Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 18.1

Résoudre les équations différentielles :

$$y' + y = t^2, \; 2x\,y' + y = \frac{1}{x}, \quad \text{et} \quad t\,x' - x = t\ln(t).$$

Exercice 18.2

Résoudre le problème de Cauchy : $(1-x^2)y' + (x-2)y = 0$, et $y(0) = \mathrm{e}$.

Exercice 18.3 – Oral CCINP

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Préciser la partie réelle et imaginaire de $\frac{1}{x+i}$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2(x+i)}y = 0$.

On définit pour tout x réel, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ixt}\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

1. Montrer qu'on définit ainsi une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-2(x+i)f'(x) = f(x)$.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 18.4

L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

1. Justifier que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t$ est bien définie sur $[0\,;+\infty[$.
2. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont F est solution sur $]0\,;+\infty[$.
3. Calculer $\mathrm{F}(0)$ et la limite de F en $+\infty$, puis en déduire la valeur de I.

Exercice 18.5

Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{(-t^2+ixt)}\mathrm{d}t$, en justifiant qu'elle définit une fonction solution d'une équation différentielle.

(mis à jour le 11 février 2025)

Exercice 18.6

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$.

1. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$, et en déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Soit S la somme de cette série.
   (a) Montrer que S est solution sur $]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$ de l'équation différentielle
   $$(1-x)y' - (1+2x)y = 0.$$
   (b) En déduire l'expression de S à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 18.7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que la fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
2. Établir que f est solution de $y' + 2xy = 1$.
3. Déterminer le développement en série entière de la fonction f.

Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 18.8

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'' + y' + y = t^2 + \mathrm{e}^t, \qquad y'' + 2y' + y = t\mathrm{e}^{-t}.$$

Exercice 18.9

On note I l'un des deux intervalles $]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$, et y une solution sur I de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : x^4y'' + 2x^3y' - y = 0.$$

Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on pose $t = \frac{1}{x}$ et $z(t) = y\left(\frac{1}{t}\right)$.

1. Trouver une équation différentielle à coefficients constants vérifiée par z.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I.
3. Y a-t-il des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$? Si oui, lesquelles ?

Exercice 18.10

En posant $t = \mathrm{e}^x$, résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'équation différentielle :

$$t^2 y'' + 4ty' + 2y = 1.$$

Exercice 18.11

En posant $t = x^2$, résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'équation différentielle :

$$4ty'' + 2y' - y = 0.$$

Exercice 18.12 – Calcul de l'intégrale de Dirichlet

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$, et déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f sur $]0\,;+\infty[$.
2. Montrer que g est définie sur $[0\,;+\infty[$.
3. Pour tout $x > 0$, transformer $g(x)$ à l'aide du changement de variable $t = u - x$. En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$, et solution sur $]0\,;+\infty[$ de la même équation différentielle que f.
4. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{(t+x)^2}\mathrm{d}t$, en déduire que g est continue sur $[0\,;+\infty[$.
5. Déterminer les limites de f et g en $+\infty$, et conclure que $f = g$ sur $[0\,;+\infty[$.
6. En déduire en particulier la valeur de l'intégrale de Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 18.13

Soit (E) : $y' - y = \mathrm{e}^{-x^2}$ et $u : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Exprimer les solutions de (E) en fonction de u.
2. Montrer que $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En déduire que u possède des limites finies quand x tend vers $\pm\infty$.
3. Montrer que les solutions de (E) ont toutes pour limite zéro en $-\infty$.
4. Montrer qu'il existe une solution de (E) qui tend vers 0 en $+\infty$.
5. Que dire des solutions de (F) : $y' + y = \mathrm{e}^{-x^2}$?

Exercice 18.14 – Oral centrale

Soient $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \mathrm{F}(x) + f(x)$.

1. On suppose que f possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Qu'en est-il de F ?
2. On suppose que F possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Qu'en est-il de f ?
3. On suppose maintenant qu'il existe $\ell' \in \mathbb{R}$ tel que $\lim g(x) = \ell'$ quand $x \to +\infty$ Montrer qu'il existe $\ell'' \in \mathbb{R}$ tel que $\lim f(x) = \ell''$ quand $x \to +\infty$, et déterminer ℓ'' en fonction de ℓ'.

Exercice 18.15 – Extrait de CCINP

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \cos\big(x\sin(t)\big)\mathrm{d}t$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n}(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner pour tout $x \in \mathbb{R}$ des expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ sous forme d'intégrales.
3. Soit la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $h(x,t) = \cos(t)\sin\big(x\sin(t)\big)$.
   Justifier l'existence de $\dfrac{\partial h}{\partial t}$, puis déterminer $\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

4. En déduire que f est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \quad : \quad xy'' + y' + xy = 0.$$

5. On suppose qu'il existe une solution de (E) développable en série entière notée $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$.
   Montrer que $a_1 = 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$: $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$.
   En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de a_n en fonction de n et de a_0.
6. En utilisant un théorème d'interversion série intégrale, montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de f en fonction des termes de la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de W_n en fonction de n.

Solutions

Une correction de l'exercice 18.1

énoncé

1. ➟ L'équation homogène est (H) : $y' = -y$, la fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est solution de H, donc l'ensemble des solutions de H est

$$\mathrm{Vect}(\varphi) = \left\{t \mapsto C\,\mathrm{e}^{-t} \mid C \in \mathbb{R}\right\}.$$

➟ Le second membre $t \mapsto t^2$ nous suggère de chercher une solution particulière de la forme d'un polynôme du second degré $P : a \mapsto at^2 + bt + c$.

$$\begin{aligned} P'(t) + P(t) = t^2 &\iff 2a\,t + b + a\,t^2 + b\,t + c = t^2 \\ &\iff a\,t^2 + (2a+b)t + (b+c) = t^2 \end{aligned}$$

ceci est vrai dès que

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Donc $P(t) = t^2 - 2\,t + 2$.

➟ On conclut que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + y = t^2$ est

$$\left\{t \mapsto \left(t^2 - 2\,t + 2\right) + C\mathrm{e}^{-t} \mid C \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. Ici le second membre $x \mapsto \frac{1}{x}$ est défini sur $\mathbb{R}^\star$, donc on résout l'équation sur les intervalles $]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;0[$.
Sur ces intervalles, sa forme normalisée est

$$(E) \quad : \quad y' = -\frac{1}{2x}y + \frac{1}{2x^2}.$$

Sur le brouillon, on résout l'équation homogène sans précaution :

$$\begin{aligned} y' = -\frac{1}{2x}y &\iff \frac{y'}{y} = -\frac{1}{2x} \\ &\iff \ln(y) = -\frac{1}{2}\ln(x) \\ &\iff y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

On en déduit que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est solution sur $]0\,;+\infty[$, et on fait gaffe de mettre une valeur absolue pour la solution $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ sur $]-\infty\,;0[$. Puis on rédige la solution comme ci-dessous :

- La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, car elle est la composée de $\square \mapsto \sqrt{\square}$, qui est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ à valeurs dans $]0\,;+\infty[$, par $\square \mapsto \frac{1}{\square}$ qui est aussi dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
  De plus, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,

  $$\begin{aligned} \varphi'(x) &\left(= \left(x^{-1/2}\right)'\right) \quad \textit{(cette notation est incorrecte, mais c'est pour détailler...)} \\ &= -\frac{1}{2}x^{-1/2-1} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{2x} \times \varphi(x), \end{aligned}$$

  donc φ est solution de $(\mathrm{H}) : y' = -\frac{1}{2x}y$ sur $]0\,;+\infty[$.
- Et comme le coefficient $x \mapsto -\frac{1}{2x}$ est une fonction continue sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit grâce au théorème de Cauchy que l'ensemble des solutions de (H) sur $]0\,;+\infty[$ est

  $$\left\{x \mapsto \frac{C}{\sqrt{x}} \mid C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si on était observateur on pourrait remarquer que $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est une solution particulière de (E), mais on ne l'est pas, donc on fait la variation de la constante.

Soit λ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$, alors $y : x \mapsto \lambda(x) \times \frac{1}{\sqrt{x}}$ est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$, et est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,

$$\begin{aligned} & y'(x) = -\frac{1}{2x} y(x) + \frac{1}{2x^2} \\ \iff & \lambda'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' \quad \textit{(on a l'a vu plus haut !)} \end{aligned}$$

donc il suffit de prendre $\lambda(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$, ce qui donne la solution particulière $y(x) = -\frac{1}{x}$.

- On conclut que l'ensemble des solutions de (E) sur $]0\,;+\infty[$ est

$$\left\{ x \mapsto -\frac{1}{x} + \frac{C}{\sqrt{x}} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

- De la même manière, on trouve que l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty\,;0[$ est

$$\left\{ x \mapsto -\frac{1}{x} + \frac{C}{\sqrt{|x|}} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. L'équation différentielle $t\,x' - x = t\ln(t)$ est définie sur $]0\,;+\infty[$, et sa forme normalisée est

$$(\mathrm{E}) : x' = \frac{1}{t} x + \ln(t).$$

- L'équation homogène est (H) : $x' = \frac{1}{t} x$, dont le coefficient $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$. Donc l'ensemble des solutions sur $]0\,;+\infty[$ de (H) est une droite vectorielle.
  Or la fonction $\varphi : t \mapsto t$ est solution de (H), donc l'ensemble des solutions de (H) est

$$\mathrm{Vect}(\varphi) = \{t \mapsto C\,t \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

- On cherche alors une solution particulière de (E) sous la forme $x : t \mapsto \lambda(t) t$, où λ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.
  Cette fonction x est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned} & x'(t) = \frac{1}{t} x(t) + \ln(t) \\ \iff & \lambda'(t) = \frac{\ln(t)}{t} = \ln'(t) \times \ln(t) = \left(\frac{1}{2}\ln^2(t)\right)' \end{aligned}$$

donc on peut prendre $\lambda(t) = \frac{1}{2}\ln^2(t)$, qui nous donne la solution $x : t \mapsto \frac{1}{2} t \ln^2(t)$.

➟ On peut donc conclure que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{t \mapsto \frac{1}{2} t \ln^2(t) + \mathrm{C}t \mid \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}.$$

Une correction de l'exercice 18.2

énoncé

➟ Sur $]-\infty\,;\,-1[$, $]-1\,;\,1[$, $]1\,;\,+\infty[$, l'équation (E) : $(1-x^2)y' + (x-2)y = 0$ équivaut à

$$(\mathrm{EE}) : y' = -\frac{x-2}{1-x^2} y.$$

Comme $x \mapsto -\frac{x-2}{1-x^2}$ est continue sur $]-1\,;\,1[$, le théorème de Cauchy nous permet d'affirmer qu'il existe une unique solution y sur cet intervalle $]-1\,;\,1[$ qui vérifie $y(0) = \mathrm{e}$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in]-1\,;\,1[$,

$$-\frac{x-2}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x},$$

en multipliant par $1-x$ des deux côtés et en remplaçant x par 1, on obtient $a = \frac{1}{2}$, et de même avec $1+x$ et -1 on a $b = \frac{3}{2}$, d'où

$$-\frac{x-2}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{3}{2}}{1+x},$$

donc une primitive en est

$$x \mapsto -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{3}{2}\ln(1+x) = \ln\left(\frac{(1+x)^{3/2}}{(1-x)^{1/2}}\right) = \ln\left(\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

et par conséquent, les solutions de (EE) sur $]-1\,;\,1[$ sont les fonctions

$$x \mapsto \mathrm{C}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Parmi ces solutions, la seule qui vaut e en 0 est

$$x \mapsto \mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

➟ On remarque que l'équation différentielle (E) de départ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on se demande donc si on peut prolonger cette solution $y : x \mapsto \mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1\,;\,1[$ en une solution sur un intervalle plus grand.

- En 1 à gauche,

$$y(x)=\mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\underset{x\to 1}{\sim}\frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}\xrightarrow[x\overset{<}{\to}1]{}+\infty$$

donc la fonction y ne peut pas être prolongée au dessus de 1.

- En -1 à droite,

$$y(x)=\mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}=\mathrm{e}\frac{(1+x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{(1-x)}}\xrightarrow[x\overset{>}{\to}-1]{}0,$$

donc y est continue à droite en -1, et on peut s'intéresser au prolongement de y en deçà de -1.

- On remarque d'ores et déjà que

$$\begin{aligned}y'(x)&=-\frac{x-2}{1-x^2}\times y(x)=-\frac{x-2}{(1-x)(1+x)}\times\mathrm{e}\frac{(1+x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{(1-x)}}\\&=\mathrm{e}\frac{(2-x)\sqrt{(1+x)}}{(1-x)\sqrt{(1-x)}}\xrightarrow[x\overset{>}{\to}-1]{}0\end{aligned}$$

donc grâce au théorème de la limite de la dérivée, on peut en déduire que y est de classe $\mathscr{C}^1$ à droite en -1, avec $y'_d(0)=0$.

- La résolution de cette même équation différentielle $y'=-\frac{x-2}{1-x^2}y$, mais cette fois sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$ donne de la même manière les solutions : $x\mapsto \mathrm{C}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x^2-1}}=\mathrm{C}\frac{(1+x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1}}$.

  Ces solutions vérifient aussi, pour tout réel C, $y(x)\xrightarrow[x\overset{<}{\to}-1]{}0$, et $y'(x)\xrightarrow[x\overset{<}{\to}-1]{}0$.

  Donc pour tout $\mathrm{C}\in\mathbb{R}$, la fonction

$$x\mapsto\begin{cases}\mathrm{e}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x\in\,]-1\,;1[\\ 0 & \text{si } x=-1\\ \mathrm{C}\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x\in\,]-\infty\,;-1[\end{cases}$$

  est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty\,;1[$, et est solution du problème de Cauchy initial sur cet intervalle.

Une correction de l'exercice 18.3 *énoncé*

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x+i} = \frac{x-i}{x^2+i^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}_{=\mathbb{R}\mathrm{e}} + i \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)}_{=\mathrm{Im}}.$$

2. La fonction $x \mapsto x+i$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas, donc $x \mapsto \frac{1}{2(x+i)}$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$.
Une primitive de

$$x \mapsto \frac{1}{2(x+i)} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + i\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)\right),$$

est

$$x \mapsto \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) - i\frac{1}{2}\arctan(x).$$

Donc une solution de $y' + \frac{1}{2(x+i)}y = 0$ est

$$\begin{aligned} x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) - i\frac{1}{2}\arctan(x)} &= \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{4}} \times \mathrm{e}^{-i\frac{1}{2}\arctan(x)} \\ &= \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{4}} \times \left(\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right) - i\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right)\right) \end{aligned}$$

> *Rappelons le changement de variables $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, dans les intégrales avec des fonctions trigo, qui permet d'utiliser les identités*
> $$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},\ \textit{et}\ \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$
> *Je n'ai pas vraiment de méthode à vous proposer pour retrouver rapidement ces identités.*

$$= \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{4}} \times \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} - i\frac{2x}{x^2+1}\right) = \frac{1-x^2+2ix}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{4}}}.$$

3. La fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{ixt}\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, t \in]0\,;+\infty[,\ \left|\frac{\mathrm{e}^{ixt}\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}.$$

Or

- $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$;
- $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est (Riemann) intégrable en 0 ;
- $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to +\infty}{=} o\left(e^{-t}\right)$ qui est intégrable en $+\infty$, donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

donc le théorème de continuité des intégrales à paramètre permet de conclure que f est continue (et a fortiori définie) sur $\mathbb{R}$.

4. Pour tout $t \in]0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{e^{ixt}e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$, de dérivée

$$x \mapsto it\frac{e^{ixt}e^{-t}}{\sqrt{t}} = ie^{ixt} \times \sqrt{t}e^{-t}$$

qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, t \in]0\,;+\infty[\,,\quad \left|\frac{e^{ixt}e^{-t}}{\sqrt{t}}\right| = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.$$

Or

- $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$;
- $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est (Riemann) intégrable en 0 ;
- $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to +\infty}{=} o\left(e^{-t}\right)$ qui est intégrable en $+\infty$, donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

donc le théorème de continuité des intégrales à paramètre permet de conclure que f est continue (et a fortiori définie) sur $\mathbb{R}$.

Une correction de l'exercice 18.4

énoncé

1. La fonction

$$f : (x,t) \mapsto f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$$

est définie sur $\mathbb{R} \times]0\,;+\infty[$.
Pour tout $x \geqslant 0$, la fonction

$$f(x,\bullet) = t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$$

est

- continue sur $]0\,;+\infty[$,

- équivalente quand $t \to 0$ à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ qui définit une fonction intégrable sur $]0\,;\,1]$, donc $f(x,\bullet)$ est intégrable elle-même sur $]0\,;\,1]$,
- dominée quand $t \to +\infty$ par $\frac{1}{t^{3/2}}$ qui définit une fonction intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$, donc $f(x,\bullet)$ est intégrable elle-même sur $[1\,;\,+\infty[$.

Ainsi pour tout $x \geqslant 0$, la fonction

$$t \longmapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$$

est intégrable sur $]0\,;\,+\infty[$, ce qui prouve que F est bien définie sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. - Pour tout $t > 0$, la fonction

$$x \longmapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc sur $]0\,;\,+\infty[$, de dérivée :

$$x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-te^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} = -\frac{\sqrt{t}e^{-xt}}{1+t}\,;$$

- on a vu précédemment que pour tout $x \geqslant 0$, la fonction

$$t \longmapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$$

est intégrable sur $]0\,;\,+\infty[\,;$

- pour tout $x > 0$, la fonction

$$t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{\sqrt{t}e^{-xt}}{1+t}$$

est continue par morceaux sur $[0\,;\,+\infty[\,;$

- enfin, pour tout segment $[a\,;\,b] \subset\,]0\,;\,+\infty[$,

$$\forall x \in [a\,;\,b],\ \ \forall t \in\,]0\,;\,+\infty[,\ \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{\sqrt{t}e^{-at}}{1+t},$$

et :

   - la fonction $\varphi : t \longmapsto \frac{\sqrt{t}e^{-at}}{1+t}$ est continue sur $[0\,;\,+\infty[$,
   - par croissances comparées, grâce à e^{-at},

$$\frac{\sqrt{t}e^{-at}}{1+t} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

donc φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

On peut donc conclure grâce à la règle de Leibniz que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$, et que

$$\mathrm{F}' : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Ainsi pour tout $x > 0$,

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

Comme $x > 0$, la fonction $t \mapsto xt$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante, et bijective de $]0\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$, donc le changement de variables $u = xt$ est licite, et donne

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{x}}.$$

Autrement dit F est solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle

$$y' = y - \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{x}}.$$

3. ➟ Grâce au changement de variables $t = u^2$, à la fonction arctan,

$$\mathrm{F}(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t \underset{t=u^2}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \pi.$$

➟ Et d'autre part, par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{I},$$

donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 0$.

4. La résolution, avec la méthode de variation de la constante pour la solution particulière, du problème de Cauchy formé par l'équation différentielle $y' = y - \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{x}}$ et la condition initiale $y(0) = \pi$, donne, par unicité de la solution d'un problème de Cauchy dont les coefficients sont des fonctions continues,

$$\forall x \geqslant 0,\ \ \mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^x\left(\pi - \mathrm{I}\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right).$$

ainsi, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 0$, on en déduit que $\pi - \mathrm{I}\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ est obligé de tendre vers 0 quand $x \to +\infty$, autrement dit que

$$\pi - \mathrm{I}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 0$$

c'est-à-dire $\mathrm{I}^2 = \pi$, d'où finalement :

$$\mathrm{I} = \sqrt{\pi}.$$

Une correction de l'exercice 18.5 *énoncé*

⊗ Solution ; - Existence et continuité :
Posons $f(x,t) = \mathrm{e}^{(-t^2+ixt)}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2 . f$ est évidemment continue sur $\mathbb{R}^2$.
De plus : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, |f(x,t)| = \mathrm{e}^{-t^2}$; $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}, l'$ hypothèse de domination du théorème 1 est vérifiée, et g est continue sur $\mathbb{R}$.

➟ Dérivée et calcul : Pour tout $x \in \mathbb{R}, x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = it\mathrm{e}^{-t^2+ixt}$, qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = t\mathrm{e}^{-t^2}$; $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}, l'$ hypothèse de domination du théorème 2 est vérifiée, et g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} it\mathrm{e}^{-t^2+ixt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{i}{2}\mathrm{e}^{(-t^2+ixt)}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{x}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2+ixt}\,\mathrm{d}t$ en ayant intégré par parties (en posant $u = i\mathrm{e}^{ixt}$ et $v' = t\mathrm{e}^{-t^2}$). Or $\lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{(-t^2+ixt)} = 0$ puisque $\left|\mathrm{e}^{(-t^2+ixt)}\right| = \mathrm{e}^{-t^2}$.

Ainsi, $g'(x) = -\frac{x}{2}g(x), \mathrm{d}'$ où $g(x) = \mathrm{C}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$, où $\mathrm{C} = \mathrm{cste}$.

Puisque $g(0) = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss), on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$.

Une correction de l'exercice 18.6 *énoncé*

1. ➟ Par récurrence sur deux termes, avec d'une part $a_1 = 1$ et $a_2 = a_1 + a_0 = 2$, puis pour tout entier $n \geqslant 2$ *(pour que $n-1 \in \mathbb{N}^*$)*, on suppose que $1 \leqslant a_{n-1} \leqslant (n-1)^2$ et $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$, et ainsi

$$\frac{2}{n+1} \leqslant \frac{2}{n+1}a_{n-1} \leqslant \frac{2(n-1)^2}{n+1}.$$

On en déduit d'une part que

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1} \geqslant 1 + \frac{2}{n+1} \times 1 \geqslant 1,$$

et d'autre part que

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\leqslant n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 \\
&= ((n+1)-1)^2 + \frac{2}{n+1}((n+1)-2)^2 \\
&\text{(on veut des } n+1\text{, donc on fait apparaître des } n+1 \\
&\text{avec l'aide du belge !)} \\
&= (n+1)^2 - 2(n+1) + 1 \\
&\qquad + \frac{2}{n+1}((n+1)^2 - 4(n+1) + 4)^2 \\
&= (\cdots) = (n+1)^2 - \left(7 - \frac{8}{n+1}\right) \\
&\leqslant (n+1)^2, \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

➟ On en déduit que le rayon de convergence R_a de $\sum a_n z^n$ est compris entre celui de $\sum n^2 z^n$, qui est égal à 1 *(par d'Alembert ; ou bien car* $n^2 1^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$ *mais* $n^2 x^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$ *par croissances comparées pour* $0 < x < 1$*)*, et celui de $\sum x^n$, qui est aussi égal à 1.

Donc $R_a = 1$.

2. (a) Remarquons qu'alors la somme S de la série entière est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$, et de plus pour tout $x \in\,]-1\,;1[$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1},$$

donc

$$\begin{aligned}
&(1-x)S'(x)-(1+2x)S(x)\\
&\quad=(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1}-(1+2x)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\
&\quad=\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}2a_nx^{n+1}\\
&\quad=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n-\sum_{n=1}^{+\infty}2a_{n-1}x^n\\
&\quad=a_1-a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big((n+1)a_{n+1}-na_n-a_n-2a_{n-1}\Big)x^n\\
&\quad=0+\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\Big(a_{n+1}-a_n-\frac{2}{n+1}a_{n-1}\Big)x^n\\
&\quad=0 \text{ C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

(b) Sur $]-1\,;1[$, l'équation différentielle $(1-x)y'-(1+2x)y=0$ équivaut à $y'=\frac{1+2x}{1-x}y=\frac{3-2(1-x)}{1-x}y=\left(\frac{3}{1-x}-2\right)y$. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients continus sur $]-1\,;1[$, donc elle a pour ensemble des solutions une droite vectorielle.
Mais comme $x\mapsto -3\ln(1-x)-2x$ est une primitive sur $]-1\,;1[$ de $x\mapsto\frac{3}{1-x}-2$, la fonction $x\mapsto\exp(-3\ln(1-x)-2x)=\frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$ est solution de cette équation. Par conséquent, toutes les solutions sur $]-1\,;1[$ de $(1-x)y'-(1+2x)y=0$ sont de la forme

$$x\mapsto\frac{Ce^{-2x}}{(1-x)^3},\, C\in\mathbb{R}.$$

On sait que l'une d'entre elles est la somme S, et comme cette somme vérifie aussi $S(0)=a_0=1$, on peut conclure en prenant $C=1$ que

$$\forall x\in\,]-1\,;1[,\quad S(x)=\frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}.$$

Une correction de l'exercice 18.7 *énoncé*

1. Pour tout réel t,

$$e^{t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(t^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^{2n}.$$

L'expression ci-dessus est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, on peut l'intégrer terme à terme sur tout segment de $\mathbb{R}$.
Ainsi pour tout réel x,

$$\int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^{2n} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(2n+1)} t^{2n+1}.$$

Mais d'autre part,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n},$$

donc grâce au produit de Cauchy, la fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

2. Du résultat précédent, la somme d'une série entière étant $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence, on déduit que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec de plus pour tout réel x,

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t + e^{-x^2} \times e^{x^2} = -2xf(x) + 1, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Plus précisément, comme $f(0) = 0$, comme l'application $x \mapsto -2x$ est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Cauchy linéaire nous permet d'affirmer que f est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} y' &= -2xy + 1, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

3. Cherchons une solution développable en série entière de ce problème de Cauchy.

   ➠ **Analyse :** prenons une série entière $\sum a_n z^n$ dont on suppose le rayon de convergence strictement positif.

   Notons S sa fonction somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, qui est donc $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence.
   Supposons que S est solution de l'équation différentielle sur un intervalle $]-\alpha\ ;\ \alpha[$ avec $\alpha > 0$.

Alors pour tout $x \in \left]-\alpha\,;\,\alpha\right[$,

$$\begin{aligned}
S'(x)+2xS(x)=1 &\iff -1+\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 2x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\\
&\iff -1+\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^{n+1} = 0\\
&\iff -1+\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^{n+1} = 0\\
&\iff -1+\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n-1} x^{n} = 0\\
&\iff (-1+a_1)+\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+1)a_{n+1}+2a_{n-1}\right] x^n = 0\\
&\iff \begin{cases} -1+a_1=0 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad (n+1)a_{n+1}+2a_{n-1}=0 \end{cases} \quad \textit{(par unicité du développement en série entière)}\\
&\iff \begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall p\in\mathbb{N},\ a_{p+2} = -\frac{2}{p+2}a_p \end{cases}
\end{aligned}$$

et $S(0)=0$ si, et seulement si, $a_0=0$.
On en déduit par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{2n}=0$, et

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= \left(-\frac{2}{2n+1}\right)\times\left(-\frac{2}{2n-1}\right)\times\cdots\times\left(-\frac{2}{3}\right)\\
&= \frac{(-2)^n}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}\\
&= \frac{(-2)^n(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots 3\times 2}\\
&= \frac{(-2)^n 2^n n!}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

- **Synthèse :** considérons la série entière associée à la suite de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette série entière a pour rayon de convergence $+\infty$, car grâce au critère de d'Alembert, en posant $u_n = a_{2n+1}x^{2n+1}$ pour $x>0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a_{2n+3}}{a_{2n+1}}\right| \times x^2 = \frac{2}{2n+3}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc la somme S de cette série entière est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et d'après le calcul de la partie analyse précédente, elle est solution sur $\mathbb{R}$ de notre équation différentielle.

Comme de plus $S(0) = 0$, on en déduit que la fonction

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

est solution sur $\mathbb{R}$ du même problème de Cauchy que f, par conséquent on peut en déduire grâce au théorème de Cauchy que ces deux fonctions sont égales, autrement dit que S est le développement en série entière de f.

Une correction de l'exercice 18.8

énoncé

1. Avec Python et sympy

```python
from sympy import init_session
init_session()

dsolve(diff(f(t),t,2)+diff(f(t),t)+f(t)-t**2-exp(t),f(t))
```

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 - 2t + \frac{1}{\sqrt{e^t}}\left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) + \frac{e^t}{3} \\ &= \left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) e^{-\frac{1}{2}t} + t^2 - 2t + \frac{1}{3}e^t \end{aligned}$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. Encore avec sympy :

$$f(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + \frac{t^2}{2}e^{-t}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Une correction de l'exercice 18.9

énoncé

1. Soit y une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, alors $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur I (c'est une bijection de I sur I), donc $z : t \mapsto y\left(\frac{1}{t}\right)$ est aussi $\mathscr{C}^2$ sur I.

> *On va ici calculer les dérivées de $z = t \mapsto y(\varphi(t))$ en fonction de celles de y, mais on aurait pu faire l'inverse en inversant la relation en remarquant que $y = x \mapsto z\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ (dans cet exercice $y(x) = z\left(\frac{1}{x}\right)$). Selon les exercices, choisir l'une ou l'autre de ces stratégies peut simplifier les calculs.*

Pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$z'(t) = -\frac{1}{t^2}y'\left(\frac{1}{t}\right) = -\left(\frac{1}{t}\right)^2 y'\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$z''(t) = \frac{2}{t^3}y'\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t^4}y''\left(\frac{1}{t}\right) = 2\left(\frac{1}{t}\right)^3 y'\left(\frac{1}{t}\right) + \left(\frac{1}{t}\right)^4 y''\left(\frac{1}{t}\right)$$

donc y est solution sur $]0\,;+\infty[$ de (E) si, et seulement si,

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad x^4y''(x) + 2x^3y'(x) - y(x) = 0$$
$$\iff \forall t \in]0\,;+\infty[,\quad \left(\frac{1}{t}\right)^4 y''\left(\frac{1}{t}\right) + 2\left(\frac{1}{t}\right)^3 y'\left(\frac{1}{t}\right) - y\left(\frac{1}{t}\right) = 0$$
$$\iff \forall t \in]0\,;+\infty[,\quad z''(t) - z(t) = 0$$

donc y est solution sur $]0\,;+\infty[$ de (E) si, et seulement si, z est solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle à coefficients constants $(\mathrm{E})' : z'' - z = 0$.

2. On sait résoudre cette équation, donc on en déduit que y est solution sur $]0\,;+\infty[$ de (E) si, et seulement si,

$$\exists (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2,\quad \forall t \in]0\,;+\infty[,\quad z(t) = \mathrm{A}e^t + \mathrm{B}e^{-t}$$
$$\iff \exists (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2,\quad \forall x \in]0\,;+\infty[,\quad y(x) = z\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{A}e^{\frac{1}{x}} + \mathrm{B}e^{-\frac{1}{x}}$$

qui boucle la résolution de (E) sur $]0\,;+\infty[$.

3. ➟ *Analyse :* supposons que l'application y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors
   - y est en particulier solution de (E) sur $]0\,;+\infty[$, ainsi

$$\exists (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2,\quad \forall x \in]0\,;+\infty[,\quad y(x) = \mathrm{A}e^{\frac{1}{x}} + \mathrm{B}e^{-\frac{1}{x}}.$$

   - Mais y est aussi solution de (E) sur $]-\infty\,;0[$, ainsi, avec la même méthode que sur $]0\,;+\infty[$, on obtient

$$\exists (\mathrm{A}',\mathrm{B}') \in \mathbb{R}^2,\quad \forall x \in]-\infty\,;0[,\quad y(x) = \mathrm{A}'e^{\frac{1}{x}} + \mathrm{B}'e^{-\frac{1}{x}}.$$

- Et dans l'équation (E) pour $x=0$, on obtient $-y(0)=0$, donc $y(0)=0$.
- De plus y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier continue en 0, mais

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \xrightarrow{>} 0]{} +\infty \text{ et } \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \xrightarrow{<} 0]{} +\infty$$

donc il faut que $\mathrm{A}=\mathrm{B}'=0$ pour que la fonction y ait pour limite 0 en 0. Ainsi y est forcément de la forme :

$$y(x)=\begin{cases} \mathrm{B}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0,\\ \mathrm{A}'\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0. \end{cases}$$

- *Synthèse :* on considère la fonction ci-dessus, on sait déjà qu'elle est solution sur $]-\infty\,;\,0[$, en 0, et sur $]0\,;\,+\infty[$, puis on montre que les limites à gauche et à droite de y, y' et y'' donnent 0, ce qui grâce au théorème de limite de la dérivée, permet de conclure que y est $\mathscr{C}^2$ en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

  On peut donc conclure que y est solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si, et seulement si, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$y(x)=\begin{cases} a\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0,\\ b\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0. \end{cases}$$

Une correction de l'exercice 18.10

énoncé

Pour tout $t\in\,]0\,;\,+\infty[$, on pose $y(t)=z(\ln(t))$, ce qui revient à poser $z(x)=y(\mathrm{e}^x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$$y'(t)=\frac{1}{t}z'(\ln(t))$$
$$y''(t)=-\frac{1}{t^2}z'(\ln(t))+\frac{1}{t^2}z''(\ln(t))$$

donc y est solution sur $]0\,;+\infty[$ de (E) si, et seulement si,

$$
\begin{aligned}
& \forall t \in]0\,;+\infty[,\ \ t^2 y''(t)+4ty'(t)+2y(t)=1\\
\Longleftrightarrow & \forall t \in]0\,;+\infty[,\ \ z''(\ln(t))+3z'(\ln(t))+2z(\ln(t))=1\\
\Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ \ z''(x)+3z'(x)+2z(x)=1\\
\Longleftrightarrow & \exists (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2,\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ z(x)=\frac{1}{2}+\mathrm{A}e^{-x}+\mathrm{B}e^{-2x}
\end{aligned}
$$

(solution particulière constante $z=\frac{1}{2}$ et équation homogène d'équation caractéristique $r^2+3r+2=0$)

$$
\Longleftrightarrow \exists (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2,\ \ \forall t \in]0\,;+\infty[,\ \ y(t)=\frac{1}{2}+\mathrm{A}\times\frac{1}{t}+\mathrm{B}\frac{1}{t^2}
$$

Une correction de l'exercice 18.11

énoncé

Pour tout $t \in]0\,;+\infty[$, on pose $y(t)=z(\sqrt{t})=z\left(t^{1/2}\right)$, ce qui revient à poser $z(x)=y(x^2)$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= \frac{1}{2}t^{1/2-1}z'\left(t^{1/2}\right)=\frac{1}{2}t^{-1/2}z'\left(t^{1/2}\right)\\
y''(t) &= -\frac{1}{4}t^{-1/2-1}z'\left(t^{1/2}\right)+\frac{1}{2}t^{-1/2}\times\frac{1}{2}t^{-1/2}z''\left(t^{1/2}\right)\\
&= -\frac{1}{4}t^{-3/2}z'\left(t^{1/2}\right)+\frac{1}{4}t^{-1}z''\left(t^{1/2}\right)
\end{aligned}
$$

donc y est solution sur $]0\,;+\infty[$ de (E) si, et seulement si,

$$
\begin{aligned}
& \forall t \in]0\,;+\infty[,\ \ 4ty''(t)+2y'(t)-y(t)=0\\
\Longleftrightarrow & \forall t \in]0\,;+\infty[,\ \ z''\left(\sqrt{t}\right)-z\left(\sqrt{t}\right)=0\\
\Longleftrightarrow & \forall x \in]0\,;+\infty[,\ \ z''(x)-z(x)=0\\
\Longleftrightarrow & \exists (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2,\ \ \forall x \in]0\,;+\infty[,\ \ z(x)=\mathrm{A}e^{x}+\mathrm{B}e^{-x}
\end{aligned}
$$

(l'équation caractéristique est $r^2-1=0$)

$$
\Longleftrightarrow \exists (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2,\ \ \forall t \in]0\,;+\infty[,\ \ y(t)=\mathrm{A}e^{\sqrt{t}}+\mathrm{B}e^{-\sqrt{t}}.
$$

Une correction de l'exercice 18.12 *énoncé*

1. La continuité de f sur $[0\,;+\infty[$, qui est une intégrale à paramètre, s'établit grâce entre autres à l'inégalité de domination

$$\forall x \in [0\,;+\infty[\,,\ \forall t \in [0\,;+\infty[\,,\ |\varphi(x,t)| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

Le caractère $\mathscr{C}^2$ de f sur $]0\,;+\infty[$, sous le signe $\int$, s'établit grâce (entre autres) aux inégalités de domination, sur tout segment $\mathrm{K} = [a\,;b] \subset\,]0\,;+\infty[$,

$$\forall x \in [a\,;b]\,,\ \forall t \in [0\,;+\infty[\,,\ \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{-t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-at}\right).$$
$$\left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left|\frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{t^2\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-at}.$$

La règle de Leibniz généralisée aux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ donne alors pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$
$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

et on en déduit que pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$,

$$f(x) + f''(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

2. Soit $x \in [0\,;+\infty[$.
On pose $u'(t) = \sin(t)$, $v(t) = \frac{1}{x+t}$, et on choisit $u(t) = 1-\cos(t)$. Ainsi :
   - ➟ les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$;
   - ➟ $u(t)v(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{x+t} \begin{cases} \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}t^2}{x+t} \xrightarrow[t\to0]{} 0 \\ \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \text{ par encadrement, car } \left|\frac{1-\cos(t)}{x+t}\right| \leqslant \frac{2}{t} \end{cases}$

donc par une intégration par parties, on peut conclure la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t$, donc la définition de g sur $[0\,;+\infty[$, avec en plus l'égalité

$$g(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{-(x+t)^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}\mathrm{d}t$$

car la deuxième intégrale converge ; en effet :

- ➟ $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ si $x>0$, ou prolongeable par continuité sur $[0\,;+\infty[$ si $x=0$ (car $1-\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2}t^2$;
- ➟ pour tout $t>0$, $\left|\frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}\right| \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

3. Soit $x>0$.
L'application $t \mapsto t+x$ est bien une bijection de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante, de $]0\,;+\infty[$ sur $]x\,;+\infty[$, donc en posant $u=t+x$, ou $t=u-x$, on obtient

$$g(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u-x)}{u}\mathrm{d}u=\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u)\cos(x)-\cos(u)\sin(x)}{u}\mathrm{d}u$$

comme dans la question précédente, on peut montrer par une intégration par parties que les intégrales $\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ et $\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u$ sont convergentes, on peut donc appliquer la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}g(x)&=\cos(x)\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u-\sin(x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u\\&=\cos(x)\left(\int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u-\int_1^{x}\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u\right)\\&\quad-\sin(x)\left(\int_1^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u-\int_1^{x}\frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u\right).\end{aligned}$$

Les fonctions sin et cos sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et par le théorème fondamental de l'analyse, les fonctions $x\mapsto\int_1^x\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ et $x\mapsto\int_1^x\frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u$ sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$, de dérivées respectives $x\mapsto\frac{\sin(x)}{x}$ et $x\mapsto\frac{\cos(x)}{x}$. Mais ces dérivées sont elles-mêmes $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$ comme rapport de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas, donc les fonctions $x\mapsto\int_1^x\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ et $x\mapsto\int_1^x\frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.
Par conséquent, la fonction g est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$, avec pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\sin(x)\left(\int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u-\int_1^{x}\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u\right)+\cos(x)\times\left(-\frac{\sin(x)}{x}\right)\\&\quad-\cos(x)\left(\int_1^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u-\int_1^{x}\frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u\right)-\sin(x)\times\left(-\frac{\cos(x)}{x}\right)\\&=-\sin(x)\left(\int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u-\int_1^{x}\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u\right)\\&\quad-\cos(x)\left(\int_1^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u-\int_1^{x}\frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u\right)\end{aligned}$$

puis en dérivant derechef, par des calculs identiques,

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= -\cos(x)\left(\int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u - \int_1^{x}\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u\right) - \sin(x)\times\left(-\frac{\sin(x)}{x}\right)\\
&\quad + \sin(x)\left(\int_1^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u - \int_1^{x}\frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u\right) - \cos(x)\times\left(-\frac{\cos(x)}{x}\right)\\
&= -g(x) + \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{x} = -g(x) + \frac{1}{x}\cdot
\end{aligned}
$$

donc g est aussi solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle

$$y''+y = \frac{1}{x}\cdot$$

4. Cette égalité a été établie dans la question 2.
La continuité de g sur $[0\,;+\infty[$ est de nouveau établie par le théorème de continuité sous le signe $\int$, grâce entre autres à l'inégalité de domination

$$\forall x\in[0\,;+\infty[,\ \forall t\in]0\,;+\infty[,\ \left|\frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}\right| \leqslant \frac{1-\cos(t)}{t^2}$$

et la fonction $t\mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$, car (en bref)

- elle est continue sur cet intervalle,
- $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1-\left(1-\frac{1}{2}t^2+\underset{t\to 0}{\mathrm{O}}\left(t^3\right)\right)}{t^2} \xrightarrow[t\longrightarrow 0]{} \dfrac{1}{2}$,
- $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

5. - En majorant $\left|\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\right|$ par e^{-xt}, on obtient par l'inégalité de la moyenne et la croissance de l'intégrale que

$$|f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x},$$

d'où par encadrement $f(x)\xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} 0$;

- de même

$$|g(x)| \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{2}{(t+x)^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{x},$$

d'où $g(x)\xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} 0$;

- enfin, f et g sont solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y''+y=\frac{1}{x}$, donc on vérifie facilement que $f-g$ est solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y''+y=0$, équation harmonique classique dont les solutions sont les fonctions

$$x\longmapsto \mathrm{A}\cos(x)+\mathrm{B}\sin(x),\ (\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2.$$

Donc il existe $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2$ tels que pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$,

$$f(x)-g(x)=\mathrm{A}\cos(x)+\mathrm{B}\sin(x).$$

Mais on a déjà établi que $(f-g)(x)=f(x)-g(x)\xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{}0$, or ni cos ni sin n'ont de limite en $+\infty$, donc la seule possibilité est que $\mathrm{A}=\mathrm{B}=0$ *(on peut aussi remarquer que* $\mathrm{A}=(f-g)(n2\pi)\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}0$ *et* $\mathrm{B}=(f-g)(\pi/2+n2\pi)\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}0$*)*, donc que $f=g$.
Mais cette égalité a été établie sur $]0\,;+\infty[$, et pas en 0, cependant on a aussi prouvé que f et g sont continues sur $[0\,;+\infty[$, donc en 0, d'où

$$f(0)=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}g(x)=g(0).$$

On conclut avec

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t=g(0)=f(0)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\ \text{(avec arctan)}$$

qui nous donne la valeur de l'intégrale de Dirichlet.

Une correction de l'exercice 18.13

énoncé

1. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions proportionnelles à l'exponentielle. La méthode de variation de la constante conduit à $k'(x)\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{-x^2}$, et on choisit $k(x)=u(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2-t}\mathrm{d}t$. Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions telles que

$$\exists k\in\mathbb{R},\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad y(x)=\mathrm{e}^x(k+u(x)).$$

2. Les comparaisons usuelles montrent que $t^2\mathrm{e}^{-t^2-t}$ tend vers zéro quand t tend vers $\pm\infty$, donc $t\mapsto \mathrm{e}^{-t^2-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par définition, u possède alors des limites finies en $\pm\infty$.
3. Comme $k+u(x)$ admet une limite finie en $-\infty$, alors $y(x)=\mathrm{e}^x(k+u(x))$ tend vers zéro quand x tend vers $-\infty$.
4. Pour que $y(x)$ puisse tendre vers zéro quand x tend vers $+\infty$, il faut que $k=$

$-\lim_{+\infty} u(x)$. Dans ce cas

$$|y(x)| = \left|-\mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2-t}\mathrm{d}t\right| = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2-t}\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2-x}\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, l'intégrale ci-dessus tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$. Il existe donc bien une (et une seule) solution de (E) de limite nulle en $+\infty$.

5. On pose $v\colon x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2+t}\,\mathrm{d}t$. Les solutions de (F) sont les fonctions telles que

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \mathrm{e}^{-x}(k + v(x)).$$

On démontre comme ci-dessus que $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, que v admet des limites finies en $\pm\infty$, que toutes les solutions de (F) tendent vers zéro en $+\infty$, et qu'il existe une et une seule solution de (F) de limite nulle en $-\infty$.

Une correction de l'exercice 18.14

énoncé

1. On discute selon le signe de ℓ.

   - Si $f(x) \to \ell > 0$ quand $x \to +\infty$, alors $\mathrm{F}(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. En effet, il existe un réel $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que $\forall x \geqslant \mathrm{A}$, $f(x) \geqslant \frac{\ell}{2}$ et alors, pour $x \geqslant \mathrm{A}$, $\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(\mathrm{A}) + \int_{\mathrm{A}}^x f \geqslant \mathrm{F}(a) + \frac{\ell(x-\mathrm{A})}{2}$ et l'on conclut par comparaison de limites.
   - De même, Si $f(x) \to \ell < 0$ quand $x \to +\infty$, alors $\mathrm{F}(x) \to -\infty$ quand $x \to +\infty$.
   - En revanche si $\ell = 0$ on ne peut pas conclure. Par exemple, $\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge mais $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ diverge.

2. Là non plus on ne peut pas conclure. En effet par exemple l'intégrale de Fresnel $\int_0^{+\infty} \sin t^2 \mathrm{d}t$ converge (une intégration par parties donne $\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t = \int_0^x 2t \sin t^2 \frac{1}{2t}\mathrm{d}t = [\frac{1-\cos t^2}{2t}]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos t^2}{2t^2}\mathrm{d}t$, le terme intégré est de limite nulle en $+\infty$ et l'intégrale obtenue est absolument convergente) et bien sûr $t \mapsto \sin t^2$ n'a pas de limite en $+\infty$.

   En revanche, par contraposée de la question précédente, on peut affirmer que si f admet une limite (finie), alors celle-ci est nulle.

3. Si g était constante égale à ℓ', alors F serait solution de l'équation différentielle $y' + y = \ell'$ donc de la forme $x \mapsto \lambda e^{-x} + \ell'$ donc de limite ℓ', et $f = \mathrm{F}'$ serait de limite nulle.

   Passons au cas général et montrons que le résultat reste valable. Soit $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{A} \geqslant 0$ tels que $\forall x \geqslant \mathrm{A}, \ell' - \varepsilon < g(x) < \ell' + \varepsilon$.

   Pour tout $x \geqslant \mathrm{A}$, on a $e^x(\ell' - \varepsilon) < e^x(\mathrm{F}(x) + f(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x \mathrm{F}(x)) < e^x(\ell' + \varepsilon)$ donc, en intégrant de A à x, $\left(e^x - e^A\right)(\ell' - \varepsilon) \leqslant e^x F(x) - e^A F(A) \leqslant \left(e^x - e^A\right)(\ell' + \varepsilon)$ donc

$$e^{A-x}F(A) + \left(1 - e^{A-x}\right)(\ell' - \varepsilon) \leqslant F(x) \leqslant e^{A-x}F(A) + \left(1 - e^{A-x}\right)(\ell' + \varepsilon).$$

Le minorant est de limite $\ell' - \varepsilon$ et le majorant de limite $\ell' + \varepsilon$, donc il existe $B \geqslant A$ tel que $\forall x \geqslant B$, $\ell' - 2\varepsilon < F(x) < \ell' + 2\varepsilon$. Ceci pour tout $\varepsilon > 0$, donc $F(x) \to \ell'$ quand $x \to +\infty$, puis

$$f(x) = g(x) - F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell' - \ell' = 0.$$

Une correction de l'exercice 18.15

énoncé

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \cos(x\sin(t))$ est continue sur le SEGMENT $[0, \pi]$ en tant que

   - composée de l'application $t \mapsto x\sin(t)$, continue sur $\mathbb{R}$
   - et à valeurs dans $\mathbb{R}$,
   - par le cosinus qui est continu sur $\mathbb{R}$

   donc elle est intégrable sur ce segment, et en particulier l'intégrale $\int_0^\pi \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. *Nous allons utiliser la généralisation à la classe $\mathscr{C}^2$ du théorème de dérivation des intégrales à paramètres.*

   Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$, posons :

   $$g(x, t) = \cos(x\sin(t)).$$

   Alors :

   - pour tout $t \in [0, \pi]$, l'application $x \mapsto \cos(x\sin(t))$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto x\sin(t)$ et le cosinus le sont (ce sont des fonctions usuelles), avec pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$:

   $$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)), \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = -(\sin(t))^2\cos(x\sin(t)),$$

   - pour tout $x \in \mathbb{R}$, un raisonnement analogue à celui de la question précédente assure que $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t)$ sont continues sur le segment $[0, \pi]$, et donc qu'en particulier $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ y est intégrable.

➟ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0\,;\,\pi]$,

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant 1,$$

or l'application $\varphi : t \mapsto 1$ est continue, donc intégrable, sur le segment $[0,\pi]$.

Toutes les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres sont vérifiées. On en déduit que f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et qu'on peut la dériver sous le signe intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = \int_0^{\pi} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} -\sin(t)\sin(x\sin(t))\mathrm{d}t,$$
$$\text{et}\quad f''(x) = \int_0^{\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} -(\sin(t))^2\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les applications cosinus et sinus sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc par composition et produit, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ existe. De plus :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)) + x(\cos(t))^2\cos(x\sin(t)).$$

4. ➟ On a déjà vu que la fonction f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc c'est une candidate acceptable comme solution de (E) qui est une équation différentielle du deuxième ordre ;
   ➟ de plus pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
xf''(x) + f'(x) + xf(x) &\overset{[2.]}{=} x\int_0^{\pi} -\sin^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^{\pi} -\sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\
&\quad + x\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \left(-\sin(t)\sin(x\sin(t)) + x\left(1-\sin^2(t)\right)\cos(x\sin(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \left(-\sin(t)\sin(x\sin(t)) + x(\cos(t))^2\cos(x\sin(t)\right)\mathrm{d}t \\
&\overset{[Q3.]}{=} \int_0^{\pi} \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t = \Big[h(x,t)\Big]_0^{\pi} = h(x,\pi) - h(x,0) \\
&= \cos(\pi)\sin(x\sin(\pi)) - \cos(0)\sin(x\sin(0)) = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi f vérifie bien l'équation différentielle (E), ce qu'il fallait démontrer.

5. Notons S la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Alors S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$ et dérivable terme à terme, ainsi S est solution de (E) sur $]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$ si, et seulement si, pour tout $x \in]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$:

$$\begin{aligned}
& x\mathrm{S}''(x)+\mathrm{S}'(x)+x\mathrm{S}(x)=0\\
\Longleftrightarrow & \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}=0\\
\Longleftrightarrow & \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n=0\\
\Longleftrightarrow & \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+a_1+\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n\\
\Longleftrightarrow & a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)n a_{n+1}+(n+1)a_{n+1}+a_{n-1}\right)x^n=0\\
\Longleftrightarrow & a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)^2 a_{n+1}+a_{n-1}\right)x^n=0\\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} a_1=0,\\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad a_{n+1}=-\frac{1}{(n+1)^2}a_{n-1},\end{cases}\\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} a_1=0,\\ \forall n\geqslant 2,\quad a_n=-\frac{1}{n^2}a_{n-2},\end{cases} \qquad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

- Le terme de rang 1 est nul, donc on en déduit par récurrence que tous les termes de rang impair sont nuls.

  Sur notre brouillon :

  $$\begin{aligned}
  a_{2p} &= -\frac{1}{(2p)^2}a_{2p-2}=\left(-\frac{1}{(2p)^2}\right)\times\left(-\frac{1}{(2p-2)^2}\right)\times\cdots\times\left(-\frac{1}{(2)^2}\right)a_0\\
  &=\frac{(-1)^p}{2^{2p}\times(p!)^2}a_0
  \end{aligned}$$

-

Supposons qu'au rang $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p} \times (p!)^2} a_0$ *(ce qui est vrai pour* $p = 0$ *!)*, alors

$$\begin{aligned} a_{2(p+1)} &= -\frac{1}{(2(p+1))^2} a_{2p} = -\frac{1}{(2(p+1))^2} a_{2p} \\ &= -\frac{1}{(2(p+1))^2} \frac{(-1)^p}{2^{2p} \times (p!)^2} a_0 \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{(-1)^{p+1}}{2^{2(p+1)} \times ((p+1)!)^2} a_0 \end{aligned}$$

donc ...*(à rédiger)*...

6. Notons x un réel quelconque fixé.
   La fonction cosinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f(x) = \int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x\sin(t))^{2n}}{(2n)!} \mathrm{d}t.$$

   Posons :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [0,\pi], \quad f_n(t) = (-1)^n \frac{(x\sin(t))^{2n}}{(2n)!}.$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est évidemment continue (par morceaux) sur $[0,\pi]$, et

$$\|f_n\|_{\infty}^{[0\,;\,\pi]} \leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!},$$

   où on reconnait le terme général d'une suite sommable dont la somme donne $\mathrm{ch}(|x|)$. Ainsi $\sum f_n$ est normalement convergente, donc uniformément convergente, sur le segment $[0\,;\,\pi]$, ce qui permet d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, et donc d'affirmer que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x\sin(t))^{2n}}{(2n)!} \mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} (-1)^n \frac{(x\sin(t))^{2n}}{(2n)!} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\pi} \sin^{2n}(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{W_{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

7. On sait d'après la question précédente que f est une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et d'après 4. f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Donc d'après 5., on connaît la suite des coefficients de son développement en série entière.
Comme le terme constant de ce développement vaut

$$f(0) = \int_0^{\pi} \cos(0 \times \sin(t)\mathrm{d}t = \pi,$$

on peut affirmer en particulier que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ (-1)^n \frac{W_{2n}}{(2n)!} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} \times (n!)^2} \times \pi,$$

d'où

$$\boxed{W_n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \times \pi = \frac{1}{2^{2n}} \times \frac{(2n)!}{n! \times (2n-n)!} \times \pi \boxed{= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \pi}.$$