Généralités sur les normes

Exercice 19.1 – Une norme sur $\mathbb{R}^2$ (🔥)

Démontrer que $(x, y) \mapsto \mathrm{N}(x, y) = \max(|x|, |y|, |x-y|)$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$, et représenter sa boule unité ouverte associée.

Exercice 19.2

Montrer qu'il n'existe pas de norme N sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{N}(\mathrm{AB}) = \mathrm{N}(\mathrm{BA})$ pour tout $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$.

Exercice 19.3 – Étude du caractère borné de parties

Les parties de $\mathbb{R}^2$ définies ci-dessous sont-elles bornées ?

$$\mathrm{A} = \Big\{(x\cos(x), \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\Big\}, \quad \mathrm{B} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 = 1\Big\},$$
$$\text{et } \mathrm{C} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\Big\}$$

Exercice 19.4 – Barycentre et partie convexe (🔥)

Montrer qu'une partie A d'un espace vectoriel E est convexe si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{array}{l} \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{A}^n, \\ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0 \,;\, +\infty[^n, \end{array} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \mathrm{A}.$$

Exercice 19.5 – Normes sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$

Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on pose :

$$\|\mathrm{P}\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{P}^{(k)}(0)}{k!}\right|, \qquad \|\mathrm{P}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{P}^{(k)}(0)}{k!}\right|^2}, \qquad \|\mathrm{P}\|_\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} \left|\frac{\mathrm{P}^{(k)}(0)}{k!}\right|.$$

1. Montrer qu'on définit ainsi trois normes sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *(on pourra utiliser astucieusement les normes usuelles dans $\mathbb{K}^n$)*.
2. Montrer que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\|\mathrm{P}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{P}\|_2 \leqslant \|\mathrm{P}\|_1$.
3. Montrer, en considérant par exemple $\mathrm{P}_n = 1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2 + \ldots + \mathrm{X}^n$, que ces trois normes ne sont pas équivalentes.

(mis à jour le 14 février 2025)

Exercice 19.6

On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$, et pour tout $f \in \mathrm{E}$, $\mathrm{N}(f) = \left\|f''\right\|_\infty + |f(0)| + |f'(0)|$.

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Démontrer que : $\forall f \in \mathrm{E}$, $\|f\|_\infty \leqslant \mathrm{N}(f)$. *(On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.)*
3. À l'aide de $f_n : t \mapsto t^n$, établir que N et la norme infinie ne sont pas équivalentes.

Exercice 19.7

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Si $f \in \mathrm{E}$, on pose $\mathrm{N}(f) = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Est-elle équivalente à $\| \ \|_\infty$?

Exercice 19.8

Soient $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et E_+ l'ensemble des fonctions de E positives et ne s'annulant qu'un nombre fini de fois. Si $f \in \mathrm{E}$ et $\varphi \in \mathrm{E}_+$, on pose $\|f\|_\varphi = \int_0^1 |f| \times \varphi$.

1. Soit $\varphi \in \mathrm{E}_+$. Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|_\varphi$ définit une norme sur E.
2. Soient φ_1 et φ_2 dans E_+ dont on suppose qu'elles ne s'annulent pas. Montrer que $\| \ \|_{\varphi_1}$ et $\| \ \|_{\varphi_2}$ sont équivalentes.
3. Les normes $\| \ \|_{x\mapsto x}$ et $\| \ \|_{x\mapsto x^2}$ sont-elles équivalentes ?

Suites dans un espace vectoriel normé

Exercice 19.9

Soit f une application k−lipschitzienne d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \|.\|)$ dans lui-même, et α un point fixe de E, c'est-à-dire un vecteur de E qui vérifie $f(\alpha) = \alpha$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E qui vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n - \alpha\| \leqslant k^n \|u_0 - \alpha\|$.
2. Que peut-on en déduire dans le cas où $|k| < 1$?

Exercice 19.10

Soit u une isométrie d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = (\operatorname{Im}(u - \mathrm{id}_E))^{\perp}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$. Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$.

Limites et continuité

Exercice 19.11

Étudier l'existence d'une limite en (0,0) des fonctions suivantes :

$$(1)\ \ (x,y) \mapsto \left(\tfrac{1+x^2+y^2}{y}\sin(y), \tfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right), \quad (2)\ \ (x,y) \mapsto \frac{xy}{|x|+|y|},$$

$$(3)\ \ (x,y) \mapsto \frac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2}, \quad (4)\ \ (x,y) \mapsto \left(\frac{xy^6}{x^6+y^8}, x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

Exercice 19.12

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, et $a \in \,]0\,;+\infty[$.

1. Montrer que $K = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} x_k = a\right\}$ est un compact (c'est-à-dire une partie fermée bornée) de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit f définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} x_k$.
   (a) Comparer $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ et $f(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, \ldots, x_n)$.
   (b) En déduire que f atteint un maximum sur K atteint en un vecteur dont toutes les composantes sont égales.
3. En déduire l'inégalité ci-dessous entre moyennes géométrique et arithmétique

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_i.$$

Exercice 19.13

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose que la suite des matrices $\mathrm{U}_n = \mathrm{I}_p + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2 + \cdots + \mathrm{A}^n$ converge vers une matrice B.
Montrer que $\mathrm{I}_p - \mathrm{A}$ est inversible et que $\mathrm{B} = (\mathrm{I}_p - \mathrm{A})^{-1}$.

Exercice 19.14 – 🔥🔥

Soit h une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.
On définit f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ par $f(x,y) = \dfrac{h(y) - h(x)}{y - x}$.
Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Un peu de topologie

Exercice 19.15 – Utilisation de l'image réciproque

Montrer que $\mathrm{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$ et $\mathrm{V} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant x\}$, sont respectivement un ouvert et un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 19.16

Montrer que l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1 est une partie fermée non bornée de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 19.17

Soient E un espace vectoriel normé, $a, b \in \mathrm{E}$, et $r, s \in \,]0\,;+\infty[$.
Prouver les implications suivantes :

1. $\mathrm{B}_f(a,r) \subset \mathrm{B}_f(b,s) \Longrightarrow \|a-b\| \leqslant s - r$;
2. $\mathring{\mathrm{B}}(a,r) \cap \mathring{\mathrm{B}}(b,s) = \varnothing \Longrightarrow \|a-b\| \geqslant r + s$.

Exercice 19.18

Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 19.19

Montrer que si $\mathscr{O}$ est un ouvert non vide d'une espace vectoriel normé E, alors $\operatorname{Vect}(\mathscr{O}) = \mathrm{E}$.

Linéarité, bilinéarité et continuité

Exercice 19.20

Soit f une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés E et F.

1. Montrer que si f est continue en 0_E, alors f est continue sur E.
2. Montrer que si pour toute suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée, alors f est continue sur E.

Exercice 19.21 – 🔥

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $k \in]0\,;+\infty[$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\quad |P(z)| \leqslant k \times \sup_{x\in[-1\,;1]} |P(x)|.$$

Exercice 19.22 – 🔥

Montrer que toute matrice trigonalisable est limite d'une suite de matrices diagonalisables.
(Rappelons qu'il suffit à une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ d'avoir n valeurs propres deux à deux distinctes pour être diagonalisable.)

Problème 19.23 – CCINP PSI - Puissances de matrices et limites de suites de matrices

Soient n et p deux entiers strictement positifs.
On s'intéresse ici à la convergence des suites de matrices $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où pour tout $k\in\mathbb{N}$, $M_k \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ avec $p=1$ (matrices colonnes) ou $p=n$ (matrices carrées).
Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on note alors $M_k = \left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ ou plus simplement $M_k = \left(m_{i,j}^{(k)}\right)$.

On suppose que l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est muni d'une norme notée $\|.\|$ indifféremment des valeurs de n et p. En particulier, si $V\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, V est une matrice colonne assimilée à un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et on note $\|V\|$ sa norme.

On s'intéresse en particulier à la suite des puissances itérées $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ d'une matrice donnée $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie I - Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
Pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on définit la matrice $\mathrm{M}(a,b) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\mathrm{M}(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}$$

et on note $\mathrm{P}_{a,b}$ le polynôme caractéristique de la matrice $\mathrm{M}(a,b)$.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et on remarque que pour tous réels a et b,

$$\mathrm{M}(a,b) = b\mathrm{I}_n + a\mathrm{M}(1,0).$$

1. On suppose, dans cette question uniquement, que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   Montrer que dans ce cas $\mathrm{M}(a,b)$ est diagonalisable.
2. (a) Montrer que $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de $\mathrm{M}(a,b)$,
   (b) et déterminer la valeur propre associée à V.
3. Montrer que $\mathrm{P}_{1,0}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-(n-1))(\mathrm{X}+1)^{n-1}$.
4. On suppose que $a \neq 0$.
   (a) Montrer que $\mathrm{P}_{a,b}(\mathrm{X}) = a^n \mathrm{P}_{1,0}\left(\frac{\mathrm{X}-b}{a}\right)$.
   (b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de $\mathrm{M}(a,b)$ ainsi que leurs multiplicités.
5. On définit le polynôme $\mathrm{Q}_{a,b} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ par

$$\mathrm{Q}_{a,b}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-(b-a))(\mathrm{X}-(b+(n-1)a)).$$

   (a) Montrer que $\mathrm{Q}_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $\mathrm{M}(a,b)$,
   (b) et en déduire que $\mathrm{M}(a,b)$ est diagonalisable (distinguer $a=0$ et $a \neq 0$).
6. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \neq 0$.
   (a) Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme $\mathrm{Q}_{a,b}$,

(b) et en déduire une expression de $\mathrm{M}(a,b)^k$ comme combinaison linéaire de $\mathrm{M}(a,b)$ et de I_n.

7. Supposons que $|b-a|<1$ et $|b+(n-1)a|<1$.
Déterminer la limite de la suite de matrices $\left(\mathrm{M}(a,b)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Partie II - Limite des puissances d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, muni d'une norme notée $\|.\|$, et dont on note la base canonique $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$.
Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad |\lambda|<1.$$

On note A la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathscr{B}$.
L'objectif de cette partie est de montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\mathrm{A}^k\right)=0$.
On suppose (sauf à la 12.) que $\mathrm{A}=\mathrm{T}$ où T est une matrice triangulaire supérieure :

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

8. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty}\|u^k(e_1)\|=0$ et en déduire $\lim\limits_{k\to+\infty}u^k(e_1)$.

On suppose qu'il existe $i\in[\![1\,;n-1]\!]$ tel que pour tout $j\in[\![1\,;i]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty}u^k(e_j)=0$.

9. Montrer qu'il existe $x\in \mathrm{Vect}(e_j)_{j\in[\![1;i]\!]}$ tel que $u(e_{i+1})=\lambda_{i+1}e_{i+1}+x$.

   En déduire que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $u^k(e_{i+1})=\lambda_{i+1}^k e_{i+1}+\sum\limits_{m=0}^{k-1}\lambda_{i+1}^{k-m-1}u^m(x)$.

10. (a) Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|\sum\limits_{m=0}^{k-1}\lambda_{i+1}^{k-m-1}u^m(x)\right\|=0$.

    (b) En déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty}u^k(e_{i+1})=0$.

11. Montrer alors que $\lim\limits_{k\to+\infty}\mathrm{T}^k=0$.

12. On ne suppose plus que A est triangulaire supérieure.
Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty}\mathrm{A}^k=0$.

Partie III - Application à la méthode de Gauss-Seidel

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$

On dit alors que A est une matrice à **diagonale strictement dominante**.

13. Montrer qu'une une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

On admet que dans ce cas A est inversible.
On définit ensuite $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la manière suivante :

pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$,
- si $i \geqslant j$, $m_{i,j} = a_{i,j}$ et $f_{i,j} = 0$;
- si $i < j$, $m_{i,j} = 0$ et $f_{i,j} = -a_{i,j}$.

Ainsi, $A = M - F$ où F est la partie triangulaire supérieure de diagonale nulle de $-A$ et où M est la partie triangulaire inférieure de A.
Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On note $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'unique matrice colonne telle que :

$$AX = Y.$$

Le but de cette partie est de trouver une suite qui converge vers X.

14. Justifier que M est inversible.

Dans la suite de cette partie, on pose $B = M^{-1}F$.
On définit par récurrence une suite de matrices colonnes $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ quelconque et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = BX_k + M^{-1}Y.$$

15. Montrer que $X = BX + M^{-1}Y$.

Soit λ une valeur propre quelconque de la matrice B. On note $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de B associé à cette valeur propre.
Par convention, si $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes alors

$$\sum_{j=n+1}^{n} u_j = \sum_{j=1}^{0} u_j = 0.$$

16. (a) Montrer que $\mathrm{FV} = \lambda \mathrm{MV}$.
    (b) En déduire que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda a_{i,i} v_i = -\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} v_j \right).$$

17. (a) Montrer qu'il existe $i_0 \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $|v_{i_0}| = \max_{j \in [\![1;n]\!]} |v_j|$ et $v_{i_0} \neq 0$.
    (b) En déduire que :

$$\left|\lambda a_{i_0,i_0}\right| \leqslant \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} \left|a_{i_0,j}\right| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} \left|a_{i_0,j}\right| \right).$$

18. En déduire que $|\lambda| < 1$, puis que $\lim_{k \to +\infty} \mathrm{B}^k = 0$.
19. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{X}_k - \mathrm{X} = \mathrm{B}^k(\mathrm{X}_0 - \mathrm{X})$$

et conclure.

Problème 19.24 – Mines-Ponts PC 2020

L'objectif du problème est d'établir, par des méthodes euclidiennes, des théorèmes d'approximation par des polynômes ou des exponentielles-polynômes de certaines fonctions définies sur $[0, +\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$.
Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats des parties I et II.

I. Résultats préliminaires

I.1. Etude d'une série entière

Pour tout réel x strictement positif, on pose : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie, et à valeurs strictement positives.
2. À l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera avec soin, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Soit $\alpha \in]-1\ ;+\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
4. Montrer que pour tout $x \in]-R\ ;R[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}$.

On pourra intervertir somme et intégrale de manière soigneusement justifiée.

I.2. Projections orthogonales

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle . \mid . \rangle$ dont on note $\|.\|$ la norme associée.
Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie telle que $\dim(F) \geqslant 1$.

5. Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F.

On fixe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de F, et x un vecteur de E.

6. Montrer que $\pi_F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle e_i$.
7. Montrer enfin que $\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle^2$.

II. Polynômes de Laguerre

Dans toute cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^0([0\ ;+\infty[\,,\mathbb{R})$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ converge.

8. Justifier que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.
9. En déduire que, si $f, g \in E_\alpha$, $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) dx$ converge.
10. En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
11. Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0,+\infty[$ est élément de E_α.

Pour tout entier naturel n, on définit les fonctions :

$$\varphi_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{n+\alpha}e^{-x}, \quad \text{et} \quad \psi_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{-\alpha}e^{x}\varphi_n^{(n)}(x),$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

12. Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2.
13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0,+\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0,+\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élement de E_α, ce qu'on fera désormais.

Pour tout $(f,g) \in E_\alpha^2$, on pose $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

14. Montrer que $\langle . \mid . \rangle$ est un produit scalaire sur E_α.

Dans la suite, on note $\|.\|_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \quad \text{pour tout } f \in E_\alpha.$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout entier $k \in [\![0 \,;\, n-1]\!]$, établir que
    - $\varphi_n^{(k)}(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives,
    - et que $\varphi_n^{(k)}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)$.
16. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, montrer que : $\langle \psi_m \mid \psi_n \rangle = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$.

    En déduire que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.
17. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = n! \times \Gamma(n+\alpha+1)$

    (la fonction Γ a été définie dans la partie I).

III. Approximation

On conserve les hypothèses et notations de la partie II.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $f_k : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-kx}$, dont on admet qu'elle est élément de E_α.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note V_N le sous-espace vectoriel de E_α engendré par la famille finie $(\psi_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$, et on note π_N la projection orthogonale de E_α sur V_N.

18. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k \mid \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$, et calculer sa valeur.
19. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \xrightarrow[N \longrightarrow +\infty]{} 0$.

Dans toute la suite, on note $\mathscr{P}$ le sous-espace vectoriel de E_α constitué des fonctions polynomiales.

20. Montrer que, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathscr{P}$ telle que $\|f_k - p\|_\alpha \leqslant \varepsilon$.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue tendant vers 0 en $+\infty$.
On admet que $f \in E_\alpha$.

21. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n ainsi que des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leqslant \varepsilon.$$

On pourra utiliser la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) & \text{si } t \in \,]0,1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

et le résultat **admis** suivant : si $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $|\phi(t) - p(t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$.

22. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathscr{P}$ telle que $\|f - p\|_\alpha \leqslant \varepsilon$.
23. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ ($A > 0$). Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^2 dx \leqslant \varepsilon.$$

On pourra appliquer le résultat de la question 22. à la fonction $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto h(\sqrt{x}) e^{\frac{x}{2}}$ et à un α bien choisi.

On peut montrer que le résultat de la question 23. est en réalité valable pour tout fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

Solutions

Une correction de l'exercice 19.1 *énoncé*

(i) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, et $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(\lambda(x,y)) &= \mathrm{N}(\lambda x,\lambda y) = \max(|\lambda x|,|\lambda y|,|\lambda x-\lambda y|)\\ &= \max(|\lambda|\times|x|,|\lambda|\times|y|,|\lambda|\times|x-y|)\\ &= |\lambda|\times\max(|x|,|y|,|x-y|) \quad \textit{(grâce au } 4^e \textit{ point de la remarque 17.4)}\\ &= |\lambda|\,\mathrm{N}(x,y),\end{aligned}$$

d'où l'homogénéité de N.

(ii) Soient (x,y) et (x',y') dans $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\mathrm{N}((x,y)+(x',y')) &= \mathrm{N}(x+x',y+y')\\ &= \max\left(\left|x+x'\right|,\left|y+y'\right|,\left|x+x'-y-y'\right|\right).\end{aligned}$$

Or, par l'inégalité triangulaire de la valeur absolue,

$$\begin{aligned}\left|x+x'\right| &\leqslant |x|+\left|x'\right| \leqslant \mathrm{N}(x,y)+\mathrm{N}(x',y')\\ \left|y+y'\right| &\leqslant |y|+\left|y'\right| \leqslant \mathrm{N}(x,y)+\mathrm{N}(x',y')\\ \left|x+x'-y-y'\right| &\leqslant |x-y|+\left|x'-y'\right| \leqslant \mathrm{N}(x,y)+\mathrm{N}(x',y'),\end{aligned}$$

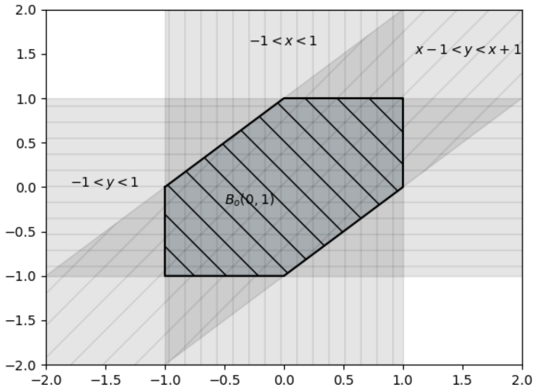
d'où l'inégalité triangulaire :

$$\mathrm{N}((x,y)+(x',y')) \leqslant \mathrm{N}(x,y)+\mathrm{N}(x',y').$$

(iii) Enfin soit (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, si $\mathrm{N}(x,y)=0$, alors en particulier $|x|=|y|=0$, donc $(x,y)=(0,0)$, d'où la propriété de séparation de N.

(iv) La boule unité ouverte associée est

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_o(0,1) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \mathrm{N}(x,y)<1\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1\right\}\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y|<1\right\}\\ &\qquad\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x-y|<1\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1<x<1\right\}\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1<y<1\right\}\\ &\qquad\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x-1<y<x+1\right\}\end{aligned}$$



Une correction de l'exercice 19.2

énoncé

Rappelons que les matrices élémentaires vérifient $\mathrm{E}_{i,j} \times \mathrm{E}_{k\ell} = \delta_{jk}\mathrm{E}_{i\ell}$, donc par exemple

$$\mathrm{E}_{1,1} \times \mathrm{E}_{1,2} = \mathrm{E}_{1,2} \text{ et } \mathrm{E}_{1,2} \times \mathrm{E}_{1,1} = 0_n$$

ainsi la norme d'un vecteur étant nulle si, et seulement si, le vecteur est nul (propriété de séparation), on ne peut avoir

$$\mathrm{N}(\mathrm{E}_{1,1} \times \mathrm{E}_{1,2}) = \mathrm{N}(\mathrm{E}_{1,2} \times \mathrm{E}_{1,1}).$$

Une correction de l'exercice 19.3

énoncé

- La suite de terme général $u_n = (2n\pi(\cos(2n\pi), \sin(2n\pi)) = (2n\pi, 0)$ est une suite de termes de A, et $\|u_n\|_1 = 2n\pi \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, donc A n'est pas bornée.
- Soit $(x, y) \in \mathrm{B}$, alors $x^2 + xy + y^2 = 1$, or $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$, donc $(x + \frac{1}{2}y)^2 \leqslant 1$, et $\frac{3}{4}y^2 \leqslant 1$, d'où $|y| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$, et par conséquent

$$|x| \leqslant \left|x + \frac{1}{2}y\right| + \left|-\frac{1}{2}y\right| \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{3}},$$

  ce qui donne $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y| \leqslant 1 + \frac{3}{\sqrt{3}}$.

- La suite des points $U_n = \left(\sqrt{1+n^2}, n\right)$ est une suite de points de C, et

$$\|U_n\|_\infty = \max\left(n, \sqrt{1+n^2}\right) = \sqrt{1+n^2} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$$

donc C n'est pas une partie bornée.

Une correction de l'exercice 19.4

énoncé

- Si pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n) \in A^n$, si $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A.$$

Alors il suffit de prendre $n = 2$, et pour tous $(x, y) \in A^2$, et tout $t \in [0\,;\,1]$, t et $1-t$ sont des réels positifs dont la somme vaut 1, donc $tx + (1-t)y \in A$, ce qui définit le fait que A est une partie convexe de E.

- Réciproquement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété :

$$\left.\begin{array}{r}\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in [0\,;\,+\infty[^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\\ \forall(x_1,\dots,x_n) \in A^n,\end{array}\right| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A.$$

(i) Au rang $n = 1$, c'est une évidence dont je vous laisse vous convaincre de la trivialité.

(ii) Le rang $n = 2$ est facultatif, mais on remarque que c'est la définition même d'une partie convexe.

(iii) Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Soient

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\lambda_{n+1}) \in [0\,;\,+\infty[^{n+1} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1,$$
$$(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \in A^{n+1},$$

montrons que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in A.$$

On sait que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ et que les λ_i sont positifs, donc les λ_i sont dans $[0\ ;\ 1]$.
Si $\lambda_{n+1} = 1$ alors les autres λ_i sont nuls et

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = x_{n+1} \in \mathrm{A}.$$

Si $\lambda_{n+1} \in [0\ ;\ 1[$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = t \times \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} x_i + (1-t) x_{n+1}$$

en posant $t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ qui vérifie $0 < t \leqslant 1$ car $\lambda_{n+1} < 1$.

Mais par hypothèse de récurrence, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} x_i \in \mathrm{A}$ car pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $\frac{\lambda_i}{t} > 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \frac{1}{t} \times t = 1$, et les x_i sont A.
Par conséquent, par convexité de A,

$$t \times \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{t} x_i + (1-t) x_{n+1} \in \mathrm{A},$$

autrement dit

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in \mathrm{A}, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 19.5

énoncé

1. *Ici on va faire paresseux mais efficace (ce qui est le top des mathématiques !) en se ramenant aux normes usuelles dans $\mathbb{K}^n$.*

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on sait que les dérivées $P^{(k)}$ sont nulles à partir d'un certain rang, et la formule de Taylor nous donne

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k,$$

donc les $\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ sont tout simplement les coordonnées de P dans la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.

Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On note $n \in \mathbb{N}^*$ un entier qui majore leurs deux degrés.
Alors $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, et on peut noter $X = \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(P) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $Y = \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(Q) \in \mathbb{K}^{n+1}$, les colonnes des coordonnées de P et Q dans la base canonique $\mathscr{C}$.
Notons N_1, N_2 et N_∞ les normes usuelles dans $\mathbb{K}^{n+1}$.

Alors pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$:

→ $\|\lambda P\|_i = N_i(\lambda X) = \lambda N_i(X) = \lambda \|P\|_i$. *(par homogénéité de N_i).*

→ $\|P + Q\|_i = N_i(X + Y) \leqslant N_i(X) + N_i(Y) = \|P\|_i + \|Q\|_i$,

(par l'inégalité triangulaire de N_i)

→ $\|P\|_i = 0 \iff N_i(X) = 0 \iff X = 0_{\mathbb{K}^n} \iff P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ *(par séparation de N_i).*

Donc ce sont bien trois normes dans $\mathbb{K}[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Reprenons $n \in \mathbb{N}^*$ et P comme dans l'énoncé.

→ Soit $p \in [\![0\ ;\ n]\!]$ tel que $\|P\|_\infty = |a_p|$, alors

$$\|P\|_\infty = |a_p| = \sqrt{|a_p|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2} \text{ (par croissance de } \sqrt{\square}\text{)}$$
$$= \|P\|_2 .$$

→ On sait *(ou on le prouve en passant par les carrés)* que pour tout réels a, b strictement positifs, $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$, donc par récurrence

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in [0\ ;\ +\infty[^n, \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}.$$

On en déduit que

$$\|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sqrt{|a_k|^2} = \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \|P\|_1 .$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons P_n le polynôme $\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{X}^k$.

   Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathrm{P}_n\|_\infty = 1, \qquad \|\mathrm{P}_n\|_1 = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1, \qquad \text{et} \quad \|\mathrm{P}_n\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} 1^2} = \sqrt{n+1}.$$

   donc

$$\frac{\|\mathrm{P}_n\|_1}{\|\mathrm{P}_n\|_2} = \sqrt{n+1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty,$$
$$\frac{\|\mathrm{P}_n\|_1}{\|\mathrm{P}_n\|_\infty} = n+1 \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty,$$
$$\frac{\|\mathrm{P}_n\|_2}{\|\mathrm{P}_n\|_\infty} = \sqrt{n+1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty,$$

   donc il n'y a pas d'équivalence entre les normes.

Une correction de l'exercice 19.6 *énoncé*

1. Remarquons que si f est $\mathscr{C}^2$ sur $[0\,;\,1]$, alors f'' est continue sur ce segment, donc par le théorème des bornes atteintes, $\|f''\|_\infty$ existe.
   Je vous laisse retrouver l'homogénéité et l'inégalité triangulaire directement à partir des mêmes propriétés de $\|.\|_\infty$ et de la valeur absolue.
   Pour la séparation, prenons $f \in \mathscr{C}^2([0\,;\,1], \mathbb{R})$, supposons que $\mathrm{N}(f) = 0$, et montrons que f est la fonction nulle :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}(f) = 0 &\iff \left\|f''\right\|_\infty + |f(0)| + |f'(0)| = 0 \\
&\iff \begin{cases} \|f''\|_\infty = 0, \\ |f(0)| = 0, \\ |f'(0)| = 0 \end{cases} \quad \textit{(car une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul)} \\
&\iff \begin{cases} f'' \text{est la fonction nulle}, \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} f \text{ est une fonction polynomiale de degré au plus } 1, \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \forall x \in [0\,;\,1],\ f(x) = f(0) + f'(0)x, \quad \textit{(par la formule de Taylor pour les polynômes)} \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases} \\
&\iff \forall x \in [0\,;\,1],\ f(x) = 0, \quad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

2. *L'inégalité des accroissements finis que l'énoncé nous conseille d'utiliser dit que si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, de dérivée bornée sur I, alors*

$$\forall (x,y)\in \mathrm{I}^2,\ \ |f(y)-f(x)| \leqslant \left\|f'\right\|_\infty^{\mathrm{I}} \times |y-x|.$$

En particulier, si $\mathrm{I}=[0\ ;\ 1]$, en prenant $y=0$:

$$\forall x\in [0\ ;\ 1],\ \ |f(x)-f(0)| \leqslant \left\|f'\right\|_\infty^{[0;1]} |x| \leqslant \left\|f'\right\|_\infty^{[0;1]}.$$

La fonction f est $\mathscr{C}^2$ sur $[0\ ;\ 1]$, donc elle vérifie l'inégalité de la remarque ci-dessus :

$$\begin{aligned}\forall x\in [0\ ;\ 1],\ \ |f(x)| &= |f(x)-f(0)+f(0)|\\ &\leqslant |f(x)-f(0)|+|f(0)| \leqslant \left\|f'\right\|_\infty + |f(0)|,\end{aligned}$$

donc

$$\|f\|_\infty \leqslant \left\|f'\right\|_\infty + |f(0)|.$$

Mais f' est $\mathscr{C}^1$ sur $[0\ ;\ 1]$, donc on peut aussi appliquer le même raisonnement à f', ce qui donne

$$\left\|f'\right\|_\infty \leqslant \left\|f''\right\|_\infty + \left|f'(0)\right|.$$

Il n'y a plus qu'à rassembler les deux morceaux pour obtenir l'inégalité voulue :

$$\|f\|_\infty \leqslant \left\|f''\right\|_\infty + \left|f'(0)\right| + |f(0)| = \mathrm{N}(f).$$

3. Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n : t\longmapsto t^n$.
Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$, f_n est bien $\mathscr{C}^2$ sur $[0\ ;\ 1]$, avec $\|f_n\|_\infty = 1$, puis, comme $f_n(0)=0$, $f_n'(0)=0$, et $f_n''(t)=n(n-1)t^{n-2}$, on a $\left\|f_n''\right\|_\infty = n(n-1)$, donc $\mathrm{N}(f_n)=n(n-1)$.
Ainsi

$$\frac{\mathrm{N}(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = n(n-1) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty,$$

ce qui prouve que N et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Une correction de l'exercice 19.7 énoncé

Notons $\|\square\|_1$ la norme usuelle sur $\mathscr{C}^0([0\,;\,1])$:

$$f \mapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f|.$$

Alors comme l'exponentielle est positive, pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([0\,;\,1])$, $\mathrm{N}(f) = \|f \times \exp\|_1$.

1. (a) Je vous laisse vérifier comment N hérite de l'homogénéité et de l'inégalité triangulaire de $\|\square\|_1$.
   (b) Si $f \in \mathrm{E}$ est telle que $\mathrm{N}(f) = 0$, alors par stricte positivité de l'intégrale des fonctions continues (ici $|f| \times \exp$ est continue), on en déduit que pour tout $t \in [0\,;\,1]$, $|f(t)|\mathrm{e}^t = 0$, donc f est nulle sur $[0\,;\,1]$, c.q.f.d.
2. La norme infini est $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0\,;\,1]} |f(x)|$.

   Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$, qui est bien une fonction de E.

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $t \mapsto t^{n-1}(n-t)\mathrm{e}^{-t}$ positive sur $[0\,;\,1]$; donc f_n est croissante sur $[0\,;\,1]$, et

     $$\|f_n\|_\infty = f_n(1) = \mathrm{e}^{-1}.$$

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

     $$\mathrm{N}(f_n) = \int_0^1 t^n\mathrm{e}^{-t} \times \mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

   - Ainsi $\dfrac{\|f_n\|_\infty}{\mathrm{N}(f_n)} = \frac{n+1}{\mathrm{e}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, ce qui prouve que N et $\|\square\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Une correction de l'exercice 19.8 énoncé

1. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire se vérifient immédiatement.

   Quant à l'axiome de séparation, si on suppose que $|f|_\varphi = 0$ alors $\int_0^1 |f|\varphi = 0$ et $|f|\varphi = 0$, puisque la fonction intégrée est positive et continue.

   Comme φ ne s'annule qu'en un nombre fini de points, notons $a_1, \ldots, a_p$ ces points. Alors la fonction f est nulle sur $[0\,;\,1] \setminus \{a_1, \ldots, a_p\}$ qui est une partie dense dans $[0\,;\,1]$, or on sait que f est continue sur $[0\,;\,1]$, donc elle est nulle sur cet intervalle.
2. Sur le segment (intervalle fermé borné) $[0, 1]$ les fonctions continues φ_1 et φ_2 sont

bornées et atteignent leurs bornes. Il existe x_1, x_2, y_1 et y_2, tels que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$

$$0 < \varphi_1(x_1) \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_1(y_1) \quad \text{et} \quad 0 < \varphi_2(x_2) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \varphi_2(y_2).$$

Il s'ensuit que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $1 \leqslant \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x_1)}$, donc

$$\varphi_2(x) = \varphi_2(x) \times 1 \leqslant \varphi_2(x) \times \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x_1)} \leqslant \varphi_2(y_2) \times \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x_1)} = \frac{\varphi_2(y_2)}{\varphi_1(x_1)}\varphi_1(x),$$

et de même en échangeant « 1 » et « 2 »

$$\varphi_1(x) \leqslant \frac{\varphi_1(y_1)}{\varphi_2(x_2)}\varphi_2(x), \text{ autrement dit } \frac{\varphi_2(x_2)}{\varphi_1(y_1)}\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x).$$

D'où, pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, les inégalités

$$\frac{\varphi_2(x_2)}{\varphi_1(y_1)}\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \frac{\varphi_2(y_2)}{\varphi_1(x_1)}\varphi_1(x).$$

Pour toute fonction $f \in \mathrm{E}$, en multipliant les membres de ces inégalités par $|f(x)|$ qui est positif, suivi par une intégration sur $[0\ ;\ 1]$ qui ne change pas le sens des inégalités (puisque l'intégrale est croissante), on obtient

$$\underbrace{\frac{\varphi_2(x_2)}{\varphi_1(y_1)}}_{=\beta}\|f\|_{\varphi_1} \leqslant \|f\|_{\varphi_2} \leqslant \underbrace{\frac{\varphi_2(y_2)}{\varphi_1(x_1)}}_{=\alpha}\|f\|_{\varphi_1}.$$

Ce qui prouve que les normes $\|\ \|_{\varphi_1}$ et $\|\ \|_{\varphi_2}$ sont équivalentes.

3. Notons $\|\cdot\|_1$ la première norme et $\|\cdot\|_2$ la seconde. On a évidemment $\|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_1$ mais, pour la fonction continue f_n définie par $f_n(x) = 1 - nx$ si $x \in \left]0, \frac{1}{n}\right]$ et 0 si $x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right]$, on a

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{1/n} x(1-nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{6n^2} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_2 = \int_0^{1/n} x^2(1-nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{12n^3},$$

ce qui prouve qu'il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\forall f \in \mathrm{E}, \alpha\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2$ $\left(\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} = 2n \to +\infty\right)$, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 19.9 *énoncé*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left\|u_{n+1}-\alpha\right\| &= \|f(u_n)-f(\alpha)\| \quad \text{(par définition de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et de } \alpha\text{)}\\ &\leqslant k\|u_n-\alpha\| \quad \text{(car } f \text{ est } k\text{-lipschitzienne).}\end{aligned}$$

   Or

   → Pour $n=0$, $\|u_0-\alpha\| \leqslant k^0\|u_0-\alpha\|$,

   → si pour un $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|u_n-\alpha\| \leqslant k^n\|u_0-\alpha\|,$$

   alors

$$\begin{aligned}\left\|u_{n+1}-\alpha\right\| &\leqslant k\|u_n-\alpha\| \quad \text{(par le calcul ci-dessus)}\\ &\leqslant k\times k^n\|u_0-\alpha\| = k^{n+1}\|u_0-\alpha\|.\end{aligned}$$

   On a donc prouvé par récurrence les inégalités demandées.

2. Si $|k|<1$, alors $k^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, donc par encadrement $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \alpha$.

Une correction de l'exercice 19.10 *énoncé*

1. Posons $v = u - \mathrm{id}_E$. On doit donc montrer que $\mathrm{Ker}(v) = (\mathrm{Im}(v))^{\perp}$. Or on sait déjà grâce au théorème du rang que $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ ont des dimensions complémentaires, donc il n'y a plus qu'à montrer que $\mathrm{Ker}(v) perp \, \mathrm{Im}(v)$.

   Soit $x \in \mathrm{Ker}(v)$, et $y \in \mathrm{Im}(v)$, alors $v(x) = 0_E$, c'est-à-dire $u(x) = x$, et il existe $t \in E$ tel que $y = v(t) = u(t) - t$, donc

$$\begin{aligned}(x \mid y) &= (x \mid u(t)-t) = (x \mid u(t)) - (x \mid t)\\ &= (u(x) \mid u(t)) - (x \mid t) \quad \text{(car } x = u(x)\text{)}\\ &= (x \mid t) - (x \mid t) \quad \text{(car } u \text{ est une isométrie, donc conserve le produit scalaire)}\\ &= 0\end{aligned}$$

   ainsi $\mathrm{Ker}(v) \perp \mathrm{Im}(v)$.

   Mais de plus, grâce au théorème du rang, ces deux sous-espaces vectoriels ont des dimensions complémentaires, donc on peut conclure qu'ils sont supplémentaires, et orthogonaux.

2. Notons p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(v)$. Soit $x \in E$, pour montrer que

$u_n(x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} p(x)$, on va d'abord évaluer $\|u_n(x)-p(x)\|$, et si on peut le majorer par une quantité qui tend vers 0.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|u_n(x)-p(x)\| &= \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)-p(x)\right\| = \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p(x)\right\|\\ &= \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(u^k(x)-p(x)\right)\right\|\\ &= \frac{1}{n}\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\left(u^k(x)-p(x)\right)\right\|.\end{aligned}$$

Or $p(x)\in \mathrm{Ker}(v)$, donc $v(p(x))=0_{\mathrm{E}}$, d'où $u(p(x))=p(x)$. Mais alors, par récurrence, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $u^k(p(x))=p(x)$, donc

$$\begin{aligned}u^k(x)-p(x) &= u^k(x)-u^k(p(x))\\ &= u^k(x-p(x)) \text{ \textit{(par linéarité de u donc de u^k)}}\end{aligned}$$

Mais $x-p(x)$ est dans $\mathrm{Im}(v)$, ainsi il existe $t\in\mathrm{E}$ tel que

$$x-p(x)=v(t)=(u-\mathrm{id}_{\mathrm{E}})(t)=u(t)-t.$$

D'où pour tout $k\in\mathbb{N}$, $u^k(x-p(x))=u^k(u(t)-t)=u^{k+1}(t)-u^k(t)$, et par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\left(u^k(x)-p(x)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1}(t)-u^k(t)\\ &= u^n(t)-u^0(t) \text{ \textit{(par somme télescopique)}}\\ &= u^n(t)-t\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|u_n(x)-p(x)\| &= \frac{1}{n}\|u^n(t)-t\|\\ &\leqslant \frac{1}{n}(\|u^n(t)\|+\|t\|) \text{ \textit{(par inégalité triangulaire)}}\end{aligned}$$

Enfin, comme u est une isométrie, $\|u(t)\|=\|t\|$, et par récurrence $\|u^n(t)\|=\|t\|$, donc derechef avec l'inégalité triangulaire :

$$\|u_n(x)-p(x)\|=\frac{1}{n}\|u^n(t)-t\|\leqslant\frac{1}{n}2\|t\|,$$

et on peut conclure par encadrement le résultat voulu.

Une correction de l'exercice 19.11

énoncé

(1) ➟ De $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t \longrightarrow 0]{} 1$, on déduit que

$$(1+x^2+y^2)\frac{\sin(y)}{y} \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} (1+0+0)\times 1 = 1\,;$$

➟ En posant $r = \sqrt{x^2+y^2}$, et $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, on a

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^2}\right| \leqslant r = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} 0,$$

donc par encadrement, $\frac{x^2y}{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} 0$.

On en déduit que $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} (1,0)$.

(2) On rappelle que pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $|ab| \leqslant \frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2\right)$, donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|xy| = \left(\sqrt{|x|}\sqrt{|y|}\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{|x|}^2+\sqrt{|y|}^2\right)\right)^2 = \frac{1}{4}(|x|+|y|)^2,$$

et enfin

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{1}{4}(|x|+|y|),$$

or $|x|+|y| \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} 0$, donc par encadrement, $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} 0$.

(3) On connaît le développement limité de sin en 0, on en déduit que

$$\begin{aligned} x\sin(y) - y\sin(x) &\underset{(x,y)\to(0,0)}{=} x\left(y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^4)\right) - y\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) \\ &= -\frac{1}{6}xy\left(y^2 - x^2 + o(x^3) + o(y^3)\right) \end{aligned}$$

et on sait que $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, donc

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{1}{12}(x^2+y^2)\left(y^2-x^2+o(x^3)+o(y^3)\right)$$

donc par encadrement $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} 0$.

(4) Posons $g(x,y) = \frac{xy^6}{x^6+y^8}$

- $g(t^2,t)=\frac{1}{1+t^4}\xrightarrow[t\to 0]{}1$,
- $g(-t^2,t)=-\frac{1}{1+t^4}\xrightarrow[t\to 0]{}-1$,

or $\lim\limits_{t\to 0}(t^2,t)=(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}(-t^2,t)$, donc g n'a pas de limite en $(0,0)$, et par conséquent, f non plus.

Une correction de l'exercice 19.12

énoncé

1. - Pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in \mathrm{K}$,

$$\begin{aligned}\|x\|_1&=\sum_{i=1}^n|x_i|=\sum_{i=1}^n x_i \ \ \textit{(car les } x_i \textit{ sont dans } \mathbb{R}_+\textit{)}\\ &=a\ \ \textit{(car } x\in \mathrm{K}\textit{)}.\end{aligned}$$

Donc K est une partie bornée pour la norme 1, et pour toutes les normes car on est dans un espace vectoriel de dimension finie.

- Pour montrer que K est une partie fermée, prenons une suite $\left(\mathrm{M}_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de K, que l'on note $\mathrm{M}_p=(x_{1,p},\dots,x_{n,p})$, qui converge vers $\mathrm{M}=(x_1,\dots,x_n)$, et montrons que $x\in \mathrm{K}$.

Comme $\lim\limits_{p\to+\infty}\mathrm{M}_p=\mathrm{M}$, on sait que les coordonnées de M_p tendent vers les coordonnées de M :

$$\forall i\in [\![1\ ;\ n]\!],\ \ \lim_{p\to+\infty}x_{i,p}=x_i.$$

Or pour tout $i\in [\![1\ ;\ n]\!]$, $x_{i,p}\geqslant 0$ car $\mathrm{M}_p\in\mathrm{K}$, donc par prolongement des inégalités larges à la limite, $x_i\geqslant 0$.

De plus

- pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=1}^n x_{i,p}=a$ car $\mathrm{M}_p\in\mathrm{K}$, donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^n x_{i,p}\right)=a$;
- et par la linéarité de la limite $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^n x_{i,p}\right)=\sum\limits_{i=1}^n\left(\lim\limits_{p\to+\infty}x_{i,p}\right)=\sum\limits_{i=1}^n x_i$;
- donc par unicité de la limite $\boxed{\sum\limits_{i=1}^n x_i=a}$.

Donc $\mathrm{M}\in\mathrm{K}$, et K bien une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

- **Autre méthode :** les applications $g_i:(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_i$, et $s:(x_1,\dots,x_n)\mapsto\sum\limits_{i=1}^n x_i$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$. De plus $[0\ ;+\infty[$ et $\{a\}$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}$, donc les parties $g_1^{-1}([0\ ;+\infty[)$, …, $g_n^{-1}([0\ ;+\infty[)$, et $s^{-1}(\{a\})$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}^n$.

De plus, je vous laisse vérifier que

$$\mathrm{K} = g_1^{-1}([0\ ;\ +\infty[) \cap \cdots \cap g_n^{-1}([0\ ;\ +\infty[) \cap s^{-1}(\{a\}),$$

donc K est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ comme intersection de fermés.

2. (a) Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, \ldots, x_n\right) \\ &= \left(x_1x_2 - \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\right) \times x_3 \cdots x_n \\ &= -\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 \times x_3 \cdots x_n \end{aligned}$$

donc

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \leqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, \ldots, x_n\right)$$

dès que $x_3 \cdots x_n \geqslant 0$, et en particulier,

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, \ldots, x_n\right)$$

dès que $(x_1, \ldots, x_n) \in\,]0\ ;\ +\infty[^n$.

(b) La fonction f est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^n$, et K est un compact de $\mathbb{R}^n$, donc f est bornée sur K. De plus, comme f est à valeurs réelles, f atteint ses bornes, autrement dit il existe $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{K}$ tel que

$$f(y) = \max_{x \in \mathrm{K}} f(x).$$

On remarque que le vecteur $u = \left(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}\right)$ est dans K et que $f(u) = \left(\frac{a}{n}\right)^n > 0$. Or $f(y) > f(u)$, donc $f(y) > 0$, c'est-à-dire $y_1 \cdots y_n > 0$, ce pourquoi il est nécessaire que les y_i soient strictement positifs.

Montrons que $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$, et par l'absurde, supposons que deux de ses coordonnées sont $y_i \neq y_j$. Comme $f(y) = y_1 \cdots y_n$ ne dépend pas de l'ordre des composantes de y, on peut supposer que $y_1 \neq y_2$. Mais alors, d'après la question précédente, $f(y) < f\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, y_3, \ldots, y_n\right)$.

Or on vérifie que ce vecteur $\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, y_3, \ldots, y_n\right)$ est dans K, puisque la somme de ses composantes est encore $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$, donc ceci contredit que $f(y)$ est le maximum de f sur K.

On conclut que $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$, donc comme leur somme est égale à a, on obtient que $y = \left(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}\right)$, donc que $f(y) = \left(\frac{a}{n}\right)^n$ est le maximum de f sur K.

3. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une liste de réels positifs. Notons $a=\sum_{i=1}^{n}x_i$. Si $a=0$, alors tous les x_i sont nuls, et l'inégalité demandée revient à $0\leqslant 0$, ce qui est plutôt vrai.
   Si $a>0$, alors d'après la question précédente,
$$x_1\times\cdots\times x_n\leqslant\left(\frac{a}{n}\right)^n,$$
   d'où l'on déduit bien que
$$(x_1\times\cdots\times x_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{a}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad\text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 19.13 *énoncé*

Pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}\left(\mathrm{I}_p-\mathrm{A}\right)\times\mathrm{U}_n&=(\mathrm{I}_n-\mathrm{A})\times\sum_{k=0}^{n}\mathrm{A}^k=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{A}^k-\sum_{k=0}^{n}\mathrm{A}^{k+1}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{A}^k-\sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{A}^k\\&=\mathrm{I}_p-\mathrm{A}^{n+1}.\end{aligned}$$
Or par linéarité de la limite,
$$\mathrm{A}^{n+1}=\mathrm{U}_{n+1}-\mathrm{U}_n\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}\mathrm{B}-\mathrm{B}=0_p$$
Ainsi
$$\left(\mathrm{I}_p-\mathrm{A}\right)\times\mathrm{U}_n=\mathrm{I}_p-\mathrm{A}^{n+1}\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}\mathrm{I}_p.$$
Or $\varphi:\mathrm{M}\mapsto(\mathrm{I}_p-\mathrm{A})\mathrm{M}$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, donc c'est une application continue sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, d'où
$$\left(\mathrm{I}_p-\mathrm{A}\right)\times\mathrm{U}_n=\varphi(\mathrm{U}_n)\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}\varphi(\mathrm{B})=\left(\mathrm{I}_p-\mathrm{A}\right)\times\mathrm{B}.$$
Ainsi par unicité de la limite, $\left(\mathrm{I}_p-\mathrm{A}\right)\times\mathrm{B}=\mathrm{I}_p$, ce qui prouve que $\mathrm{I}_p-\mathrm{A}$ est inversible d'inverse B.

Une correction de l'exercice 19.14 *énoncé*

- La fonction $(x,y)\mapsto y-x$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$; h est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier $(x,y)\mapsto h(y)-h(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ comme fraction de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, fixé, alors $f(x,y) = \frac{h(y)-h(x)}{y-x} \xrightarrow[y \longrightarrow x]{} h'(x)$, donc on va poser $f(x,x) = h'(x)$.
- Montrons que f est continue en tout point de Δ, autrement dit que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \ f(x,y) \xrightarrow[(x,y) \longrightarrow (x_0,x_0)]{} f(x_0,x_0) = h'(x_0).$$

Pour cela, prenons $x_0 \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon > 0$, et cherchons un $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ \|(x,y)-(x_0,x_0)\| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x,y)-f(x_0,x_0)| \leqslant \varepsilon,$$

où $\|.\|$ est la norme de notre choix *(on s'en fiche elles sont toutes équivalentes dans $\mathbb{R}^2$).*

- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, avec l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |f(x,y)-f(x_0,x_0)| &\leqslant |f(x,y)-f(x,x)| + |f(x,x)-f(x_0,x_0)| \\ &= \left|f(x,y)-h'(x)\right| + \left|h'(x)-h'(x_0)\right| \end{aligned}$$

or

→ on sait que $f(x,y) = \frac{h(y)-h(x)}{y-x} \xrightarrow[y \longrightarrow x]{} h'(x)$, donc il existe $\delta_0 > 0$ tel que $|y-x| \leqslant \delta_0$ entraîne $|f(x,y)-h'(x)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$;

→ on sait aussi que h' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en x_0, donc il existe $\delta_1 > 0$ tel que $|x-x_0| \leqslant \delta_1$ entraîne $|h'(x)-h'(x_0)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$.

Prenons donc $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_0, \delta_1)$, et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(x,y)-(x_0,x_0)\|_\infty \leqslant \delta$, autrement dit $\max(|x-x_0|, |y-x_0|) \leqslant \delta$, alors

→ a fortiori $|x-x_0| \leqslant \delta_1$, donc $|h'(x)-h'(x_0)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$,

→ d'autre part

$$|y-x| \leqslant |y-x_0| + |x_0-y| \leqslant 2\delta \leqslant \delta_0,$$

donc $|f(x,y)-h'(x)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$,

ainsi on a bien

$$|f(x,y)-f(x_0,x_0)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 19.15 *énoncé*

La fonction $f : (x, y) \mapsto y - x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car elle est polynomiale (ou car elle est linéaire), et

$$U = f^{-1}(]0\ ;+\infty[)$$

donc U est l'image réciproque par une fonction continue d'un intervalle ouvert, et on peut en déduire que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
De même

$$V = f^{-1}(]-\infty\ ;0])$$

donc V est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Une correction de l'exercice 19.16 *énoncé*

- L'ensemble $\mathscr{E}$ des matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1 peut s'écrire

  $$\mathscr{E} = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\{1\}).$$

  Or
  - le singleton $\{1\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$, et le déterminant est une application continue sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, donc E est encore une partie fermée de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ comme image réciproque d'une fermé par une application continue ;
  - On peut considérer $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ comme le noyau de l'application linéaire $\varphi : M \mapsto M^\top - M$, qui est continue parce que linéaire, donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{0_n\})$ est une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comme image réciproque d'un singleton ;
  - ainsi $\mathscr{E}$ est bien une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comme intersection de deux parties fermées.
- Les matrices $M_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & n+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont dans $\mathscr{E}$, ont pour norme infinie $\|M_n\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|(M_n)_{i,j}\right| = n+1$ qui tend vers $+\infty$, donc $\mathscr{E}$ n'est pas une partie bornée.

Une correction de l'exercice 19.17 *énoncé*

1. Si $a = b$, alors $B_f(a, r) \subset B_f(b, s) = B_f(a, s)$ équivaut à $r \leqslant s$, d'où $\|a - b\| = 0 \leqslant s - r$;

- si $a \neq b$, alors prenons $x = a + \frac{r}{\|a-b\|}(a-b)$ est dans $\mathrm{B}_f(a,r)$ puisque

$$\|x-a\| = \frac{r}{\|a-b\|}\,\|a-b\| = r,$$

donc par hypothèse, x est aussi dans $\mathrm{B}_f(b,s)$, d'où $\|b-x\| \leqslant s$.
Or

$$\|b-x\| = \left\| b - a - \frac{r}{\|a-b\|}(a-b) \right\| = \left(1 + \frac{r}{\|a-b\|}\right)\|b-a\| = \|b-a\| + r,$$

d'où l'inégalité $\|b-a\| + r \leqslant s$, dont on déduit l'inégalité voulue.

2.

Une correction de l'exercice 19.18 *énoncé*

- Soit $\mathrm{M} = \left(m_{i,j}\right) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, alors ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, ainsi pour tout $j \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 = 1$.
  Par conséquent, $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 = n$, et on reconnaît la norme euclidienne canonique dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\|\mathrm{M}\|_2 = n$.
  Ainsi $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée pour la norme euclidienne canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée.
- L'application $\mathrm{M} \mapsto \left(\mathrm{M}, \mathrm{M}^\top\right)$ est une application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, donc elle est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  De plus le produit matriciel $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est bilinéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, donc est une application continue.
  Ainsi par composition, $u : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} \times \mathrm{M}^\top$ est une application continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  Or on remarque que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) = u^{-1}(\{\mathrm{I}_n\})$, et le singleton $\{\mathrm{I}_n\}$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, comme tout singleton, donc $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comme image réciproque d'une partie fermée par une application continue.

Une correction de l'exercice 19.19 *énoncé*

- L'inclusion $\mathrm{Vect}(\mathscr{O}) \subset \mathrm{E}$ est évidente.
- Réciproquement, soit $x \in \mathrm{E}$, et montrer que $x \in \mathrm{Vect}(\mathscr{O})$.
  - Si $x \in \mathscr{O}$, alors a fortiori $x \in \mathrm{Vect}(\mathscr{O})$.
  - Si $x \notin \mathscr{O}$, prenons $a \in \mathscr{O}$, avec alors il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}_o(a,r) \subset \mathscr{O}$.

Ainsi le vecteur

$$t = a + \frac{r}{2\|x-a\|}(x-a)$$

est dans $B_o(a,r)$ puisque

$$\|t-a\| = \frac{r}{2\|x-a\|}\|x-a\| = \frac{r}{2} < r,$$

donc $t \in \mathcal{O}$.

Or, quelques petites manipulations algébriques nous donnent

$$t = a + \frac{r}{2\|x-a\|}(x-a) \Longleftrightarrow x = \left(1 - \frac{2\|x-a\|}{r}\right)a + \frac{2\|x-a\|}{r}t,$$

donc x est combinaison linéaire de a et t qui sont tous les deux dans $\mathcal{O}$, d'où $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{O})$.

On a bien montré que $E \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{O})$, ce qui achève l'exercice.

Une correction de l'exercice 19.20

énoncé

1. Supposons que f est continue en 0_E, prenons $a \in E$, alors

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f(x-a) \ \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ &\xrightarrow[x\longrightarrow a]{} f(0_E) \ \textit{(par continuité de } f \textit{ en } 0_E\textit{)} \\ &= 0_F \ \textit{(car } f \textit{ est linéaire).} \end{aligned}$$

   donc $f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow a]{} f(a)$, ce qui prouve que f est continue en a.

   Comme ceci est vrai pour tout $a \in E$, on peut conclure que f est continue sur E.

2. Supposons que pour toute suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée, et montrons que f est continue sur E.

   Pour cela, d'après la question précédente, il suffit de montrer que f est continue en 0_E, autrement dit que $f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow 0_E]{} f(0_E) = 0_E$.

   On va pour ce faire utiliser la caractérisation séquentielle de la limite : prenons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E qui converge vers 0_E, et montrons que $f(x_n)$ tend vers 0_E.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{\|x_n\|}x_n & \text{si } x_n \neq 0_E \\ 0_E & \text{si } x_n = 0_E, \end{cases}$$

est bornée, car ses termes sont de norme 1 ou 0, ainsi par hypothèse, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(u_n) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{\|x_n\|} f(x_n)\right) = \frac{1}{\|x_n\|} f(x_n) & \text{si } x_n \neq 0_E \\ f(0_E) = 0_E & \text{si } x_n = 0_E, \end{cases}$$

donc on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x_n) = \|x_n\| f(u_n),$$

donc

$$\|f(x_n)\| = \|x_n\| \, \|f(u_n)\|.$$

Or on sait que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc il existe un réel M tel que

$$\|f(x_n)\| = \mathrm{M}\, \|x_n\|,$$

et comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_E, on peut conclure par encadrement que $f(x_n)$ converge aussi vers 0_E, ce qu'il fallait démontrer.

Une correction de l'exercice 19.21 *énoncé*

- On vérifie comme d'habitude que $\mathrm{P} \mapsto \sup_{x\in[-1\,;1]} |\mathrm{P}(x)|$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, et $\mathbb{C}$ muni du module est aussi un espace vectoriel normé.
- De plus pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'application $u : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}(z)$ est linéaire.
  Ainsi u est une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés de dimension finie, donc on sait qu'elle est lipschitzienne, ce qui permet de conclure.

Une correction de l'exercice 19.22 *énoncé*

- Tout d'abord prenons une matrice triangulaire supérieure $\mathrm{T} = \left(t_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.
  Notons aussi δ un réel la plus petite distance entre deux termes diagonaux différents : $\delta = \min_{i\neq j} \left|t_{i,i} - t_{j,j}\right|$, ou bien $\delta = 1$ si tous les termes diagonaux sont égaux.
  Enfin considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice diagonale $\mathrm{D}_n = \mathrm{Diag}\left(\frac{\delta}{n}, \frac{\delta}{2n}, \ldots, \frac{\delta}{pn}\right)$.
  - On peut déjà remarquer que $\mathrm{D}_n \xrightarrow[b\longrightarrow+\infty]{} 0_p$, donc que $\mathrm{T} + \mathrm{D}_n \xrightarrow[p\longrightarrow+\infty]{} \mathrm{T}$.
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice $\mathrm{U}_n = \mathrm{T} + \mathrm{D}_n$ est encore triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses termes diagonaux $t_{i,i} + \frac{\delta}{in}$, que l'on note $u_{i,i}^{(n)}$.

Montrons alors que ces termes diagonaux sont deux à deux distincts. Prenons $(i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$, supposons que $u_{i,i}^{(n)} = u_{j,j}^{(n)}$ et $i \neq j$.

Alors

- si $t_{i,i} = t_{j,j}$, $u_{i,i}^{(n)} = u_{j,j}^{(n)}$ entraîne que $\frac{\delta}{in} = \frac{\delta}{jn}$, donc que $i = j$ car $\delta > 0$, ce qui contredit l'hypothèse ;
- si $t_{i,i} \neq t_{j,j}$, alors

$$\delta \leqslant \left|t_{i,i} - t_{j,j}\right| = \left|u_{i,i}^{(n)} - \frac{\delta}{in} - \left(u_{j,j}^{(n)} - \frac{\delta}{jn}\right)\right| = \frac{\delta}{n}\left|\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right| \leqslant \frac{\delta}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \delta,$$

  d'où $\delta < \delta$ ce qui ne se peut.

On a donc prouvé que $U_n = T + D_n$ est une matrice dont les valeurs propres sont deux à deux distinctes, donc elles sont diagonalisables.

On a prouvé que toute matrice triangulaire supérieure était limite de matrices diagonalisables.

➟ Enfin, si une matrice A est trigonalisable, alors il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telle que $A = PTP^{-1}$.
D'après le résultat précédent, il existe une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices diagonalisables qui tend vers T, mais comme l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire, donc continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$PU_nP^{-1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} PTP^{-1} = A.$$

Enfin les matrices sont semblables aux matrices diagonalisables U_n, donc elles sont aussi diagonalisables.
On a donc bien montré que toute trigonalisable est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

Une correction du problème 19.23 *énoncé*

Partie I - Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

1. La matrice $M(a,b)$ est symétrique, réelle dans cette question puisqu'on suppose que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, donc par le théorème spectral elle est diagonalisable.
2. (a) La somme des coefficients de chaque ligne égale $b + (n-1)a$, donc le produit matriciel donne

$$M(a,b) \times V = (b + (n-1)a) \times V,$$

donc V est un vecteur propre de M,

(b) et $b+(n-1)a$ est la valeur propre associée à V.

3. Pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{P}_{1,0}(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix} \underset{\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 + \cdots + \mathrm{C}_n}{=} \begin{vmatrix} x-(n-1) & -1 & \cdots & -1 \\ x-(n-1) & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ x-(n-1) & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-n+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\mathrm{C}_2 \leftarrow \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{C}_n \leftarrow \mathrm{C}_n + \mathrm{C}_1}}{=} (x-n+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-n+1)(x+1)^{n-1}, \quad \text{C.Q.F.D}$$ *(déterminant d'une matrice triangulaire).*

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{a,b}(x) &= \det(x\mathrm{I}_n - \mathrm{M}(a,b)) \\ &= \det(x\mathrm{I}_n - b\mathrm{I}_n - a\mathrm{M}(1,0)) \quad \textit{(avec la remarque initiale dans l'énoncé)} \\ &= \det((x-b)\mathrm{I}_n - a\mathrm{M}(1,0)) \\ &= \det\left(a\left(\frac{x-b}{a}\mathrm{I}_n - \mathrm{M}(1,0)\right)\right) \\ &= a^n \det\left(\frac{x-b}{a}\mathrm{I}_n - \mathrm{M}(1,0)\right) \\ &= a^n \mathrm{P}_{1,0}\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

(b) On en déduit, grâce à la question précédente, que

$$\begin{aligned} P_{a,b}(X) &= a^n\left(\frac{X-b}{a}-(n-1)\right)\left(\frac{X-b}{a}+1\right)^{n-1} \\ &= (X-b-(n-1)a)(X-b+a)^{n-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, les valeurs propres de $M(a,b)$ sont $b+(n-1)a$ et $b-a$, qui sont bien distinctes puisqu'on a supposé que $a \neq 0$, d'ordres de multiplicités algébriques respectifs 1 et $n-1$.

5. D'après la première question avec $(a,b)=(1,0)\in\mathbb{R}^2$, la matrice $M(1,0)$ est diagonalisable, ainsi par la caractérisation de la diagonalisabilité par un polynôme annulateur, on sait que

$$\prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(M(1,0))}(X-\lambda)=(X+1)(X-(n-1))$$

est un polynôme annulateur de $M(1,0)$, par conséquent

$$(M(1,0)+I_n)(M(1,0)-(n-1)I_n)=0_{M_n(\mathbb{C})}.$$

On rappelle que $M_{a,b}=bI_n+aM(1,0)$. Donc

$$\begin{aligned} Q_{a,b}(M_{a,b}) &= (M(a,b)-(b-a)I_n)(M(a,b)-(b+(n-1)a)I_n) \\ &= (bI_n+aM(1,0)-(b-a)I_n)(bI_n+aM(1,0)-(b+(n-1)a)I_n) \\ &= (aM(1,0)+aI_n)(aM(1,0)-(n-1)aI_n) \\ &= a^2(M(1,0)+I_n)(M(1,0)-(n-1)I_n) \\ &= 0_{M_n(\mathbb{C})}, \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

- si $a=0$, alors $M(0,b)=bI_n$ est diagonale, donc extrêmement diagonalisable ;
- si $a\neq 0$, alors $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$, scindé, et à racines simples (car $a\neq 0$ donc $b-a\neq b+(n-1)a$), donc par la caractérisation de la diagonalisabilité par un polynôme annulateur,$M(a,b)$ est diagonalisable.

6. D'après le théorème de division euclidienne, il existe un unique couple $(Q,R)\in(\mathbb{R}[X])^2$ tel que :

$$\begin{cases} (*) : X^k = Q_{a,b}Q+R, \\ \deg(R)<\deg(Q_{a,b}). \end{cases}$$

Comme $\deg\left(Q_{a,b}\right) = 2$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R = \alpha X + \beta$. Les réels $b - a$ et $b+(n-1)a$ sont racines de $Q_{a,b}$, ainsi, en remplaçant X par ces deux racines dans $(*)$, on obtient le système linéaire suivant vérifié par α et β :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (b-a)^k & = & 0 \times Q(b-a) + \alpha(b-a) + \beta, \\ (b+(n-1)a)^k & = & 0 \times Q(b+(n-1)a) + \alpha(b+(n-1)a) + \beta, \end{array}\right.$$

d'où par les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, ou aussi $L_2 \leftarrow (b-a)L_2 - (b+(n-1)a)L_1$, :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & \frac{(b+(n-1)a)^k - (b-a)^k}{na}, \\ \beta & = & \frac{(b+(n-1)a)(b-a)^k - (b-a)(b+(n-1)a)^k}{na}. \end{array}\right.$$

Alors, en remplaçant X par $M(a,b)$ dans $(*)$, comme $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$, on obtient

$$\begin{aligned} M(a,b)^k &= \alpha M(a,b) + \beta I_n \\ &= \frac{(b+(n-1)a)^k - (b-a)^k}{na} M(a,b) \\ &\qquad + \frac{(b+(n-1)a)(b-a)^k - (b-a)(b+(n-1)a)^k}{na} I_n. \end{aligned}$$

7. Puisque $|b-a| < 1$ et $|b+(n-1)a| < 1$, on a :

$$\lim_{k \to +\infty} (b-a)^k = \lim_{k \to +\infty} (b+(n-1)a)^k = 0.$$

L'expression de $M(a,b)^k$ de la question précédente nous permet d'en déduire que

$$\lim_{k \to +\infty} M(a,b)^k = 0 \times M(a,b) + 0 \times I_n = 0_{M_n(\mathbb{C})}.$$

Ainsi $\left(M(a,b)^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Partie II – Limite des puissances d'une matrice

8. Les coordonnées de $u(e_1)$ dans la base canonique sont données par la première colonne de $A = T$, donc $u(e_1) = \lambda_1 e_1$.

On en déduit d'une part que λ_1 est une valeur propre de u car $e_1 \neq 0_E$, et d'autre part par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$, puis, par homogénéité de la norme,

$$\|u^k(e_1)\| = |\lambda_1|^k \|e_1\|,$$

or $\lambda_1 \in \mathrm{Sp}(u)$, donc par hypothèse de l'énoncé $|\lambda_1| < 1$.
On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} |\lambda_1|^k = 0$, d'où $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|u^k(e_1)\right\| = 0$.
Comme on est dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ qui est de dimension finie, donc dans lequel toutes les normes sont équivalentes, on en déduit que la suite $\left(u^k(e_1)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul.

9. Notons $t_{i,j}$ le terme général de la matrice T.
La $(i+1)^{\mathrm{e}}$ colonne de T donne les coordonnées de $u(e_{i+1})$ dans la base canonique, donc

$$\begin{aligned} u(e_{i+1}) &= \sum_{k=1}^{n} t_{k,i+1} e_k \\ &= \sum_{k=1}^{i} t_{k,i+1} e_k + t_{i+1,i+1} e_{i+1} + \underbrace{\sum_{k=i+2}^{n} t_{k,i+1} e_k}_{=0} \\ &= \sum_{k=1}^{i} t_{k,i+1} e_k + \lambda_{i+1} e_{i+1} \quad \textit{(car T est triangulaire supérieure, donc } t_{k,i+1} = 0 \textit{ pour } k \geqslant i+2\textit{)} \end{aligned}$$

Ainsi en posant $x = \sum\limits_{k=1}^{i} t_{k,i+1} e_k \in \mathrm{Vect}\left((e_j)_{j\in[\![1,i]\!]}\right)$, on a le résultat demandé :

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x.$$

En prenant composant par u^m les deux membres de cette égalité, et en utilisant la linéarité de u,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad u^{m+1}(e_{i+1}) - \lambda_{i+1} u^m(e_{i+1}) = u^m(x).$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Si $\lambda_{i+1} = 0$, la relation ci-dessus donne $u^{m+1}(e_{i+1}) = u^m(x)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, donc en posant $m = k-1$ (qui est bien dans $\mathbb{N}$ puisque k est dans $\mathbb{N}^*$) on a immédiatement le résultat voulu ;
- si $\lambda_{i+1} \neq 0$, alors on peut diviser l'égalité précédente par λ_{i+1}^{m+1}, et pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{\lambda_{i+1}^{m+1}} u^{m+1}(e_{i+1}) - \frac{1}{\lambda_{i+1}^{m}} u^m(e_{i+1}) = \frac{1}{\lambda_{i+1}^{m+1}} u^m(x).$$

Ainsi par addition de ces termes de $m = 0$ à $m = k-1$:

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_{i+1}^{m+1}} u^m(x) &= \sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}^{m+1}} u^{m+1}(e_{i+1}) - \frac{1}{\lambda_{i+1}^{m}} u^m(e_{i+1}) \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_{i+1}^{k}} u^k(e_{i+1}) - \frac{1}{\lambda_{i+1}^{0}} u^0(e_{i+1}) \ \ \textit{(par télescopie)} \\ &= \frac{1}{\lambda_{i+1}^{k}} u^k(e_{i+1}) - e_{i+1},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}u^k(e_{i+1}) &= \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\lambda^k}{\lambda_{i+1}^{m+1}} u^m(x) \\ &= \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x), \quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

10. On rappelle que x est de la forme $x = \sum_{j=1}^{i} x_j e_j$, avec $(x_1, \ldots, x_i) \in \mathbb{C}^i$.

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, en prenant l'image par u^k dont on utilise la linéarité,

$$u^k(x) = \sum_{j=1}^{i} x_j u^k(e_j).$$

Or par hypothèse pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, $\lim_{k \to +\infty} u^k(e_j) = 0_{\mathbb{C}^n}$, ainsi par linéarité de la limite

$$\lim_{k \to +\infty} u^k(x) = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

Prenons $\varepsilon > 0$, alors par définition de la limite, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$, $\|u^k(x)\| \leqslant \varepsilon$.
Alors pour tout $k \geqslant k_0 + 1$,

$$\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) = \sum_{m=0}^{k_0-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) + \sum_{m=k_0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).$$

donc par inégalité triangulaire

$$\left\|\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right\| = \left\|\sum_{m=0}^{k_0-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right\| + \left\|\sum_{m=k_0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right\|.$$

Or d'une part

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{m=0}^{k_0-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right\| &= \left\|(\lambda_{i+1})^k \times \sum_{m=0}^{k_0-1} \lambda_{i+1}^{-m-1} u^m(x)\right\| \\ &= \underbrace{\left|\lambda_{i+1}^k\right|}_{\xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{}0} \times \underbrace{\left\|\sum_{m=0}^{k_0-1} \lambda_{i+1}^{-m-1} u^m(x)\right\|}_{\text{ne dépend pas de } k} \\ &\xrightarrow[k\longrightarrow+\infty]{} 0 \quad (\textit{car } \left|\lambda_{i+1}\right| < 1),\end{aligned}$$

donc il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|\sum_{m=0}^{k_0-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right\| \leqslant \varepsilon.$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{m=k_0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right\| &\leqslant \sum_{m=k_0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \underbrace{\|u^m(x)\|}_{\leqslant \varepsilon} \quad (\textit{avec l'inégalité triangulaire}) \\ &\leqslant \sum_{m=k_0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \times \varepsilon \quad (\textit{par définition de } k_0\textit{, et positivité des facteurs}) \\ &\leqslant \varepsilon \times \sum_{m=0}^{+\infty} |\lambda_{i+1}|^{\ell} = \frac{\varepsilon}{1 - \left|\lambda_{i+1}\right|} \quad (\textit{car } 0 \leqslant \left|\lambda_{i+1}\right| < 1)\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $k \geqslant \max(k_0 + 1, k_1)$

$$\left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leqslant \varepsilon + \frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|} = \varepsilon \left(1 + \frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|}\right).$$

Par définition de la limite *(si on n'aime pas ne pas avoir un beau petit epsilon tout propre au terme du raisonnement, il suffit de revenir au début et de prendre $\frac{\varepsilon}{1+\frac{1}{1-|\lambda_{i+1}|}}$)*, on a bien établi que

$$\lim_{k \to +\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

En utilisant le même raisonnement que dans la question 8., on montre aussi que $\lim\limits_{k \to +\infty} \|\lambda_{i+1}^k e_{i+1}\| = 0$. Or, d'après l'inégalité triangulaire :

$$0 \leqslant \|u^k(e_{i+1})\| \leqslant \|\lambda_{i+1}^k e_{i+1}\| + \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\|,$$

et d'après ce qui précède le majorant converge vers 0, donc par encadrement

$$\lim_{k \to +\infty} \|u^k(e_{i+1})\| = 0,$$

puis encore comma dans 8., on conclut que

$$\lim_{k \to +\infty} u^k(e_{i+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

11. Les questions précédentes forment un raisonnement par récurrence, dont la question 8. constitue l'initialisation et les deux questions suivantes l'hérédité, qui prouve que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lim\limits_{k \to +\infty} u^k(e_i) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

    En particulier, pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, les coordonnées de $u^k(e_i)$ convergent vers 0 quand k tend vers $+\infty$.
    Or ces coordonnées sont exactement les composantes de la matrice $\mathrm{A}^k = \mathrm{T}^k$, donc on peut affirmer que la suite $\left(\mathrm{T}^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

12. Toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable (dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$).

Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$. Par récurrence, on prouve alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PT^kP^{-1}$.

De plus T et A ont les mêmes valeurs propres (qui sont tout simplement les termes de la diagonale de T), donc par hypothèse de l'énoncé, les valeurs propres λ de T vérifient $|\lambda| < 1$.

Ainsi, d'après la question précédente $\lim\limits_{k\to+\infty} T^k = 0_{M_n(\mathbb{C})}$.

Par continuité du produit matriciel, ou plus précisément de l'application linéaire $\square \mapsto P \times \square \times P^{-1}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} A^k &= \lim_{k\to+\infty} PT^kP^{-1}\\ &= P \times \left(\lim_{k\to+\infty} T^k\right) \times P^{-1}\\ &= P \times 0_{M_n(\mathbb{C})} \times P^{-1} = 0_{M_n(\mathbb{C})},\quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Partie III - Application à la méthode de Gauss-Seidel

13. Puisque M est une matrice triangulaire, son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux. C'est-à-dire, par définition de M, $\det(M) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Or A est à diagonale strictement dominante (voir la définition donnée dans l'énoncé), donc en particulier ses coefficients diagonaux sont non nuls puisque :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| \geqslant 0.$$

Ainsi $\det(M) \neq 0$, et M est inversible.

14. D'après l'énoncé $AX = Y$, donc $(M - F)X = Y$, d'où $MX = FX + Y$.

En multipliant chaque membre de cette égalité à gauche par M^{-1}, on obtient $X = M^{-1}FX + M^{-1}Y = BX + M^{-1}Y$, C.Q.F.D.

15. Par définition, V est un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ, donc $\mathrm{BV} = \lambda\mathrm{V}$, c'est-à-dire $\mathrm{M}^{-1}\mathrm{FV} = \lambda\mathrm{V}$. En multipliant chaque membre de cette égalité à gauche par M, on a donc bien $\mathrm{FV} = \lambda\mathrm{MV}$.

    Notons $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *(on remarque que l'énoncé introduit des v_i sans les définir).*

    Soit $i \in [\![1, n]\!]$, le i^{e} coefficient de FV est $\sum\limits_{j=1}^{n} f_{i,j} v_j$, tandis que celui de $\lambda\mathrm{MV}$ est $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda m_{i,j} v_j$.

    L'égalité $\mathrm{FV} = \lambda\mathrm{MV}$ implique donc que pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} f_{i,j} v_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda m_{i,j} v_j.$$

    Or, par définition de F, pour tout $j \in [\![1\ ;\ i]\!]$, $f_{i,j} = 0$, et pour tout $j \in [\![i+1\ ;\ n]\!]$ $\forall j \in [\![i+1, n]\!]$, $m_{i,j} = 0$.

    Donc l'égalité ci-dessus peut se réécrire :

$$\sum_{j=i+1}^{n} f_{i,j} v_j = \sum_{j=1}^{i} \lambda m_{i,j} v_j.$$

    Remplaçons les $f_{i,j}$ et les $m_{i,j}$ par leurs définitions, pour $j \geqslant i+1$ et $j \leqslant i$ respectivement :

$$-\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} v_j = \sum_{j=1}^{i} \lambda a_{i,j} v_j.$$

    En isolant le terme correspondant à $j = i$ dans le membre de droite, on a alors :

$$-\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} v_j = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda a_{i,j} v_j + \lambda a_{i,i} v_i.$$

    Il ne plus qu'à regrouper les deux sommes, et on a l'égalité voulue :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda a_{i,i} v_i = -\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} v_j \right).$$

16. L'existence de i_0 ne pose pas de problème, puisqu'un ensemble fini de réels admet toujours un maximum. La vraie question est de démontrer que pour un tel indice i_0, $v_{i_0} \neq 0$.
Si ce n'était pas le cas, on aurait $|v_{i_0}| = 0 = \max_{j \in [\![1,n]\!]} |v_j|$, donc pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $0 \leqslant |v_j| \leqslant 0$, puis $v_j = 0$.
Ainsi V serait le vecteur nul, ce qui est absurde puisqu'il s'agit d'un vecteur propre.
Prenons l'égalité de la question précédente pour $i = i_0$, et divisons par $v_{i_0} \neq 0$:

$$\lambda a_{i_0,i_0} = -\left(\sum_{j=i_0+1}^{n} a_{i_0,j} \frac{v_j}{v_{i_0}} + \lambda \sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0,j} \frac{v_j}{v_{i_0}} \right).$$

Donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} \left| a_{i_0,j} \frac{v_j}{v_{i_0}} \right| + \left| \lambda \sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0,j} \frac{v_j}{v_{i_0}} \right|.$$

Par multiplicativité de la valeur absolue, et encore par l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} \left| a_{i_0,j} \right| \left| \frac{v_j}{v_{i_0}} \right| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} \left| a_{i_0,j} \right| \left| \frac{v_j}{v_{i_0}} \right|.$$

Or $|v_{i_0}| = \max_{j \in [\![1,n]\!]} |v_j|$, donc

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad \left| \frac{v_j}{v_{i_0}} \right| = \frac{|v_j|}{|v_{i_0}|} \leqslant 1.$$

, Ainsi l'inégalité ci-dessus devient :

$$|\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} \left| a_{i_0,j} \right| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} \left| a_{i_0,j} \right|, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

17. Raisonnons par l'absurde, et supposons $1 \leqslant |\lambda|$. L'inégalité ci-dessus implique donc que

$$|\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant |\lambda| \sum_{j=i_0+1}^{n} \left| a_{i_0,j} \right| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} \left| a_{i_0,j} \right| = |\lambda| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|.$$

Si $|\lambda| \geqslant 1$, en particulier $\lambda \neq 0$, donc on peut diviser par $|\lambda| > 0$ ci-dessus, et on obtient

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|.$$

Or A est à diagonale strictement dominante, donc

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}| < |a_{i_0,i_0}|,$$

Donc $|a_{i_0,i_0}| < |a_{i_0,i_0}|$, ce qui ne peut être.
On a bien par l'absurde que, pour toute valeur propre λ de B, $|\lambda| < 1$.
Donc, par le résultat principal de la partie II de ce problème, $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathrm{B}^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$, C.Q.F.D.

18. Par définition de la suite $(\mathrm{X}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et par la question 14. :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{X}_{k+1} - \mathrm{X} = (\mathrm{B}\mathrm{X}_k + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{Y}) - (\mathrm{B}\mathrm{X} + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{Y}) = \mathrm{B}(\mathrm{X}_k - \mathrm{X}).$$

On en déduit par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{X}_k - \mathrm{X} = \mathrm{B}^k(\mathrm{X}_0 - \mathrm{X}).$$

Or $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathrm{B}^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$, donc par continuité du produit matriciel, ou de l'application linéaire $\square \mapsto \square \times (\mathrm{X}_0 - \mathrm{X})$,

$$\lim_{k \to +\infty} \mathrm{B}^k(\mathrm{X}_0 - \mathrm{X}) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \times (\mathrm{X}_0 - \mathrm{X}) = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})},$$

ainsi $\lim\limits_{k \to +\infty} (\mathrm{X}_k - \mathrm{X}) = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, d'où $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathrm{X}_k = \mathrm{X}$.
On a bien construit une suite qui converge vers X.

Une correction du problème 19.24 *énoncé*

I. Résultats préliminaires

I.1 Étude d'une série entière

1. (a) Soit x un réel strictement positif.
   - La fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$;
   - en $+\infty$, par croissances comparées $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$,

     > *Très souvent, quand l'intégrande étudiée contient une exponentielle qui tend vers 0 en $+\infty$, elle est négligeable en $+\infty$ par croissances comparées devant $\frac{1}{t^2}$.*

     or la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$, donc par domination, $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est aussi intégrable sur $[1\,;+\infty[$;
   - en 0, $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$; or, comme $1-x<1$ car $x>0$, la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0\,;1]$, donc par équivalence $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est aussi intégrable sur $]0\,;1]$;

   on en déduit que la fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale définissant $\Gamma(x)$.
   En conclusion, la fonction Γ est définie sur $]0\,;+\infty[$.

   (b) Pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, en plus d'être continue, la fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$, donc par stricte positivité de l'intégrale généralisée convergente, $\Gamma(x)>0$.

2. Soit $x>0$. On effectue dans l'intégrale $\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ une intégration par parties dans laquelle on pose $u(t)=t^x$ et $v(t)=-\mathrm{e}^{-t}$.
   - Ces fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$,
   - et de plus

$$u(t)\times v(t) = -t^x\mathrm{e}^{-t}\begin{cases} \xrightarrow[t\longrightarrow0]{} 0 & \text{car } x>0,\\ \xrightarrow[t\longrightarrow+\infty]{} 0 & \text{par croissances comparées.}\end{cases}$$

   donc cette intégration par parties est licite. Comme l'intégrale de départ est convergente, on obtient alors l'égalité

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
$$= x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x) \quad \text{C.Q.F.D}$$

Soit $\alpha \in]-1 ; +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$, qui existe bien puisque $n+\alpha+1>0$.

3. Grâce à la question précédente, on peut affirmer que les coefficients a_n sont strictement positifs.
   Prenons un réel $x>0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| &= \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\frac{n!}{(n+1)!}\,x \\ &= (n+\alpha+1)\times\frac{1}{(n+1)}\,x \quad \textit{(grâce à la relation de la question précédente)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n}\,x \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} x,\end{aligned}$$

   Ainsi d'après la règle de d'Alembert :
   - si $x>1$, la série $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement, donc $R \leqslant 1$;
   - si $x<1$, la suite $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, donc $R \geqslant 1$;

   On en déduit que le rayon de convergence de cette série entière est $\boxed{R=1}$.

4. Prenons un réel $x \in]-1,1[$.
   Tout d'abord

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{n!}t^{n+\alpha}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,$$

   ainsi pour appliquer le théorème d'intégration terme à terme, posons, pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $t \in]0 ; +\infty[$,

$$f_n(t) = \frac{x^n}{n!}t^{n+\alpha}\mathrm{e}^{-t}.$$

   Par conséquent :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{x^n}{n!}t^{n+\alpha}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0 ; +\infty[$ par construction *(d'après la première question)* ;
   - par construction aussi, pour tout $t \in]0 ; +\infty[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \mathrm{e}^{-t}t^\alpha \times \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(xt)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-t}t^\alpha \times \mathrm{e}^{xt} = \mathrm{e}^{-(1-x)t}t^\alpha,$$

     donc $\sum f_n$ converge simplement sur $]0 ; +\infty[$,

- et sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n : t \mapsto t^\alpha e^{-(1-x)t}$ est bien continue *(par morceaux)* sur $]0\,;+\infty[$;
- la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)|$ est convergente car les f_n étant positives, il s'agit de la série $\sum a_n x^n$ absolument convergente puisque $|x| < R = 1$.

Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, par conséquent la fonction S est intégrable sur I et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t,$$

en d'autres termes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-(1-x)t}\mathrm{d}t.$$

Enfin, l'application $t \mapsto (1-x)t$ est une bijection strictement croissante *(puisque $x < 1$)*, de classe $\mathscr{C}^1$, de $]0\,;+\infty[$ dans $]0\,;+\infty[$, donc le changement de variable $u = (1-x)t$ permet d'affirmer que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-(1-x)t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1-x}\right)^\alpha e^{-u} \frac{1}{1-x}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}, \quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

I.2 Projections orthogonales

5. Pour tout vecteur $x \in E$, $\pi_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel qu'il existe $t \in F^\perp$ vérifiant $x = \pi_F(x) + t$; autrement dit $\pi_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - \pi_F(x) \in F^\perp$.

On fixe $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de F, et x un vecteur de E.

6. *L'égalité est censée être un résultat du cours mais on va le redémontrer au cas où.*

Le vecteur $\pi_F(x)$ est dans F, et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de F, donc on sait que

$$\pi_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle \pi_F(x) \mid e_i \rangle \, e_i,$$

or pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\langle x \mid e_i \rangle &= \langle \pi_F(x) + (x - \pi_F(x)) \mid e_i \rangle \\ &= \langle \pi_F(x) \mid e_i \rangle + \langle x - \pi_F(x) \mid e_i \rangle \quad \textit{(par linéarité à gauche du produit scalaire)} \\ &= \langle \pi_F(x) \mid e_i \rangle + 0 \quad \textit{(car } x - \pi_F(x) \in F^\perp \textit{ et } e_i \in F\textit{),}\end{aligned}$$

d'où l'égalité demandée.

7. Le théorème de Pythagore permet d'écrire, puisque $\pi_F(x) \perp x - \pi_F(x)$,

$$\|x\|^2 = \|x - \pi_F(x) + \pi_F(x)\|^2 = \|x - \pi_F(x)\|^2 + \|\pi_F(x)\|^2,$$

et

$$\begin{aligned}\|\pi_F(x)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \, e_i \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|\langle x \mid e_i \rangle \, e_i\|^2 \quad \textit{(encore avec Pythagore puisque les } e_i \textit{ sont deux à deux orthogonaux)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle^2 \, \|e_i\|^2 \quad \textit{(par homogénéité de la norme)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle^2 \quad \textit{(car les } e_i \textit{ sont unitaires),} \ \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

II. Polynômes de Laguerre

8. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité demandée *(appelée arithmético géométrique)* est une conséquence directe de ce que $(|a| - |b|)^2 \geqslant 0$.

9. Soit $(f,g) \in E_\alpha^2$, alors la fonction $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, et les fonctions positives $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)^2$ et $x \mapsto x^\alpha e^{-x} g(x)^2$ sont intégrables sur $]0\,;+\infty[$.
Or pour tout $x \geqslant 0$ on a, d'après la question précédente :
$$\left|x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(x^\alpha e^{-x} f(x)^2 + x^\alpha e^{-x} g(x)^2\right),$$
donc par domination, la fonction $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$, ce qui assure la convergence de l'intégrale demandée.
10. La partie E_α de $\mathscr{C}^0(]0\,;+\infty[,\mathbb{R})$ est non vide, puisqu'elle contient l'application nulle.
Pour tous f,g de E_α et λ,μ deux réels, la fonction
$$\begin{aligned} x \mapsto x^\alpha e^{-x}(\lambda f + \mu g)^2 = x^\alpha e^{-x}\lambda^2 x^\alpha e^{-x} f^2(x) &+ 2\lambda\mu x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)\\ &+ \mu^2 x^\alpha e^{-x} g^2(x), \end{aligned}$$
est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ comme combinaison linéaire de fonctions intégrables, donc $\lambda f + \mu g$ est encore dans E_α, C.Q.F.D.
11. Pour tout polynôme $P = \sum_{k=p}^{q} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, avec $a_p \neq 0$ et $a_q \neq 0$,
   - la fonction $x \mapsto x^\alpha e^{-x} P(x)$ est continue sur $]0\,;+\infty[$;
   - $x^\alpha e^{-x} P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^{\alpha+p} \underset{x\to 0}{=} O\left(\frac{1}{x^{-\alpha-p}}\right)$, avec $-\alpha - p < 1$;
   - par croissances comparées,
$$x^\alpha e^{-x} P(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$
et je vous laisse rédiger la conclusion.
12. Pour tout $x > 0$,
$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= x^{-\alpha} e^x \varphi_0(x) = x^{-\alpha} e^x x^\alpha e^{-x} = 1,\\ \psi_1(x) &= x^{-\alpha} e^x \varphi_1'(x) = x^{-\alpha} e^x \left((1+\alpha)x^\alpha e^{-x} - x^{\alpha+1} e^{-x}\right)\\ &= -x + \alpha + 1\\ \psi_2(x) &= x^{-\alpha} e^x \varphi_2''(x)\\ &= x^{-\alpha} e^x \left((\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha e^{-x} - 2(\alpha+2)x^{\alpha+1} e^{-x} + x^{\alpha+2} e^{-x}\right)\\ &= x^2 - 2(\alpha+2)x + (\alpha+2)(\alpha+1). \end{aligned}$$

13. La question précédente permet de conjecturer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ψ_n est une fonction polynomiale, de degré n, et de coefficient dominant $(-1)^n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $u : x \mapsto x^{n+\alpha}$ et $v : x \mapsto e^{-x}$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, et grâce à la formule de Leibniz, pour tout $x > 0$,

$$\varphi_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) u^{(k)}(x),$$

Ici $n+\alpha$ n'est pas un entier, donc on n'a pas droit aux factorielles, mais on a la fonction Γ, qui vérifie $n+\alpha+i = \frac{\Gamma(n+\alpha+i+1)}{\Gamma(n+\alpha+i)}$ d'après la question 2.,

or
par récurrence, pour tout $k \in [\![0 ; n]\!]$,

$$u^{(k)}(x) = (n+\alpha)\cdots(n+\alpha-k+1)x^{n-k+\alpha} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha-k)},$$

donc

$$\varphi_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha)-k+1} x^{n-k+\alpha}(-1)^{n-k} e^{-x},$$

d'où

$$\boxed{\psi_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n-k+1+\alpha)} x^{n-k}$$
$$= \boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(k+1+\alpha)} x^{k}},$$

qui est bien une expression polynomiale, de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n$.

14. D'après la question 9., l'application $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ est bien définie sur $E_\alpha \times E_\alpha$.
La symétrie et la bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont des conséquences immédiates de la bilinéarité du produit des réels, ainsi que de la linéarité de l'intégration de fonctions intégrables.
De plus, pour toute fonction $f \in E_\alpha$,

- $\langle f,f\rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} f(x)^2 \mathrm{d}x \geqslant 0$ par positivité de l'intégration,
- et si $\langle f,f\rangle = 0$, l'application (intégrable) $x \mapsto x^\alpha \mathrm{e}^{-x} f(x)^2$ étant continue et positive sur $]0,+\infty[$, on déduit par stricte positivité de l'intégrale, que cette fonction est nulle sur $]0,+\infty[$, donc f est nulle sur $]0,+\infty[$, puisque $x^\alpha \mathrm{e}^{-x} > 0$.

  Enfin, on en déduit que f est nulle sur $[0,+\infty[$ puisqu'elle est continue sur cet intervalle et nulle sur $]0\,;\,+\infty[$.

Ainsi : $\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathrm{E}_\alpha.}$

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$.
En procédant comme dans la question 13., pour tout $x > 0$, on peut noter

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n-j+\alpha+1)} x^{n-j+\alpha} \mathrm{e}^{-x} = x^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-x}\eta_{n,k}(x),$$

en posant

$$\eta_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n-j+\alpha+1)} x^{n-j-1}.$$

La fonction $\eta_{n,k}$ est polynomiale *(et même de degré $n-1$ et de coefficient dominant $(-1)^k$)* car pour tout $j \in [\![0\,;\,k]\!] \subset [\![0\,;\,n-1]\!]$, $n-j-1 \geqslant 0$.
En particulier $\eta_{n,k}$ est prolongeable par continuité en 0, d'où, puisque $\alpha+1 > 0$, on déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \varphi_n^{(k)}(x) = 0}.$$

Enfin, $\eta_{n,k}$ étant polynomiale, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\eta_{n,k}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^p)$, et par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}} &\underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{x^{p+\alpha+1}\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^{p+\alpha+1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1) \quad \textit{(par croissances comparées)},\end{aligned}$$

d'où le résultat demandé.

16. Soit $m, n \in \mathbb{N}$, on sait déjà que

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} \psi_m(x) x^{-\alpha} e^{x} \varphi_n^{(n)}(x) dx = \int_0^{+\infty} \psi_m(x) \varphi_n^{(n)}(x) dx.$$

Montrons, par récurrence finie sur $k \in [[0, n]]$, la proposition $\mathscr{P}_k$ définie par :

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)dx$ converge et $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^k \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\varphi$

- La propriétés $\mathscr{P}_0$ vient d'être établie.
- Soit $k \in [\![0\ ;\ n-1]\!]$ tel que $\mathscr{P}_k$ est vraie.
  On effectue une intégration par parties :
  - Les fonctions $\psi^{(k)}$ et $\varphi_n^{(n-k-1)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
  - La fonction $\psi^{(k)}$ est polynomiale, donc admet une limite en 0^+.
    Comme $n-k-1 \in [\![0\ ;\ n-1]\!]$, on peut affirmer grâce aux limites de la question 11. que $\lim_{x\to 0^+} \varphi_n^{(n-k-1)}(x) = 0$.
  - La fonction $\psi^{(k)}$ est toujours aussi polynomiale, donc avec le même raisonnement que pour $\eta_{n,k}$ (voir la question précédente), il existe un entier $q \in \mathbb{N}$ pour lequel $\psi^{(k)}(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x^q)$.
    D'après la question précédente encore, vu que $n-k-1 \in [\![0\ ;\ n-1]\!]$, $\varphi_n^{(n-k-1)}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)$.
    Ainsi $\psi^{(k)}(x)\varphi_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^q e^{-\frac{x}{2}}\right)$, donc $\psi^{(k)}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

  Ainsi par intégration par parties, on obtient d'une part que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi^{(k+1)}(x)\varphi_n^{(n-k-1)}(x)dx$ existe, et que

$$\begin{aligned}\langle \psi_m, \psi_n \rangle &= (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\varphi_n^{(n-k)}(x)dx \\ &= (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x)\varphi_n^{(n-k-1)}(x)dx, \quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Ainsi P_k est vraie pour tout $k \in [\![0\ ;\ n]\!]$, et en particulier

$$\boxed{\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)dx}.$$

Soit enfin $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$.
Quitte à utiliser la symétrie du produit scalaire on peut supposer $m < n$.
Dans ce cas, ψ_m étant polynomiale de degré m, $\psi_m^{(n)}$ est nulle et on a bien $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = 0$, donc

$$\boxed{\text{La famille } (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est orthogonale}}.$$

17. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente,

$$\|\psi_n\|_\alpha^2 = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_n^{(n)}(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x,$$

or ψ_n est une fonction polynomiale de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n$, donc $\psi_n^{(n)}$ est la constante $= (-1)^n n!$.
Par conséquent

$$\boxed{\|\psi_n\|_\alpha^2 = (-1)^{2n} n! \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = n!\, \Gamma(n+\alpha+1).}$$

III. Approximation

18. En posant $\varepsilon_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|_\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient la famille orthonormale $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de E_α.
Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ la famille $(\varepsilon_n)_{0\leqslant n\leqslant \mathrm{N}}$ est une base orthonormée de V_N, ainsi d'après les questions 6. et 7.,

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \langle f_k, \varepsilon_n\rangle^2 = \|\pi_\mathrm{N}(f_k)\|_\alpha^2 = \|f_k\|_\alpha^2 - \|f_k - \pi_\mathrm{N}(f_k)\|_\alpha^2 \leqslant \|f_k\|_\alpha^2.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum \frac{\langle f_k,\psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$ sont donc majorées, d'où *(grâce au théorème de la limite monotone)* cette série converge.

Ainsi $\boxed{\text{la somme } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k,\psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} \text{ existe.}}$

Pour le calcul de la somme, prenons $n \in \mathbb{N}$.

$$\langle f_k, \psi_n \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} e^{-kx} \psi_n(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-kx} \varphi_n^{(n)}(x) dx.$$

La fonction f_k étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, les intégrations par parties successives de la question 16. restent valables en remplaçant ψ_m par f_k dans la seconde des intégrales ci-dessus, ce qui nous donne

$$\langle f_k, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} f_k^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx = k^n \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} e^{-(k+1)x} dx.$$

Le changement de variable $u = (k+1)x$ *($x \mapsto (k+1)x$ est une bijection $\mathscr{C}^1$ strictement croissante de $]0 ; +\infty[$ dans $]0 ; +\infty[$)* permet alors d'écrire

$$\int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} e^{-(k+1)x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{u^{n+\alpha}}{(k+1)^{n+\alpha}} e^{-u} \frac{1}{k+1} du = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(k+1)^{n+\alpha+1}}.$$

D'où $\langle f_k, \psi_n \rangle = \dfrac{k^n \Gamma(n+\alpha+1)}{(k+1)^{n+\alpha+1}}$.

Ainsi, d'après la question 17 et la notation de la question 2 :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^{2n} \Gamma(n+\alpha+1)}{n!(k+1)^{2n+2\alpha+2}} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{k}{k+1} \right)^{2n}.$$

Comme $\frac{k}{k+1} \in]-1,1[$, d'après la question 4.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} &= \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left[1 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right]^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, à l'aide du changement de variable $x \mapsto (2k+1)x = u$ *(évidemment licite)*

$$\|f_k\|_\alpha^2 = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} e^{-2kx} dx = \frac{1}{(2k+1)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}.$$

On a bien prouvé que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \|f_k\|_\alpha^2 = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}.}$$

19. D'après la question précédente

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \|f_k\|_\alpha^2,$$

et d'après la question 7.

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \|f_k\|_\alpha^2 - \|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2,$$

par conséquent $\boxed{\lim_{N\to+\infty} \|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha = 0}$.

20. Soit $\varepsilon > 0$.
Par définition de la limite d'une suite, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $N \geqslant N_0$ $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \leqslant \varepsilon$.
Il suffit de prendre $P = \pi_{N_0}(f_k)$, alors $p \in V_{N_0} \subset \mathscr{P}$, et $\|f_k - P\|_\alpha \leqslant \varepsilon$.

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue tendant vers 0 en $+\infty$.
On admet que $f \in E_\alpha$.

21. Soit $\varepsilon > 0$.
La fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) & \text{si } t \in\,]0,1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est
   - continue sur $]0\,;\,1]$ comme composée de $-\ln$ qui est continue sur $]0\,;\,1]$, à valeurs dans $[0\,;\,+\infty[$, par f qui est continue sur $[0\,;\,+\infty[$;
   - et vérifie $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = \lim\limits_{T\to+\infty} f(T) = 0$.

Donc g est continue sur $[0\,;\,1]$.
Soit $\varepsilon_1 > 0$. D'après le résultat admis, il existe alors $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, tels que

$$\forall t \in [0,1],\quad \left| g(t) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^k \right| \leqslant \varepsilon_1.$$

L'application $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et elle est à valeurs dans $]0,1]$. On en déduit, pour tout $x>0$:

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k \mathrm{e}^{-kx}\right| \leqslant \varepsilon_1, \text{ puis : } \left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f_k(x)\right)^2 \leqslant \varepsilon_1^2.$$

D'où :

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f_k\right\|_\alpha = \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f_k(x)\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon_1^2\,\Gamma(\alpha+1).$$

Finalement le choix $\varepsilon_1=\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)}}$ assure $\boxed{\text{l'existence de } n\in\mathbb{N} \text{ et de}}$ $\boxed{(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \text{ tels que :}}$

$$\boxed{\left\|f-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f_k\right\|_\alpha \leqslant \varepsilon.}$$

22. Soit $\varepsilon>0$.
D'après la question précédente, il existe $n\in\mathbb{N}$ et $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$ tels que

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f_k\right\|_\alpha \leqslant \varepsilon/2.$$

D'après la question 20., pour tout $\varepsilon_1>0$ et pour tout $k\in[\![0\,;\,n]\!]$ il existe $p_k\in\mathscr{P}$ tel que $\|f_f-p_k\|_\alpha \leqslant \varepsilon_1$; en particulier pour $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2\left(1+\sum\limits_{k=0}^{n}|\lambda_k|\right)}$.

Posons $p=\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_k p_k$. Alors

$$\boxed{\|f-p\|_\alpha \leqslant \left\|f-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f_k\right\|_\alpha + \left\|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(f_k-p_k)\right\|_\alpha \leqslant \varepsilon/2+\sum_{k=0}^{n}|\lambda_k|\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon.}$$

23. Considérons, sur $[0,+\infty[$, la fonction $f : x\mapsto h(\sqrt{x})\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$. Il est clair que $f\in \mathrm{E}_\alpha$.

Soit $\varepsilon > 0$.
D'après la question précédente il existe $p_1 \in \mathscr{P}$ tel que : $\|f - p_1\|_\alpha \leqslant \varepsilon$.
Or

$$\begin{aligned}\|f - p_1\|_\alpha^2 &= \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} \left(h(\sqrt{x})\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - p_1(x)\right)^2 \mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty} x^\alpha \left(h(\sqrt{x}) - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} p_1(x)\right)^2 \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante, de $]0, +\infty[$ dans lui-même, on obtient alors, à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$:

$$\|f - p_1\|_\alpha^2 = 2\int_0^{+\infty} u^{2\alpha+1} \left(h(u) - \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} p_1(u^2)\right)^2 \mathrm{d}u.$$

Cette égalité est vraie pour tout $\alpha > -1$, en particulier pour $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\|f - p_1\|_{-\frac{1}{2}}^2 = 2\int_0^{+\infty} \left(h(u) - \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} p_1(u^2)\right)^2 \mathrm{d}u.$$

Soit p la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $p(u) = p_1(u^2)$.
Alors la fonction $u \mapsto h(u) - \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} p(u)$ est paire et

$$\|f - p_1\|_{-\frac{1}{2}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(u) - \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} p(u)\right)^2 \mathrm{d}u.$$

Ainsi $\boxed{\text{il existe une fonction polynomiale } p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ telle que :}}$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(u) - \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} p(u)\right)^2 \mathrm{d}u \leqslant \varepsilon.}$$