montrer que la variable $Z = \max(X,Y)$ est d'espérance finie, et calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 16.4 – Distance de lois géométriques indépendantes

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in \,]0\,;\,1[$.
On pose $q = 1 - p$ et $Y = |X_1 - X_2|$.

1. Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}(X_1 - X_2 = n) = \frac{pq^n}{1+q}$.
   En déduire la loi de Y.
3. Montrer que Y est d'espérance finie, et la calculer.
4. Montrer que $(X_1 - X_2)^2$ est d'espérance finie, et que $\mathbb{E}\left((X_1 - X_2)^2\right) = 2\,\mathbb{V}(X_1)$.
   En déduire que Y admet une variance et la calculer.

Exercice 16.5

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ de paramètre $p \in \,]0\,;\,1[$. Soit Y la variable aléatoire égale à $X/2$ si X est pair, à 0 sinon.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Justifier que Y admet une espérance que l'on calculera.

Exercice 16.6 – Le retour de Transfert

Une variable aléatoire X suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ ($p \in]0\ ;\ 1[$).

1. La variable $\frac{1}{X}$ est-elle d'espérance finie ? Si oui donner la valeur de cette espérance.
2. Même pour la variable $X(X-1)\cdots(X-r+1)$, où $r \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 16.7

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{P}(X = k) = a\binom{n+k}{k}p^k$.

1. Déterminer a en fonction de n.
2. Déterminer, si elles sont finies, l'espérance et la variance de X.
3. Retrouver ce résultat en calculant la somme de la série génératrice de X.

Exercice 16.8 – Oral CCINP

Soit $p \in]0\ ;\ 1[$, on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = p^2k(1-p)^{k-1}$.

1. Montrer que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité.
2. Soit X qui suit une telle loi, justifier que les variables $X-1$ et $(X-1)(X-2)$ sont d'espérances finies, et donner leurs valeurs.
3. En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 16.9 – Oral CCINP

Mme Contraire et M. Jaury participent à un jeu qui leur apporte un divertissement mesuré : ils choisissent aléatoirement un entier X dans $\mathbb{N}^*$, puis

- → si X est impair, Mme Contraire reçoît X Numens de M. Jaury,
- → si X est pair, ben c'est le contraire.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{a}{2^n}$, où $a \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la valeur de a.
2. Soit Y la variable aléatoire discrète qui a pour valeur le gain (positif ou négatif) de Mme Contraire après une partie. Donner la loi de Y et son espérance.
3. Que vaudrait cette espérance si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$?

Exercice 16.10

On lance une pièce de monnaie équilibrée et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers effectués jusqu'à avoir obtenu la séquence pile-face.

1. Vérifier que X est bien une variable aléatoire.
2. Justifier que X est d'espérance finie, et calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 16.11

Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2a$ boules blanches et a boules noires indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages avec remise d'une boule de l'urne, et on note X le nombre de tirages effectués lorsqu'on a obtenu pour la première fois deux boules noires lors de deux tirages consécutifs.

1. Montrer que la suite $(P(X \geqslant n))$ satisfait une relation de récurrence d'ordre 2. En déduire la loi de X.
2. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.

Problème 16.12 – Adapté de CC(IN)P PC 2017

Soit $p \in \,]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère un automate qui génère successivement les lettres C ou P jusqu'à obtenir une certaine séquence prédéfinie.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'automate génère la n-ième lettre à l'instant n de façon indépendante de toutes les générations précédentes, les lettres P et C ayant pour probabilités respectives p et q.

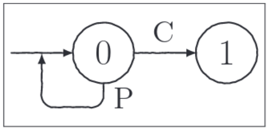
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

- P_n l'évènement « l'automate génère la lettre P à l'instant n »,
- et C_n l'évènement « l'automate génère la lettre C à l'instant n ».

Partie I - Étude d'un cas simple

Dans cette partie, on dit que l'automate est initialement au niveau 0, et qu'il passe du niveau 0 au niveau 1 dès qu'il génère la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors il reste au niveau 0.
L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 1.

On résume l'expérience par la figure ci-contre :



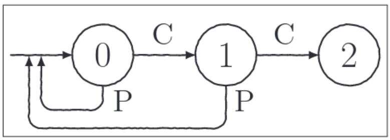
On note Y l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 1. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ telle que $\mathrm{Y}(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{G_Y}$ la série génératrice de Y et $\mathrm{R_Y}$ son rayon de convergence.

1. Reconnaître la loi de Y et préciser en particulier $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $\mathrm{R_Y} = \dfrac{1}{p}$ et que pour tout $t \in \left]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right[$, $\mathrm{G_Y}(t) = \dfrac{qt}{1-pt}$.
3. Montrer que $\mathrm{G_Y}$ est 2 fois dérivable en 1 et que $\mathrm{G}'_\mathrm{Y}(1) = \dfrac{1}{q}$ et $\mathrm{G}''_\mathrm{Y}(1) = \dfrac{2p}{q^2}$.
4. En déduire les valeurs de $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$ et de $\mathbb{V}(\mathrm{Y})$.

Partie II - Étude d'un cas intermédiaire

Dans cette partie, on suppose que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre C. De même, l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors qu'il est au niveau 0 ou 1, il retombe au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 2, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CC.

On résume l'expérience par la figure ci-contre :



On note Z l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 2. Ainsi Z est le temps d'attente de la séquence CC.
On admet que Z est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathrm{Z}(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{Z} = n)$. On note $\mathrm{G_Z}$ la série génératrice de Z et $\mathrm{R_Z}$ son rayon de convergence. On rappelle que $\mathrm{R_Z} \geqslant 1$.

5. Calculer p_1, p_2 et p_3.

6. Justifier que $(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2)$ est un système complet d'évènements.
7. En déduire que $p_n = pp_{n-1} + pqp_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 3$.
8. En déduire que pour tout $t \in [-1,1]$,
$$G_Z(t) = \frac{q^2t^2}{1-pt-pqt^2}.$$
9. Montrer que Z est d'espérance et de variance finie, puis que $\mathbb{E}(Z) = q^{-1} + q^{-2}$.
10. Vérifier que $\mathbb{E}(Z) \geqslant \mathbb{E}(Y) + 1$ où Y est la variable aléatoire définie dans la partie I.
Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Problème 16.13 – CCINP PSI - Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial $t = 0$ est $k = 0$.
À chaque instant $t \in \mathbb{N}^*$, elle se déplace aléatoirement de sa position $k \in \mathbb{Z}$ à la position $k+1$ ou $k-1$.
Soit $p \in]0,1[$. On définit une suite de variables aléatoires $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes et identiquement distribuées dont la loi est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} X_t(\Omega) = \{-1,1\}, \\ \mathbb{P}(X_t = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X_t = -1) = 1-p. \end{cases}$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{t=1}^{n} X_t$.
Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, on modélise le déplacement de la particule à l'instant t par la variable aléatoire X_t telle que $(X_t = 1)$ (*resp.* $(X_y = -1)$) est l'événement « la particule se déplace vers la droite (*resp.* la gauche) à l'instant t ».
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n modélise la position de la particule après n déplacements.

1. Montrer que pour tout $x \in]-1\,;1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}x^n$.

Probabilité de retour à l'origine

On pose $u_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire $\frac{X_t+1}{2}$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = \begin{cases} \binom{n}{n/2}\left(p(1-p)\right)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
4. Déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$ selon les valeurs de p et interpréter le résultat.

Partie III - Nombre de passages par l'origine

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note O_{2j} la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = 2j$, 0 sinon ; puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{j=0}^{n} O_{2j}$.

Dans cette partie, on souhaite déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que modélise la variable aléatoire T_n ?
6. Soit $j \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire O_{2j}.
   En déduire que $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j} \left(p(1-p)\right)^j$.
7. On suppose dans cette question que $p \neq \frac{1}{2}$.
   En utilisant le résultat de la question 1. calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$ et interpréter le résultat.
8. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$.
   Montrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$
   et en déduire $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Solutions

Une correction de l'exercice 16.1

énoncé

1. De $Y = X^2 + 1$ on déduit que $(2X < Y) = ((X-1)^2 > 0) = (X \neq 1)$, donc

$$P(2X < Y) = 1 - P(X = 1) = 1 - \lambda e^{-\lambda}.$$

.

2. Posons $u_n = (n^2+1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0,$$

donc le critère de d'Alembert permet d'affirmer que la suite de terme général $(n^2+1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ est sommable, donc par le théorème de transfert, que Y est d'espérance finie.

Ce même théorème nous donne aussi $\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$. Or pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}(n^2+1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} &= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{N}(n(n-1)+n+1)\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}\left(\sum_{n=0}^{N}\lambda^n\frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=0}^{N}\lambda^n\frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{N}\lambda^n\frac{1}{n!}\right) \\
&= e^{-\lambda}\left(\sum_{n=2}^{N}\lambda^n\frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{N}\lambda^n\frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{N}\lambda^n\frac{1}{n!}\right) \\
&= e^{-\lambda}\left(\sum_{n=0}^{N-2}\lambda^{n+2}\frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{N-1}\lambda^{n+1}\frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{N}\lambda^n\frac{1}{n!}\right) \\
&= e^{-\lambda}\left(\lambda^2\sum_{n=0}^{N-2}\frac{\lambda^n}{n!} + \lambda\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{n=0}^{N}\frac{\lambda^n}{n!}\right) \\
&\xrightarrow[N\longrightarrow+\infty]{} e^{-\lambda}\left(\lambda^2e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}\right) \\
&= \lambda^2 + \lambda + 1.
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 16.2 *énoncé*

Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X-\lambda) &= \mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(\lambda)\\ &= \mathbb{E}(X)-\lambda \quad \textit{(en considérant } \lambda \textit{ comme la variable certaine égale à } \lambda\textit{, qui a pour espérance } \lambda\textit{)}\\ &= 0 \quad \textit{(car } X\sim\mathscr{P}(\lambda) \textit{ donc } \mathbb{E}(X)=\lambda.\textit{)}\end{aligned}$$

Posons $u_n = |n-\lambda|\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc le critère de d'Alembert permet d'affirmer que la suite de terme général $(|n-\lambda|)\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ est sommable, donc par le théorème de transfert, que Y est d'espérance finie.
Ce même théorème nous donne aussi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X-\lambda|) &= \sum_{n=0}^{+\infty}|n-\lambda|\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{N}(\lambda-n)\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}}_{=S_1}+\underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty}(n-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}}_{=S_2} \quad \textit{(en notant N la partie entière de } \lambda\textit{).}\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}-S_1+S_2=\sum_{n=0}^{N}(n-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}+\sum_{n=N+1}^{+\infty}(n-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n-\lambda)\mathbb{P}(X=n)\\ &= \mathbb{E}(X-\lambda) \quad \textit{(avec}\\ &\qquad\qquad\qquad \textit{fert)}\\ &= 0\end{aligned}$$

d'où $S_1=S_2$.

De plus

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{n=0}^{N} (\lambda - n) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N} n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{N} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} - \sum_{n=1}^{N} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{N} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} - \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{N+1}}{N!}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E(|X-\lambda|) = 2S_1 = 2e^{-\lambda} \frac{\lambda^{N+1}}{N!} = 2e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\lfloor \lambda \rfloor + 1}}{\lfloor \lambda \rfloor !}.$$

Une correction de l'exercice 16.3 *énoncé*

Comme souvent avec le maximum et le minimum, on passe par les inégalités, autrement dit la fonction de répartition.

➟ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la réunion $(X \leqslant n) = \bigcup_{k=1}^{n} (X = k)$ est formée d'événements deux à deux disjoints, donc par σ-additivité, en notant $q = 1-p$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} &= p \times \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k \\
= p \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} &= 1 - q^n.
\end{aligned}$$

Comme $Z = \max(X, Y)$, on a $Z(\Omega) = X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(Z \leqslant n) = (X \leqslant n) \cap (Y \leqslant n)$. Donc comme X et Y sont indépendantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Z \leqslant n) = \mathbb{P}(X \leqslant n)\mathbb{P}(Y \leqslant n) = \mathbb{P}(X \leqslant n)^2 = (1-q^n)^2.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant n) = 1 - \mathbb{P}(Z \leqslant n-1) = 1 - (1-q^{n-1})^2.$$

Or

$$1 - (1-q^{n-1})^2 = 2q^{n-1} - q^{2(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2q^{n-1}$$

et comme $|q| < 1$, la suite de terme général $2q^{n-1}$ est sommable, donc par équivalence, la suite de terme général $\mathbb{P}(Z \geqslant n)$ l'est aussi, donc la série $\sum \mathbb{P}(Z \geqslant n)$ converge.
D'après le cours, on peut en déduire que Z est d'espérance finie égale à

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant n) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2q^{n-1} - q^{2(n-1)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 2q^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} q^{2(n-1)} \quad \textit{(ces deux sommes existent car } |q| < 1 \textit{ et a fortiori } \left|q^2\right| < 1\textit{)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} 2q^n - \sum_{n=1}^{+\infty} q^{2n} \\
&= 2 \times \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q^2} \\
&= \frac{2}{p} - \frac{1}{2p-p^2} = \frac{2(2-p)-1}{p(2-p)} = \frac{3-2p}{p(2-p)}.
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 16.4 *énoncé*

1. La variable Y est $|X_1 - X_2|$, donc

$$(Y = 0) = (X_1 = X_2) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X_1 = n) \cap (X_2 = n),$$

donc par σ-additivité puis indépendance,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n)\mathbb{P}(X_2 = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(pq^{n-1}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} p^2 q^{2(n-1)} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{2-p}.
\end{aligned}$$

2. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X_1 - X_2 = n) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (X_1 = n+k) \cap (X_2 = k),$$

puis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 - X_2 = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n+k)\mathbb{P}(X_2 = k) \\ &= p^2 q^n \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2(k-1)} = \frac{p^2 q^n}{1-q^2} = \frac{pq^n}{2-p} \\ &= \frac{pq^n}{1+q}.\end{aligned}$$

- L'ensemble des valeurs de Y est $Y(\Omega) = \mathbb{N}$,
- par la première question $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{p}{2-p}$ par le premier point,
- et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(Y = n) = (|X_1 - X_2| = n) = (X_1 - X_2 = n) \cup (X_2 - X_1 = n),$$

les deux événements de cette réunion sont disjoints, donc

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(X_1 - X_2 = n) + \mathbb{P}(X_2 - X_1 = n).$$

D'après le point précédent,

$$\mathbb{P}(X_1 - X_2 = n) = \frac{pq^n}{1+q},$$

et comme X_1 et X_2 ont des rôles interchangeables dans l'énoncé, $\mathbb{P}(X_2 - X_1 = n)$ a la même valeur, donc

$$\mathbb{P}(Y = n) = 2\frac{pq^n}{1+q}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n\mathbb{P}(Y = n) = \frac{2pq}{1+q} \times nq^{n-1},$$

et on sait que la suite de terme général nq^{n-1} est sommable, car c'est le terme général de la première dérivée de la série géométrique.

Donc Y admet une espérance qui vaut

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n) = \frac{2pq}{1+q}\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{2pq}{1+q} \times \frac{1}{(1-q)^2}$$
$$= \frac{2pq}{1+q} \times \frac{1}{p^2} = \frac{2q}{p(1+q)}.$$

4. On sait que X_1 et X_2 suivent des lois géométriques, et sont indépendantes, donc $\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2 = \mathrm{X}_1 + (-\mathrm{X}_2)$ admet une variance égale à

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_2) = \mathbb{V}(\mathrm{X}_1) + \mathbb{V}(-\mathrm{X}_2) = \mathbb{V}(\mathrm{X}_1) + \mathbb{V}(+\mathrm{X}_2) = 2\mathbb{V}(\mathrm{X}_1) = 2\frac{q}{p^2}.$$

Ainsi, grâce à la formule de Kœnig-Huygens, $(\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_2)^2$ est aussi d'espérance finie égale à

$$\mathbb{E}\left((\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_2)^2\right) = \mathbb{V}(\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_2) + \big(\underbrace{\mathbb{E}(\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_2)}_{=0}\big)^2 = 2\,\frac{q}{p^2}.$$

Comme $\mathrm{Y}^2 = |\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_2|^2 = (\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_2)^2$, on a prouvé que Y^2 est d'espérance finie, ce qui permet de conclure que Y admet une variance, qui est égale à

$$\mathbb{V}(\mathrm{Y}) = \mathbb{E}\left(\mathrm{Y}^2\right) - \mathbb{E}(\mathrm{Y})^2 = \mathbb{E}\left((\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_2)^2\right) - \left(\frac{2q}{p(1+q)}\right)^2$$
$$= 2\frac{q}{p^2} - \left(\frac{2q}{p(1+q)}\right)^2 = \frac{2q}{q(1+p)}.$$

Une correction de l'exercice 16.5

énoncé

1. J'estime évident que $\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$.
2. Parmi les valeurs de Y, la valeur 0 est singulière, on va la traiter séparément.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par définition de Y, on a $(\mathrm{Y}=n) = (\mathrm{X}=2n)$, donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}=n) = \mathbb{P}(\mathrm{X}=2n) = p(1-p)^{2n-1}.$$

   - En revanche $(\mathrm{Y}=0) =$ « X est impair » $= \bigcup_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{X}=2n+1)$.

Ici en général, l'élève Chaprot écrit l'égalité fallacieuse mais classique suivante :

$$\text{« X est impair »} = (X = 2n+1).$$

Quand le professeur lui demande « mais qui est ce n ? », il rajoute $n \in \mathbb{N}$ à droite de l'égalité incriminée :

$$\text{« X est impair »} = (X = 2n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Que donne tout cela égalité pour $n = 82$?
Pourquoi pas « X est impair »$= (X = 2n-1)$? Voire « X est impair »$= (X = 2k+17)$?
Pourquoi l'événement « X est impair » dont l'intitulé ne contient aucun paramètre, dépendrait-il d'un paramètre entier n ?

Donc par σ-additivité de la probabilité,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^{2n+1-1} = p \sum_{n=0}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^n \\ &= p \times \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}.\end{aligned}$$

3. La variable Y est d'espérance finie si, et seulement si, la suite de terme général $n \times \mathbb{P}(Y=n) = np(1-p)^{2n}$ *(on ne tient pas compte du premier terme $0 \times \mathbb{P}(Y=0)$)* est sommable, ce qui est le cas car par croissances comparées, sachant que $0 < (1-p)^2 < 1$,

$$np(1-p)^{2n-1} = p \times n \times e^{(2n-1)\ln(1-p)} \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \textit{(par croissances comparées car } 0 < 1-p < 1\textit{)}.$$

Cette espérance finie est donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \times p(1-p)^{2n-1} = p(1-p) \sum_{n=0}^{+\infty} n \times \left((1-p)^2\right)^{n-1} \\ &= p(1-p) \times \frac{1}{\left(1-(1-p)^2\right)^2} \quad \textit{(avec la première dérivée de la série géométrique de raison } (1-p)^2\textit{),} \\ &= \frac{1-p}{p(2-p)^2}.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 16.6 *énoncé*

1. Par le théorème de transfert, on peut affirmer que, si la suite $\left(\frac{1}{n}\mathbb{P}(X=n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, c'est-à-dire si la série $\sum \frac{1}{n}\mathbb{P}(X=n)$ est absolument convergente, alors $\frac{1}{X}$ admet une espérance qui est égale à la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{P}(X=n)$.
   Comme c'est une suite à termes positifs, $\left(\frac{1}{n}\mathbb{P}(X=n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum \frac{1}{n}\mathbb{P}(X=n)$ converge.
   Soit $N \in \mathbb{N}^*$,
   $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}(1-p)^{n-1}p &= \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}(1-p)^{n} \\ &\xrightarrow[N\longrightarrow+\infty]{} \frac{p}{1-p}\left(-\ln(1-(1-p))\right) \quad \text{(car on reconnaît un développement en série entière usuel)} \\ &= -\frac{p}{1-p}\ln(p),\end{aligned}$$
   donc $\frac{1}{X}$ admet une espérance qui vaut $\mathbb{E}(X) = -\frac{p}{1-p}\ln(p)$.
2. La variable X suit une loi géométrique, donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   Le théorème de transfert affirme que, si la suite $(f(n)\mathbb{P}(X=n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, c'est-à-dire si la série $\sum f(n)\mathbb{P}(X=n)$ est absolument convergente, alors $f(X)$ admet une espérance qui est égale à la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)\mathbb{P}(X=n)$.
   Ici
   $$f(n)\mathbb{P}(X=n) = n(n-1)\cdots(n-r+1)p(1-p)^{n-1}$$
   est strictement positif pour $n \geqslant r$, et
   $$\begin{aligned}\frac{f(n+1)\mathbb{P}(X=n+1)}{f(n)\mathbb{P}(X=n)} &= \frac{(n+1)n\cdots(n-r+2)p(1-p)^{n}}{n(n-1)\cdots(n-r+1)p(1-p)^{n-1}} \\ &\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 1-p < 1,\end{aligned}$$
   donc le critère de d'Alembert prouve la sommabilité de la suite.

On en déduit, toujours par le théorème de transfert, que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X(X-1)\cdots(X-r+1)\big) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1)p(1-p)^{n-1}\\ &= \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1)p(1-p)^{n-1}.\end{aligned}$$

Or on connaît la formule du binôme négatif, ou sinon par r dérivations successives terme à terme de la somme de la série géométrique sur son intervalle de convergence $]-1\,;\,1[$, on obtient

$$\forall x \in]-1\,;\,1[,\ \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1)x^{n-r} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(r)} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}},$$

d'où comme $0 < 1-p < 1$, on obtient pour $x = 1-p$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(X(X-1)\cdots(X-r+1)\right)\\ &\quad = p(1-p)^{r-1}\sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1)(1-p)^{n-r}\\ &\quad = p(1-p)^{r-1} \times \frac{r!}{p^{r+1}} = \frac{r!(1-p)^{r-1}}{p^r}.\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 16.7 *énoncé*

Un rappel sur la formule du binôme négatif : pour tout $n \in \mathbb{N}$, en dérivant n fois terme à terme la série géométrique, à l'intérieur de son intervalle de convergence $]-1 ; 1[$, on obtient pour tout $t \in]-1 ; 1[$,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} t^{k-n} = \frac{n!}{(1-t)^{n+1}}$$

qui donne la formule du binôme négatif

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} t^{k-n} = \frac{1}{(1-t)^{n+1}},$$

ou encore par décalage d'indice

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\binom{n+k}{n}}_{=\binom{n+k}{k}} t^k = \frac{1}{(1-t)^{n+1}}.$$

1. La famille $((X = k))_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc la somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$ vaut 1.
   Or d'après le préambule,
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = a \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} p^k = a \times \frac{1}{(1-p)^{n+1}}.$$
   Ainsi $a = (1-p)^{n+1}$.
2. ➟ On sait que X est d'espérance finie lorsque la suite de terme général $k\mathbb{P}(X = k)$ est sommable.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$k \times \mathbb{P}(X = k) = ap^k \times k\binom{n+k}{k}$$

Ici faisons un aparté au sujet des coefficients du binôme, et de leurs propriétés classiques :

- *en manipulant les factorielles, on a la formule du pion :*

$$\binom{b}{a} = \frac{b}{a}\binom{b-1}{a-1} = \frac{b(b-1)}{a(a-1)}\binom{b-2}{a-2} = \cdots$$

et ses corollaires :

$$\begin{aligned} a\binom{b}{a} &= b\binom{b-1}{a-1} \\ a(a-1)\binom{b}{a} &= b(b-1)\binom{b-2}{a-2} \\ a(a-1)\cdots(a-c+1)\binom{b}{a} &= b(b-1)\cdots(b-c+1)\binom{b-c}{a-c} \\ \textit{autrement dit } \binom{a}{c}\binom{b}{a} &= \binom{b}{c}\binom{b-c}{a-c} \end{aligned}$$

- *on peut obtenir de nombreuses variantes de ces formules en manipulant la symétrie $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$...*

Dans cet exercice, on doit additionner sur l'indice k des termes contenant $k\binom{n+k}{k}$, mais le k nous gêne, donc on bataille en s'inspirant des formules ci-dessus, pour écrire ce terme autrement.

Or pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} k\binom{n+k}{k} &= k \times \frac{(n+k)!}{k!n!} = \frac{(n+k)!}{(k-1)!n!} \\ &= (n+1)\frac{((n+1)+(k-1))!}{(k-1)!(n+1)!} = (n+1)\binom{n+k}{k-1}, \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} k \times \mathbb{P}(X = k) &= ap^k \times (n+1)\binom{n+k}{k-1} \\ &= ap \times (n+1)\binom{(n+1)+(k-1)}{k-1}p^{k-1}, \end{aligned}$$

et de nouveau grâce à la formule du binôme négatif, la suite de terme général $\binom{(n+1)+(k-1)}{k-1}p^{k-1}$ est sommable, ce qui prouve que X est d'espérance finie, et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \times \mathbb{P}(X=k) \quad \textit{(le premier terme est nul)} \\
&= ap(n+1)\sum_{k=1}^{+\infty} \binom{(n+1)+(k-1)}{k-1} p^{k-1} \\
&= ap(n+1)\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{(n+1)+k}{k} p^{k} \quad \textit{(après décalage d'indice)} \\
&= ap(n+1) \times \frac{1}{(1-p)^{n+2}} \\
&= (n+1)\frac{p}{1-p} \quad \textit{(car } a=(1-p)^{n+1}\textit{).}
\end{aligned}$$

- On sait que X^2 est d'espérance finie, alors X admet une variance finie. Et d'après le théorème de transfert, ceci est vrai si la suite de terme général $k^2\mathbb{P}(X=k)$ est sommable.
  Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k^2 \times \mathbb{P}(X=k) = ap^k \times k^2 \binom{n+k}{k}$$

> *Ici aussi, on va travailler sur $k^2\binom{n+k}{k}$, et comme l'outil principal est les simplifications et les factorielles, il est plus intéressant d'avoir des termes du style $k(k-1)$, $k(k-1)(k-2)$ etc...*

$$\begin{aligned}
k^2 \times \mathbb{P}(X=k) &= ap^k \times (k(k-1)+k)\binom{n+k}{k} \\
&= ap^k \left(k(k-1)\binom{n+k}{k} + k\binom{n+k}{k}\right) \\
&= ap^k \left((n+2)(n+1)\binom{n+k}{k-2} + (n+1)\binom{n+k}{k-1}\right) \\
&= a\left(p^2 \times (n+2)(n+1)\binom{(n+2)+(k-2)}{k-2}p^{k-2}\right. \\
&\qquad \left. +p \times (n+1)\binom{(n+1)+(k-1)}{k-1}p^{k-1}\right)
\end{aligned}$$

Et on peut derechef appliquer la formule du binôme négatif pour en déduire que X^2 est d'espérance finie qui vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \times \mathbb{P}(X=k)\\ &= a\left(p^2 \times (n+2)(n+1)\sum_{k=2}^{+\infty}\binom{(n+2)+(k-2)}{k-2}p^{k-2}\right.\\ &\qquad \left. +p\times(n+1)\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{(n+1)+(k-1)}{k-1}p^{k-1}\right)\end{aligned}$$

(on a aura fait gaffe en passant aux premières valeurs de k dans les sommes pour ne pas simplifier par 0, ou ne pas se retrouver avec des factorielles d'entiers négatifs)

$$\begin{aligned}&= ap^2(n+2)(n+1)\times\frac{1}{(1-p)^{n+3}} + ap(n+1)\times\frac{1}{(1-p)^{n+2}}\\ &= (n+1)(n+2)\frac{p^2}{(1-p)^2} + (n+1)\frac{p}{1-p}.\end{aligned}$$

Ainsi X admet une variance qui vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2\\ &= (n+1)(n+2)\frac{p^2}{(1-p)^2} + (n+1)\frac{p}{1-p} - \left((n+1)\frac{p}{1-p}\right)^2\\ &= (n+1)\frac{p}{(1-p)^2}\left((n+2)p + (1-p) - (n+1)p\right)\\ &= (n+1)\frac{p}{(1-p)^2}.\end{aligned}$$

3. Pour tout réel $t \in [-1\,;\,1]$,

$$\begin{aligned}G_X(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} t^k\mathbb{P}(X=k) = a\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k}{k}p^kt^k\\ &= \frac{a}{(1-pt)^{n+1}} \quad \text{(encore avec la formule du binôme négatif)}\\ &= \left(\frac{q}{1-pt}\right)^{n+1} \quad \text{(en posant } q = 1-p\text{)}.\end{aligned}$$

Cette fonction est 2 fois dérivable en 1 donc que X admet une espérance qui vaut $G_X'(1)$, et une variance qui vaut $\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2$, mais faut pas compter sur moi pour me cogner les calculs.

Une correction de l'exercice 16.8 *énoncé*

1. C'est bien une loi de probabilité car, grâce à la première dérivée de la série géométrique de raison $1-p$, sachant que $|1-p|<1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 k(1-p)^{k-1} &= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= p^2 \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = 1.\end{aligned}$$

2. Les suites de terme général $((k-1)p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $((k-1)(k-2)p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont sommables, toujours car $|p|<1$ et grâce aux dérivées seconde et troisième de la série géométrique de raison $1-p$ *(on peut aussi utiliser le critère de d'Alembert auquel on ne pense pas toujours)*.

   Donc le théorème de transfert nous permet d'affirmer que les variables $X-1$ et $(X-1)(X-2)$ sont d'espérance finie. De plus

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X-1) = \sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)p_k &= \sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)p^2k(1-p)^{k-1} \\ &= p^2(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} \\ &= p^2(1-p) \times \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2(1-p)}{p},\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big((X-1)(X-2)\big) = \sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)(k-2)p_k &= \sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)(k-2)p^2k(1-p)^{k-1} \\ &= p^2(1-p)^2\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(k-2)(1-p)^{k-3} \\ &= p^2(1-p)^2 \times \frac{6}{(1-(1-p))^4} = \frac{6(1-p)^2}{p^2}.\end{aligned}$$

Pour rappel, les dérivées successives de la série géométrique sont aussi données par la formule du binôme négatif, pour $|z| < 1$,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} z^{n-p} = \frac{1}{(1-z)^{p+1}},$$

$$\text{ou encore } \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)z^{n-p} = \frac{p!}{(1-z)^{p+1}}.$$

3. On a vu que $X-1$ admet une espérance, donc par linéarité de l'espérance, on peut affirmer que X admet aussi une espérance qui vaut

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X-1) + 1 = \frac{2(1-p)}{p} + 1 = \frac{2-p}{p}.$$

De même $(X-1)(X-2)$ admet une espérance, et X aussi, donc encore par linéarité de l'espérance, $X^2 = (X-1)(X-2) + 3X - 2$ admet aussi une espérance, ce qui prouve par théorème que X admet une espérance.
Celle-ci vaut grâce à la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \mathbb{E}((X-1)(X-2) + 3X - 2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \mathbb{E}((X-1)(X-2)) + 3\mathbb{E}(X) - 2 - (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \frac{6(1-p)^2}{p^2} + 3 \times \frac{2-p}{p} - 2 - \left(\frac{2-p}{p}\right)^2 \\
&= \frac{2(1-p)}{p^2}.
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 16.9 *énoncé*

1. ➟ Pour que la loi de probabilité donnée soit valide, il faut et il suffit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.
Or en reconnaissant la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = a \times \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = a \times \left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right] = a$$

donc $\boxed{a=1}$.

On remarque que X *suit la loi géométrique de paramètre* $\frac{1}{2}$ *!*

- Notons A l'événement « Mme Contraire gagne une partie ».
  Mme Contraire gagne si et seulement si X est impair, donc

$$\mathrm{A} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\mathrm{X} = 2k+1).$$

Ces événements étant deux à deux incompatibles, on a par σ-additivité de la probabilité

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{A}) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\mathrm{X}=2k+1)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+1}}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

2. Si X est impair, le gain de Mme Contraire est $+\mathrm{X}$, et si X est pair, ce gain est $-\mathrm{X}$. Donc en résumé, le gain est $\mathrm{Y} = (-1)^{\mathrm{X}+1}\,\mathrm{X}$. Par conséquent, la loi de Y est donnée par

   - $\mathrm{Y}(\Omega) = \{(-1)^{n+1}n \mid n\in\mathbb{N}^*\} = \{-2k, +(2k-1) \mid k\in\mathbb{N}^*\}$,
   - pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\mathrm{Y}=(-1)^{n+1}n) = \mathbb{P}(\mathrm{X}=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   Posons $f : x \mapsto (-1)^{x+1}x$. Alors f est bien définie sur $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et $\mathrm{Y} = f(\mathrm{X})$. Grâce au théorème de transfert, Y admet une espérance si, et seulement si, la suite de terme général $f(n)\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)$, c'est-à-dire $(-1)^{n+1}n\left(\frac{1}{2}\right)^n$, est sommable. Or

$$\left|(-1)^{n+1}n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right| = n\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

   et on sait que la suite de terme général $n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est sommable comme première dérivée de la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   Ainsi par domination, la suite de terme général $f(n)\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)$ est sommable,

donc Y admet une espérance, qui vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty}[(-1)^{n+1}n]\times\mathbb{P}(X=n)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\times n\times\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2} \quad \textit{(avec la première dérivée de la série géométrique de raison } -\tfrac{1}{2}\textit{)}\\ &= \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

On remarque que le jeu est favorable à Mme Contraire puisque l'espérance de son gain est positive. Elle a bien roulé ce bon M. Jaury, la filoute !

3. Dans le cas de cette loi, qui est bien une loi de probabilité puisqu'en écrivant $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ on a bien $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$, la suite de terme général $(-1)^{n+1}n\times\frac{1}{n(n+1)}$ n'est pas sommable puisque

$$\left|(-1)^{n+1}n\times\frac{1}{n(n+1)}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Donc dans ce cas Y n'a pas d'espérance, malgré le fait que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}n\times\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \ln(2).$$

Une correction de l'exercice 16.10 *énoncé*

On note $(X_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des variables indicatrices de l'événement « obtenir pile au lancer n ».
C'est une suite i.i.d qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et dans ce cas X est la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du premier motif $1-0$.

1. On commence par vérifier que X est bien une variable aléatoire, en montrant qu'elle induit en effet un système complet d'événements, autrement dit en montrant que l'événement « ne jamais obtenir $1-0$ » est de probabilité nulle.

   L'événement « ne jamais obtenir $1-0$ » est réalisé si, et seulement si, le premier *pile* est suivi par une liste infinie de *pile*, autrement dit lorsque les lancers donnent une série (éventuellement vide) de *face* suivie d'une éternité de *pile*.

Mais pour un $n \in \mathbb{N}^*$, une éternité de *pile* à partir du n^e lancer est $\bigcap_{i=n}^{+\infty}(X_i = 1)$, et par continuité décroissante

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=n}^{+\infty}(X_i = 1)\right) &= \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=n}^{N}(X_i = 1)\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-n+1} \quad \textit{(par indépendance des } X_i\textit{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc X est bien une variable aléatoire.

2. Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, plus précisément $X(\Omega) = [\![2\,;+\infty[\![$, on va utiliser la formule d'antirépartition : X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X \geqslant n)$ converge, la valeur de l'espérance étant alors égale à la somme de cette série.
   Pour tout $n \geqslant 2$, $(X \geqslant n)$ est réalisé si, et seulement si, les n premiers lancers ont donné une liste de n *pile*, ou bien une liste de *face* suivie d'une liste de *pile*, ce que l'on peut noter par

$$(X \geqslant n) = \bigcup_{k=0}^{n} \bigcap_{i=1}^{k}(X_i = 0) \cap \bigcap_{i=k+1}^{n}(X_i = 1),$$

ce qui donne, par σ-additivité et indépendance des X_i,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geqslant n) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\
&= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.
\end{aligned}$$

Comme on connaît la première dérivée de la série géométrique, on peut conclure que X admet une espérance qui vaut

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1 \\
&= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1 = 3.
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 16.11 *énoncé*

1. On note B_n l'événement « on tire une boule blanche au n-ème tirage ».
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X = n)$ est réalisé lorsque le $(n-1)^e$ et le n^e lancer donnent deux boules noires pour la première fois.
On peut d'ores et déjà remarquer que

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}\left(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2\right) = \frac{a}{3a} \times \frac{a}{3a} \quad \text{\textit{(par indépendance des lancers, et équiprobabilité des boules à chaque tirage)}}$$
$$= \frac{1}{9},$$

et de même $\quad \mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}\left(B_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3\right) = \dfrac{2}{27}.$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. L'événement $(X \geqslant n)$ est « il n'y a pas eu 2 boules noires consécutives au cours des n premiers tirages ».
La formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $\left\{B_1, \overline{B}_1\right\}$ donne

$$\mathbb{P}(X \geqslant n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(X \geqslant n) + \mathbb{P}\left(\overline{B}_1\right)\mathbb{P}_{\overline{B}_n}(X \geqslant n).$$

- Par équiprobabilité des boules au premier tirage,

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B_1) = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}.$$

- Sachant B_1, $(X \geqslant n)$ est réalisé si, et seulement si, il n'y a pas deux boules noires consécutives au cours des $n-1$ lancers entre le deuxième et le n^e donc, les lancers étant indépendants :

$$\mathbb{P}_{B_1}(X \geqslant n) = \mathbb{P}(X \geqslant n-1).$$

- Sachant $\overline{B}_1$, $(X \geqslant n)$ est réalisé si, et seulement si, le deuxième tirage donne une boule blanche (car $n \geqslant 3$!), et il n'y a pas deux boules noires consécutives au cours des $n-2$ lancers entre le troisième et le n^e, ainsi

$$\mathbb{P}_{B_1}(X \geqslant n) = \mathbb{P}(B_2) \times \mathbb{P}(X \geqslant n-2) = \frac{2}{3}\mathbb{P}(X \geqslant n-2).$$

On obtient donc

$$\mathbb{P}(X \geqslant n) = \frac{2}{3}\mathbb{P}(X \geqslant n-1) + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\mathbb{P}(X \geqslant n-2)$$
$$= \frac{2}{3}\mathbb{P}(X \geqslant n-1) + \frac{2}{9}\mathbb{P}(X \geqslant n-2), \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Ainsi la suite de terme général $\mathbb{P}(X \geqslant n)$ est linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, avec pour premier termes $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = \mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1$.
L'équation caractéristique $r^2 = \frac{2}{3}r + \frac{2}{9}$ de la relation de récurrence ci-dessus a pour solutions $\frac{1\pm\sqrt{3}}{3}$, donc il existe deux réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X \geqslant n) = \alpha \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^n + \beta \left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^n.$$

Grâce aux deux premiers termes, on obtient après calculs

$$\alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{4} \text{ et } \beta = \frac{3+\sqrt{3}}{4}.$$

La loi de X est donc caractérisée par

$$\begin{aligned} & X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \\ \text{et } \forall n \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = n) &= P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n+1) = \cdots \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

2. Grâce à la formule d'antirépartition, X est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X \geqslant n)$ converge, ce qui est bien le cas ici puisque

$$\left|\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right| < 1 \text{ et } \left|\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right| < 1$$

donc $\mathbb{P}(X \geqslant n)$ est une combinaison linéaire de suites sommables.
Et dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n) &= \frac{3-\sqrt{3}}{4} \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1-\sqrt{3}}{3}} + \frac{3+\sqrt{3}}{4} \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1+\sqrt{3}}{3}} = \cdots \\ &= 12. \end{aligned}$$

Une correction du problème 16.12 *énoncé*

Partie I - Étude d'un cas simple

1. Y est le rang du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli **indépendantes** : cette variable aléatoire suit donc une loi géométrique de paramètre q (la probabilité de générer C), et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) = p^{n-1}q$.
2. Ainsi d'après le cours, la série génératrice de Y est donc $\sum \frac{q}{p}(pt)^n$, de rayon de convergence $1/p$ (pour $r \geqslant 0$, et de somme $G_Y(t) = \frac{qt}{1-pt}$ pour tout $t \in]-1/p, 1/p[$.
   Puisque le rapport du jury en parle, précisons que $0 < p < 1$, ce qui justifie $\frac{1}{p} > 1$...
3. En tant que somme de série entière, on sait que G_Y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, les dérivées se calculant en dérivant terme à terme. Comme $R_Y > 1$:
   $$\boxed{G_Y \text{ est deux fois dérivable en } 1.}$$
   Comme de plus pour tout $t \in]-1/p, 1/p[$, $G'_Y(t) = \frac{q(1-pt)+qtp}{(1-pt)^2} = \frac{q}{(1-pt)^2}$ puis $G''_Y(t) = \frac{2pq}{(1-pt)^3}$, on a donc :
   $$\boxed{G'_Y(1) = \frac{1}{q} \text{ et } G''_Y(1) = \frac{2p}{q^2}.}$$
4. *Ici, il ne fallait pas rater le « En déduire » qui ne permet pas de balancer l'espérance et la variance directement, mais qui oblige à passer par les égalités du cours entre espérance, variance, et les dérivées de G_Y en 1, qu'il faut savoir retrouver rapidement sur son brouillon :*
   $$G'_Y(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{E}(Y),$$
   $$G''(Y) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{E}(Y(Y-1))$$
   $$= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y) = \mathbb{V}(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2 - \mathbb{E}(Y),$$

On en déduit que

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = G_Y'(1) = \frac{1}{q} \text{ et } \mathbb{V}(Y) = G_Y''(1) + G_Y'(1) - G_Y'(1)^2 = \frac{p}{q^2}.}$$

Partie III – Étude d'un cas intermédiaire

5. Bien entendu, $p_1 = 0$.
   Ensuite, $p_2 = \mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(C_2)$ (indépendance) donc $p_2 = q^2$.
   Enfin, la seule possibilité pour avoir $Z = 3$ est que les trois premières lettres soient PCC, donc toujours par indépendance,

   $$p_3 = \mathbb{P}(P_1 \cap C_2 \cap C_3) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(C_2)\mathbb{P}(C_3) = pq^2.$$

6. D'une part P_1 et C_1 sont deux événements contraires, donc (P_1, C_1) est complet, et d'autre part $C_1 = (C_1 \cap P_2) \cup (C_1 \cap C_2)$, l'union étant disjointe. Ainsi

   $$\boxed{(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2) \text{ est un système complet d'événements.}}$$

7. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
   La formule des probabilités totales sur le système complet d'événements précédent nous donne

   $$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}(Z = n) \\ &= \mathbb{P}_{P_1}(Z = n)\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}_{C_1 \cap P_2}(Z = n)\mathbb{P}(C_1P_2) + \mathbb{P}_{C_1 \cap C_2}(Z = n)\mathbb{P}(C_1C_2). \end{aligned}$$

   Sachant $C_1 \cap C_2$, l'évènement $Z = 2$ est réalisé, donc $\mathbb{P}_{C_1 \cap C_2}(Z = n) = 0$.
   Sachant maintenant que la première lettre est P, alors l'automate est dans l'état zéro, donc la probabilité pour que $n - 1$ lettres plus tard il soit dans l'état 2 vaut $\mathbb{P}(Z = n - 1)$: $\mathbb{P}_{P_1}(Z = n) = \mathbb{P}(Z = n - 1) = p_{n-1}$.
   De même, $\mathbb{P}_{C_1 \cap P_2}(Z = n) = \mathbb{P}(Z = n - 2)$.
   Enfin, $\mathbb{P}(P_1) = p$ et par indépendance, $\mathbb{P}(C_1P_2) = \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(P_2) = pq$.
   On obtient bien

   $$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 3,\ p_n = p\,p_{n-1} + pq\,p_{n-2}.}$$

8. On sait que le rayon de convergence de la série génératrice d'une variable aléatoire est au moins 1, et même que le segment $[-1 ; 1]$ est contenu dans son intervalle de convergence.

Prenons donc un réel t dans $[-1,1]$, alors

$$\begin{aligned}
G_Z(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n = p_1 t + p_2 t^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} p_n t^n \\
&= q^2 t^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} (p\, p_{n-1} + pq\, p_{n-2}) t^n \quad \textit{(par la relation obtenue dans la question précédente, valable pour } n \geqslant 3\textit{)} \\
&= q^2 t^2 + p \sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-1} t^n + pq \sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-2} t^n \quad \textit{(car les séries entières de coefficients } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_{n-1})_{n\geqslant 3}, \textit{ et } (a_{n-2})_{n\geqslant 3} \textit{ ont même rayon de convergence)} \\
&= q^2 t^2 + pt \times \sum_{n=2}^{+\infty} p_n t^n + pqt^2 \times \sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n \quad \textit{(décalage d'indices et mise en facteur)} \\
&= q^2 t^2 + pt \times (G_Z(t) - p_1 t) + pqt^2 \times G_Z(t) \\
&= q^2 t^2 + \left(pt + pqt^2\right) \times G_Z(t) \quad \textit{(car } p_1 = 0\textit{)},
\end{aligned}$$

ce qui donne, moyennant un petit « al muqabala »,

$$(1 - pt - pqt^2) G_Z(t) = q^2 t^2.$$

Le polynôme $Q = 1 - pX - pqX^2$ est de degré 2, son discriminant est strictement positif car il vaut $\Delta = p^2 + 4pq = -3p\left(p - \frac{4}{3}\right)$, et $p \in]0 ; 1[$, donc il admet deux racines distinctes $a < b$.

Comme son coefficient dominant est négatif, on sait que Q est strictement positif entre ses racines, et négatif au delà. Or $Q(1) = q^2 > 0$ et $Q(-1) = 1 + p^2 > 0$, donc on est sûr que $[-1 ; 1] \subset]a ; b[$, donc que $Q(t) > 0$ pour tout $t \in [-1 ; 1]$.

On en déduit que pour tout $t \in [-1 ; 1]$,

$$G_Z(t) = \frac{q^2 t^2}{1 - pt - pqt^2}.$$

9. On en déduit que G_Z est une fraction rationnelle définie au moins sur $[-1\ ;\ 1]$, donc en particulier G_Z est deux fois dérivable en 1, ce dont on peut déduire que Z admet une espérance qui vaut $G_Z'(1)$, et une variance qui vaut $\mathbb{V}(Z) = G_Z''(1) + G_Z'(1) - \left(G_Z'(1)\right)^2$.
Il reste à calculer $\mathbb{E}(Z) = G_Z'(1)$. Ici :

$$\forall t \in]-R_Z, R_Z[, \qquad G_Z'(t) = \frac{2tq^2(1-pt-pqt^2)+q^2t^2(p+2pqt)}{(1-pt-pqt^2)^2}.$$

Pour évaluer en 1 on note que $1-p-pq = q^2$ (question 16), donc :

$$\mathbb{E}(Z) = 2 + \frac{p}{q^2} + 2\frac{p}{q} = 2 + \frac{1-q}{q^2} + 2\frac{1-q}{q}.$$

Finalement, comme demandé :

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = \tfrac{1}{q^2} + \tfrac{1}{q}.}$$

10. Il s'agit d'établir : $\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2} \geqslant 1+\frac{p}{q^2}$, soit encore : $q+1 \geqslant q^2+p = q^2+1-q$, ou encore $q^2 \leqslant 2q$, c'est-à-dire $q \leqslant 2$. Cette dernière inégalité est vérifiée, et on a travaillé par équivalence (de l'importance du choix des mots quand on rédige...), ce qui prouve l'inégalité demandée.

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) \geqslant \mathbb{E}(Y) + 1.}$$

Oui.

Une correction du problème 16.13 — *énoncé*

Partie I - Un développement en série entière

1. On applique le développement en série entière de la fonction puissance :

$$\forall x \in]-1,1[, \ \ (1+(-x))^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x)^n,$$

en notant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\cdot(2k+1)\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\times\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(2n)!}{2^n\, n!} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!}\end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Partie II – Probabilité de retour à l'origine

2. Soit $t \in \mathbb{N}^*$.
Comme X_t prend les valeurs ±1, alors $\frac{X_t+1}{2}$ prend les valeurs 0 et 1, ce qui assure déjà que $\dfrac{X_t+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli.
Pour connaître son paramètre, on calcule la probabilité que $\frac{X_t+1}{2} = 1$:

$$P\left(\frac{X_t+1}{2} = 1\right) = P(X_t = 1) = p.$$

Donc $\frac{X_t+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
Ainsi $\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\frac{X_t+1}{2}$ est une somme de n variables de Bernoulli de même paramètre p, indépendantes grâce au lemme des coalitions (puisque les X_t le sont par hypothèse), donc on il est un résultat du cours que leur somme $\sum_{t=1}^{n}\frac{X_t+1}{2}$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t + 1}{2} = \frac{n}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t + 1}{2} = \frac{n}{2}\right).$$

Or $\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$, donc en particulier $\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}\right)(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

Par conséquent

- si n est impair, $\frac{n}{2}$ n'est pas une valeur de la variable $\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}$, donc $u_n = 0$.
- En revanche, si n est pair, alors $\frac{n}{2} \in [\![0,n]\!]$ et on a, pour une loi binomiale de paramètres n et p :

$$P\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t + 1}{2} = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{n/2} p^{n/2}(1-p)^{n-n/2} = \binom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2}, \quad \text{C.Q.F.D}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $2n$ est un entier pair, donc on a :

$$u_{2n} = \binom{2n}{n}(p(1-p))^n.$$

Or, d'après la formule de Stirling :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

On en déduit :

$$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Or

$$4p(1-p) = -4(p^2 - p) = -4\left[\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = 1 - 4\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 1,$$

et bien évidemment $0 \leqslant p(1-p)$, donc donc

$$0 \leqslant \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

d'où par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} = 0$, et comme deux suites équivalentes ont la même limite, on conclut que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0) = \lim_{n \to +\infty} u_{2n} = 0.$$

Ainsi, après un temps arbitrairement long, il est presque certain que le mobile ne se trouve pas en l'origine *(n'oublions pas que $u_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc les deux suites extraites des indices pairs et des indices impairs ont la même limite, et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$).*

Partie III – Nombre de passages par l'origine

5. La variable aléatoire T_n est une somme de 1 et de 0, comptant autant de 1 que de passage de la particule par l'origine le début de l'observation et l'instant $2n$, donc T_n est le nombre de passages du mobile à l'origine jusqu'à l'instant $2j$.
6. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire O_{2j} suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathrm{P}(\mathrm{O}_{2j} = 1) = \mathrm{P}(\mathrm{S}_{2j} = 0) = u_{2j} = \binom{2j}{j}(p(1-p))^j.$$

Ainsi $\mathbb{E}\left(\mathrm{O}_{2j}\right) = \binom{2j}{j}(p(1-p))^j$, et par linéarité de l'espérance, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{O}_{2j}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}(p(1-p))^j.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente

$$\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(4p(1-p))^j,$$

et on a vu que $4p(1-p) = 1 - 4\left(p - \frac{1}{2}\right)^2$, donc comme $p \in [0 ; 1]$ et $p \neq \frac{1}{2}$, $0 \leqslant 4\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 < 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$, donc $4p(1-p) \in]0 ; 1[$, d'où grâce au développement en série entière de la question **??** :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(T_n\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(4p(1-p))^j = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}} = \frac{1}{4\left(p-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Le membre de droite de cette égalité définit une fonction de p croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et décroissante sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$, qui tend vers 1 en 0 et 1, et vers $+\infty$ en $\frac{1}{2}$.

On en déduit que, dans le cas où $p = \frac{1}{2}$, après un temps infini, le mobile passe un nombre fini de fois en moyenne par l'origine : en moyenne une fois environ si p est proche de 0 ou de 1 (ce qui correspondrait logiquement au fait que la position initiale soit l'origine).

8. Notons que si $p = \frac{1}{2}$, alors d'après la question 6. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j}.$$

Conformément à l'indication de l'énoncé, on va montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

par récurrence sur n.

- Si $n = 0$, alors : $\mathbb{E}(T_0) = \sum_{j=0}^{0} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j} = \frac{1}{2^{2\cdot 0}}\binom{2\cdot 0}{0} = \frac{2\cdot 0+1}{2^{2\cdot 0}}\binom{2\cdot 0}{0}$. D'où le résultat au rang $n = 0$.
- Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$. Alors au rang suivant, comme $T_{n+1} = T_n + O_{2(n+1)}$, la linéarité de l'espérance donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_{n+1}) &= \mathbb{E}\left(T_n\right) + \mathbb{E}\left(O_{2(n+1)}\right) \\ &= \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2(n+1)}}\binom{2(n+1)}{n+1} \quad \textit{(par hypothèse de récurrence, et on connaît la loi de } O_{2(n+1)}\textit{).}\end{aligned}$$

Or

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(n!)^2}$$
$$= \frac{(2n+2)!}{2(n+1)(2n+1)(n!)^2} = \frac{1}{2(2n+1)} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!n!}$$
$$= \frac{n+1}{2(2n+1)} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \binom{2n+2}{n+1},$$

ainsi

$$\mathbb{E}(\mathrm{T}_{n+1}) = \frac{1}{2^{2(n+1)}} \left(2(n+1)\binom{2n+2}{n+1} + \binom{2n+2}{n+1} \right)$$
$$= \frac{2(n+1)+1}{2^{2(n+1)}} \binom{2n+2}{n+1}$$
$$= \frac{2(n+1)+1}{2^{2(n+1)}} \binom{2(n+1)}{n+1}, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

On en déduit avec de nouveau la formule de Stirling

$$\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{2n+1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$
$$= \frac{2n+1}{2^{2n}} \times \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right)^2} = \frac{2n+1}{2^{2n}} \times \frac{2\sqrt{\pi n} \times 2^{2n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$$
$$= \frac{2n+1}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty.$$