

Révisions de PCSI

Exercice 20.1 – (avec la définition de la dérivabilité)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivables en 0 pour lesquelles il existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(kx) = kf(x)$.

Exercice 20.2

Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \frac{2}{e^{2x}-1} - \frac{1}{x}$.
Préciser l'allure de sa courbe au voisinage du point d'abscisse 0.

Exercice 20.3

En raisonnant par l'absurde et en utilisant le théorème de Rolle, montrer que le polynôme $P = X^n + aX + b$ (a et b sont deux réels, et $n \geq 2$) admet au plus trois racines réelles.

Exercice 20.4 – Théorème de Rolle sur un intervalle non borné

- Sur** $[a, +\infty[$: soit a un réel et g une fonction continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$, dérivable sur l'intervalle $]a, +\infty[$ et qui vérifie $g(a) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
 - On considère la fonction G définie sur $[0, 1]$ par $G(x) = g\left(\frac{1}{x} + a - 1\right)$ si $x \in]0 ; 1]$, et $G(0) = 0$. Montrer que G est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.
 - Montrer que G' s'annule en un point de $]0, 1[$.
 - En déduire qu'il existe $c \in]a, +\infty[$, tel que $g'(c) = 0$.
- Sur** \mathbb{R} : soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} qui admet la même limite finie en $-\infty$ et $+\infty$. En étudiant la fonction $f \circ \tan$ sur $] -\pi/2, \pi/2[$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 20.5 – (*)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant la propriété

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y) - f(x)f(y).$$

Exercice 20.6 – Dérivée nulle pour une fonction non constante

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R}^* par $\varphi(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$.

1. Montrer que φ est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer sa dérivée.
2. En déduire la valeur de $\arctan(x) + \arctan(1/x)$ pour tout réel x non-nul.

Exercice 20.7 – (*)

Soit $f :]0 ; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = 0$ et

$$\forall x \in]0,1[, f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 0.$$

Démontrer que f est négative sur $[0,1]$. (On pourra s'intéresser à $f \times \exp$.)

Exercice 20.8 – Dérivées successives

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée n -ème de la fonction g_n définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g_n(x) = x^{n-1}e^{1/x}$.

Exercice 20.9

Montrer que la fonction ci-dessous est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1 ; 1[$, et donner l'expression de sa dérivée :

$$x \mapsto -\frac{1}{2} \ln(x^2 - 2 \cos(\theta)x + 1) + i \arctan\left(\frac{x \sin(\theta)}{1 - x \cos(\theta)}\right).$$

Exercice 20.10 – (*)

1. Résoudre selon les valeurs du réel λ l'équation $AX = B$, où

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & \lambda \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions réelles f dérivables sur \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(y) - f(x) = (y - x)f'(\lambda x + (1 - \lambda)y).$$

Programme de PC

Exercice 20.11 – Dérivées successives : polynômes d'Hermite

1. Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$, montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = e^{-x^2} H_n(x)$.
2. Trouver une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 entre les termes de la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (On pourra utiliser la formule de dérivation de Leibniz.)
3. Montrer que $(P, Q) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, et que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
(On pourra montrer que $\deg(H_n) = n$, puis que pour tout polynôme P et tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle P | H_n \rangle = \langle P^{(n)} | H_0 \rangle$.)

Exercice 20.12

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , a_1 et a_2 appartenant à I , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I telle que la famille $(f(a_1), f(a_2))$ est libre. Démontrer qu'il existe $c \in I$ pour lequel $f'(c) \in \text{Vect}(f(a_1), f(a_2))$.

Exercice 20.13

Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$, et $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue sur $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$.

À l'aide de l'application $t \mapsto \langle f(b) - f(a) | f(t) \rangle$, où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ désigne un produit scalaire dans \mathbb{R}^n , montrer qu'il existe $c \in]a ; b[$ vérifiant

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a) \|f'(c)\|.$$

Exercice 20.14

Soient u, v, w dans $\mathcal{C}^2([a ; b], \mathbb{R})$ vérifiant

$$\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Montrer qu'il existe un réel $c \in]a ; b[$ qui vérifie

$$\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 20.15

Calculer pour tout réel x , par dérivation, le déterminant

$$D_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \sin(x) \\ 1 & \cos(x+a) & \sin(x+a) \\ 1 & \cos(x+b) & \sin(x+b) \end{vmatrix}.$$

Systemes différentiels linéaires

Exercice 20.16

- Justifier sans calcul que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
- Diagonaliser A , puis résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$

Exercice 20.17

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = x + 2y + z \\ y' = y + z \\ z' = -y + 3z \end{cases}$

Exercice 20.18

Résoudre $X' = AX + B(t)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et $B : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 + 4t - 6t^2 \\ -2t - 12t^2 \\ 1 + 6t^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 20.19

On considère le système différentiel (E) : $\begin{cases} x' = 2tx - y + t \cos(t) \\ y' = x + 2ty + t \sin(t) \end{cases}$

- Déterminer l'ensemble des solutions du système homogène associé (H) en posant $u(t) = x(t)e^{-t^2}$ et $v(t) = y(t)e^{-t^2}$.
- Rechercher une solution de (E) sous la forme $X = a_1X_1 + a_2X_2$, où a_1 et a_2 sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , et X_1, X_2 sont solutions de (H).
- Donner toutes les solutions de (E).

Problème 20.20 – (D'après E3A PSI)

Soit (E_1) l'équation différentielle $y^{(3)} = y$.

1. Soit f une solution à valeurs complexes de cette équation.
 - (a) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2) vérifiée par la fonction : $g = f + f' + f''$.
 - (b) Résoudre l'équation (E_2) .
 - (c) En déduire l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation (E_1) .

2. On considère le système différentiel (S) à coefficients constants :

$$(S) : X' = AX, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \text{ et } X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

- (a) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
- (b) Résoudre le système (S) .
- (c) Retrouver alors par cette méthode les solutions de l'équation (E_1) obtenues à la question 1.(c).

3. On considère la série entière réelle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

- (a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

On note alors, lorsque cela existe, $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

- (b) Justifier que φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- (c) Déterminer les développements en série entière de φ' , φ'' , $\varphi^{(3)}$ puis $\varphi^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- (d) Montrer que le système ci-dessous d'inconnues a, b, c admet une unique solution que l'on précisera :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a + jb + j^2c = 0 \\ a + j^2b + jc = 0 \end{cases}$$

En déduire une expression de φ n'utilisant que des fonctions usuelles à **valeurs réelles**.

Une correction de l'exercice 20.1

énoncé

(i) Tout d'abord, on remarque que $f(0) = f(k \times 0) = k \times f(0)$, donc $(1 - k)f(0) = 0$, et comme $k \neq 1$, $f(0) = 0$.

(ii) Pour tout réel x , et tout entier naturel n , on montre par récurrence que

$$f(x) = \frac{1}{k^n} f(k^n x) = k^n f\left(\frac{1}{k^n} x\right).$$

(iii) Comme f est dérivable en 0, alors

$$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{f(\square) - f(0)}{\square - 0} = \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{f(\square)}{\square} = f'(0),$$

donc :

⇒ si $|k| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$, d'où par composition des limites, pour tout réel $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{1}{k^n} f(k^n x) = x \times \frac{f(k^n x)}{k^n x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \times f'(0),$$

⇒ si $|k| > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^n} = 0$, d'où par composition des limites, pour tout réel $x \neq 0$,

$$f(x) = k^n f\left(\frac{1}{k^n} x\right) = x \times \frac{f\left(\frac{1}{k^n} x\right)}{\frac{1}{k^n} x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \times f'(0).$$

(iv) Ainsi pour tout réel x non nul, $f(x) = f'(0)x$ (et ceci est aussi vrai pour $x = 0$).

On conclut en affirmant que les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivables en 0 pour lesquelles il existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(kx) = kf(x)$ sont les applications linéaires $x \mapsto ax$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Une correction de l'exercice 20.2

énoncé



- L'expression proposée de la fonction (notons-la f) ne permet pas de calculer $f(0)$, donc f n'est pas définie en 0. L'exercice revient donc à étudier la possibilité de prolonger f par continuité en 0, puis d'étudier la dérivabilité de ce prolongement.
- Pour préciser l'allure de sa courbe au voisinage du point d'abscisse 0, il va nous falloir un terme de plus au delà de la partie de degré 1 du développement limité.

→ Pour tout réel x non-nul,

$$\frac{2}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{x} = \frac{2x - e^{2x} + 1}{x(e^{2x} - 1)}$$



Pour répondre à la question, il nous faut un développement limité final d'ordre au moins 2, mais on constate que le dénominateur $x(e^{2x} - 1)$ est équivalent à $x \times 2x = 2x^2$, donc une des étapes du calcul devra consister à simplifier le développement limité du numérateur par x^2 , ce qui fera chuter son ordre de 2. En conséquence de tout cela, je vous annonce solennellement qu'il nous faut développer numérateur et dénominateur à l'ordre au moins 4.

Prévoir tout cela demande de la pratique, l'élève imprévoyant se contentera de recommencer plusieurs fois ses calculs jusqu'à ce qu'ils lui fournissent un résultat suffisant. En effet, faisant moi-même ce calcul, plein d'auto-suffisance comme à l'accoutumée, je me suis rendu compte en touchant au but que même l'ordre 4 ne suffit pas car les termes de degré 2 péniblement collectés ont la désastreuse idée de s'éliminer (« La barbe ! » m'écriai-je, comme nos amis les débonnaires talibans, que je salue s'ils me lisent). J'ai du revenir sur mes pas et rajouter un terme d'ordre 5 au départ des calculs.

→ Tout d'abord, quand x tend vers 0,

$$\begin{aligned} & 2x - e^{2x} + 1 \\ &= 2x - \left(1 + (2x) + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{24}(2x)^4 + \frac{1}{120}(2x)^5 + o((2x)^5) \right) + 1 \\ &= -2x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{15}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} x(e^{2x} - 1) &= x \times \left((2x) + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{24}(2x)^4 + o((2x)^4) \right) \\ &= 2x^2 + 2x^3 + \frac{4}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

• Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{2x - e^{2x} + 1}{x(e^{2x} - 1)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-2x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)}{2x^2 + 2x^3 + \frac{4}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^5 + o(x^5)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-2x^2(1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^3 + o(x^3))}{2x^2(1 + x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} - \left(1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^3 + o(x^3) \right) \\ &\quad \times \frac{1}{1 - \left[-x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right]} \end{aligned}$$

Quand x tend vers 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[-x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right] = 0,$$

donc on peut utiliser le développement limité $\frac{1}{1-\square} = 1 + \square + \square^2 + \square^3 + o(\square^3)$ quand \square tend vers 0. On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \left[-x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right]} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + \left[-x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right] \right. \\ &\quad + \left[-x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right]^2 \\ &\quad + \left[-x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right]^3 \\ &\quad \left. + o \left(\left[-x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right]^3 \right) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^3), \end{aligned}$$

Exercices du chapitre 20. Fonctions vectorielles

donc

$$\begin{aligned}\frac{2x - e^{2x} + 1}{x(e^{2x} - 1)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} - \left(1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^3 + o(x^3) \right) \times \left(1 - x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^3) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

⇒ On conclut donc que

$$\frac{2}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} -1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + o(x^3)$$

et je vous laisse les déductions d'usage, en m'attardant sur le fait que $f(x) - (-1 + \frac{1}{3}x) \sim -\frac{1}{45}x^3$, donc que la courbe de f est localement au dessus de la tangente à gauche du point $(0, -1)$, et en dessous à droite de ce point.

Une correction de l'exercice 20.3

énoncé

On raisonne par l'absurde :

- ⇒ supposons que P possède (au moins) quatre racines réelles distinctes que l'on notera x_1, x_2, x_3, x_4 dans l'ordre croissant.
- ⇒ Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, P_n est une fonction polynomiale, elle est donc continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et dérivable sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Comme de plus $P_n(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$, le théorème de Rolle nous permet d'affirmer qu'il existe $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ qui vérifie $P'_n(y_i) = 0$.
- ⇒ On obtient trois réels y_1, y_2, y_3 distincts (car $y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < y_3$) qui annulent P' .
- ⇒ Il suffit alors de réitérer le même raisonnement sur P' , qui est encore continue et dérivable sur \mathbb{R} , pour obtenir deux racines réelles distinctes pour P'' .
Or $P''(X) = n(n-1)X^{n-2}$, donc la seule racine possible de P'' est 0, autrement dit P''_n admet au plus une seule racine.
- ⇒ On obtient donc une contradiction, ce qui nous permet de conclure que P admet au plus trois racines réelles distinctes.

Une correction de l'exercice 20.4

énoncé

1. (a) ⇒ Sur $]0, 1]$, $G = g \circ u$ où $u : x \mapsto \frac{1}{x} + a - 1$.

→ u est continue sur $]0, 1]$,

→ $u(]0 ; 1]) = [a, +\infty[$,

→ g est continue sur $[a, +\infty[$,

donc $G = g \circ u$ est continue sur $]0, 1]$.

→ En 0,

$$\lim_{0^+} G = \lim_{x \rightarrow 0^+} g\left(\frac{1}{x} + a - 1\right) = \lim_{\square \rightarrow +\infty} g(\square) = 0 = G(0).$$

ainsi G est continue en 0.

Donc G est continue sur $[0, 1]$.

→ Puis comme pour la continuité

→ u est dérivable sur $]0, 1[$,

→ $u(]0 ; 1[) =]a, +\infty[$,

→ g est dérivable sur $]a, +\infty[$,

avec pour tout $x \in]0 ; 1[$,

donc $G = g \circ u$ est dérivable sur $]0, 1[$

$$G' : x \mapsto -\frac{1}{x^2} \times g' \left(\frac{1}{x} + a - 1 \right).$$

(b) On peut donc appliquer le théorème de Rolle à G sur $[0, 1]$, qui nous donne l'existence d'un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $G'(\alpha) = 0$, c'est-à-dire tel que

$$-\frac{1}{\alpha^2} g' \left(\frac{1}{\alpha} + a - 1 \right) = 0$$

d'où

$$g'(c) = 0 \text{ avec } c = \frac{1}{\alpha} + a - 1 \in]a, +\infty[.$$

2. la fonction \tan est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$ à valeurs dans \mathbb{R} , et f est dérivable sur \mathbb{R} , donc

$$f \circ \tan \text{ est dérivable (et continue) sur }]-\pi/2, \pi/2[.$$

De plus f a une limite finie, que l'on note ℓ , en $\pm\infty$, donc comme

$$\lim_{t \rightarrow -\pi/2^+} \tan(t) = -\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \tan(t) = +\infty,$$

on en déduit par composition des limites que

$$\lim_{t \rightarrow -\pi/2^+} (f \circ \tan)(t) = \ell \text{ et } \lim_{t \rightarrow \pi/2^-} (f \circ \tan)(t) = \ell.$$

On en déduit que l'on peut prolonger par $f \circ \tan$ en la fonction

$$G : t \mapsto \begin{cases} f(\tan(t)), & \text{si } x \in]-\pi/2, \pi/2[, \\ \ell, & \text{si } x = -\pi/2 \text{ ou } x = \pi/2, \end{cases}$$

qui est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercices du chapitre 20. Fonctions vectorielles

Cette fonction G remplit toutes les conditions du théorème de Rolle sur $[-\pi/2, \pi/2]$, on en déduit qu'il existe un réel $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$ qui vérifie $G'(\alpha) = 0$, c'est-à-dire

$$(f \circ \tan)'(\alpha) = 0 \\ \Leftrightarrow f'(\tan(\alpha)) \times (1 + \tan^2(\alpha)) = 0$$

d'où $f'(\tan(\alpha)) = 0$.

On obtient bien $f'(c) = 0$ avec $c = \tan(\alpha)$.

Une correction de l'exercice 20.5

énoncé

1. Tout d'abord pour $x = y = 0$, $f(0)(1 - f(0)) = 0$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$;
2. pour $y = 0$, on a pour tout réel x , $f(0)(1 - f(x)) = 0$, donc si $f(0) = 1$, alors f est la fonction constante égale à 1, et est vérifiée bien la propriété.
3. Supposons à présent que $f(0) = 0$.

Dérivons l'égalité par rapport à x , on obtient pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f'(x + y) = f'(x)(1 - f(y)).$$

Pour tout réel t , en prenant $x = 0$ et $y = t$, on en déduit que

$$f'(t) = -f'(0)f(t) + f'(0).$$

Donc, en notant $a = f'(0)$, f est solution de l'équation différentielle $y' = -ay + a$, donc il existe un réel K tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 1 + Ke^{-at}.$$

Il suffit de se souvenir que $f(0) = 0$ pour obtenir $K = -1$.

4. On conclut, après avoir vérifié que ces fonctions sont bien solution, que les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto 1 - e^{-at}$, où a est un réel quelconque.

Une correction de l'exercice 20.6

énoncé

1. $\text{inv} : x \mapsto 1/x$ est dérivable sur \mathbb{R}^* et \arctan est dérivable sur \mathbb{R} donc $\arctan \circ \text{inv} : x \mapsto \arctan(1/x)$ est dérivable sur \mathbb{R}^* , et par conséquent φ est dérivable sur \mathbb{R}^* .

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \arctan'(x) + [\arctan \circ \text{inv}]'(x) \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \arctan'(1/x) \times \text{inv}'(x) \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0. \end{aligned}$$

2. On sait qu'une fonction dérivable dont la dérivée est nulle sur un **intervalle** est constante sur cet **intervalle**, par conséquent φ est constante sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Or $\varphi(1) = 2 \arctan(1) = 2 \times \pi/4 = \pi/2$, et de même $\varphi(-1) = -\pi/2$ donc

$$\varphi(x) = \varphi(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{si } x > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } x < 0; \end{cases}$$

Une correction de l'exercice 20.7

énoncé

Notons g la fonction définie sur $]0 ; 1[$ par $g(x) = f(x)e^x$.

Par les hypothèses sur f , $g(0) = g(1) = 0$, et g est aussi deux fois dérivable sur $]0 ; 1[$, la formule de Leibniz nous donnant $g''(x) = (f''(x) + 2f'(x) + f(x))e^x$.

Donc, encore par hypothèse sur f , g'' est positive sur $]0 ; 1[$, ce qui prouve que g est convexe sur $]0 ; 1[$.

On en déduit que sa courbe passe en dessous de sa corde entre les points d'abscisse 0 et 1, corde qui n'est autre que l'axe des abscisses.

Donc g est négative sur $]0 ; 1[$, et par conséquent f aussi.

Une correction de l'exercice 20.8

énoncé

→ Tout d'abord, la fonction g_n est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* , comme produit de $x \mapsto x^{n-1}$, polynomiale donc \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , par la composée de $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* , par exp qui est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

→ On cherche une expression pour $(g_n)^{(n)}$.

Par quelques calculs, on constate que pour $n \in \{1,2,3\}$,

$$(g_n)^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}.$$

Supposons que ceci est vrai pour tout un $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons que cette formule est

Exercices du chapitre 20. Fonctions vectorielles

encore valable au rang $n + 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, rappelons que $\text{id}_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$, alors

$$g_{n+1}(x) = x^n e^{\frac{1}{x}} = x \times g_n(x) = (\text{id}_{\mathbb{R}} \times g_n)(x)$$

d'où avec la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} (g_{n+1})^{(n+1)}(x) &= (\text{id}_{\mathbb{R}} \times g_n)^{(n+1)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \text{id}_{\mathbb{R}}^{(k)}(x) \times (g_n)^{(n+1-k)}(x) \\ &= x \times (g_n)^{(n+1)}(x) + (n+1) \times 1 \times (g_n)^{(n)}(x) \\ &= x \times ((g_n)^{(n)})'(x) + (n+1) \times 1 \times (g_n)^{(n)}(x) \\ &= x \times \frac{d}{dx} \left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} \right) + (n+1) \left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} \right) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= x \times \left((-1)^n \frac{-(n+1)}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x}} \right) + (n+1) \left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}} + (n+1) \left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}} \quad \text{C.Q.F.D} \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 20.9

énoncé

→ ⊕ La fonction

$$u : x \mapsto x^2 - 2 \cos(\theta)x + 1 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}) = (x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1 ; 1[$,

⊕ u est aussi strictement positive sur $] -1 ; 1[$, c'est-à-dire $u(] -1 ; 1[) \subset] 0 ; +\infty[$, car si $\sin \theta = 0$, alors $\cos \theta = \pm 1$, donc comme $x \in] -1 ; 1[$, $(x - \cos(\theta))^2 > 0$.

⊕ La fonction \ln est \mathcal{C}^∞ sur $] 0 ; +\infty[$, donc a fortiori sur $u(] -1 ; 1[)$.

Par conséquent, on peut affirmer que $\ln \circ u : x \mapsto \ln(x^2 - 2 \cos(\theta)x + 1)$ est définie et \mathcal{C}^∞ sur $] -1 ; 1[$.

→ Pour tout $x \in] -1 ; 1[$, $0 < 1 - |x| < |1 - x \cos(\theta)|$,



on rappelle la deuxième inégalité triangulaire :

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

donc $x \mapsto \frac{x \sin(\theta)}{1-x \cos(\theta)}$ est le rapport de deux fonctions \mathcal{C}^∞ sur $] -1 ; 1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas, c'est donc une fonction \mathcal{C}^∞ sur $] -1 ; 1[$.

Ainsi $x \mapsto \arctan\left(\frac{x \sin(\theta)}{1-x \cos(\theta)}\right)$ est définie et \mathcal{C}^∞ sur $] -1 ; 1[$ car \arctan est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

→ On peut donc conclure que

$$g : x \mapsto -\frac{1}{2} \ln(x^2 - 2 \cos(\theta)x + 1) + i \arctan\left(\frac{x \sin(\theta)}{1-x \cos(\theta)}\right)$$

est une fonction définie et \mathcal{C}^∞ sur $] -1 ; 1[$.

→ Pour tout $x \in] -1 ; 1[$, la dérivée de cette fonction a pour expression

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{2} \times \frac{2x - 2 \cos(\theta)}{x^2 - 2 \cos(\theta)x + 1} + i \times \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x \sin(\theta)}{1-x \cos(\theta)}\right)}{1 + \left(\frac{x \sin(\theta)}{1-x \cos(\theta)}\right)^2} \\ &= \frac{\cos(\theta) - x}{x^2 - 2 \cos(\theta)x + 1} + i \times \frac{\left(\frac{\sin(\theta) \times (1-x \cos(\theta)) - x \sin(\theta) \times (-\cos(\theta))}{(1-x \cos(\theta))^2}\right)}{\frac{(1-x \cos(\theta))^2 + (x \sin(\theta))^2}{(1-x \cos(\theta))^2}} \\ &= \frac{\cos(\theta) - x}{x^2 - 2 \cos(\theta)x + 1} + i \times \frac{\sin(\theta)}{(1-x \cos(\theta))^2 + (x \sin(\theta))^2} \\ &= \frac{\cos(\theta) - x}{x^2 - 2 \cos(\theta)x + 1} + i \times \frac{\sin(\theta)}{x^2 - 2 \cos(\theta)x + 1} \\ &= \frac{e^{i\theta} - x}{x^2 - 2 \cos(\theta)x + 1}. \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 20.10

énoncé

1. $\det(A) = \lambda^2 - (1-\lambda)^2 = 2\lambda - 1$, donc

→ si $\lambda \neq \frac{1}{2}$, A est inversible, d'inverse

$$\frac{1}{2\lambda - 1} \begin{pmatrix} \lambda & -(1-\lambda) \\ -(1-\lambda) & \lambda \end{pmatrix},$$

donc l'équation $AX = B$ se résout en

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2\lambda - 1} \begin{pmatrix} \lambda a - (1-\lambda)b \\ -(1-\lambda)a + \lambda b \end{pmatrix},$$

Exercices du chapitre 20. Fonctions vectorielles

→ si $\lambda = \frac{1}{2}$, $AX = B$ est le système

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+y) = a \\ \frac{1}{2}(x+y) = b \end{cases}$$

qui

- ⊕ si $a \neq b$, n'a pas de solution ;
- ⊕ si $a = b$, a pour ensemble des solutions la droite d'équation $x + y = 2a$, c'est-à-dire les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} 2a - y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(y) - f(x) = (y - x)f'(\lambda x + (1 - \lambda)y).$$

Alors pour $x \neq y$,

$$\begin{aligned} f'(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ \text{et } f'(\lambda y + (1 - \lambda)x) &= \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &= f'(\lambda x + (1 - \lambda)y) \quad (\text{E}), \end{aligned}$$

cette égalité restant vraie pour $x = y$.

→ Dans le cas où $\lambda \neq \frac{1}{2}$, montrons que f' est constante. Prenons deux réels $a < b$, montrons que $f'(a) = f'(b)$.

D'après la question 1, il suffit de (et il faut) prendre

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{2\lambda - 1} \begin{pmatrix} \lambda a - (1 - \lambda)b \\ -(1 - \lambda)a + \lambda b \end{pmatrix},$$

pour avoir

$$AX = B, \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} a = \lambda x + (1 - \lambda)y \\ b = (1 - \lambda)x + \lambda y \end{cases}$$

et par conséquent $f'(a) = f'(b)$ d'après l'égalité (E).

Ainsi, f' est constante sur \mathbb{R} , donc f est une fonction affine, autrement dit polynomiale de degré 1, de la forme $f : t \mapsto at + \beta$.

On vérifie bien que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \alpha(y - x) \\ (y - x)f'(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \alpha(y - x), \end{aligned}$$

pour conclure que

pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, les fonctions réelles f dérivables sur \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(y) - f(x) = (y - x)f'(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

sont les fonctions affines.

→ Si $\lambda = \frac{1}{2}$, alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(y) - f(x) = (y - x)f'\left(\frac{1}{2}(x + y)\right).$$

- ⊕ Prenons un réel t , et pour avoir $t = \frac{1}{2}(x + y)$, on prend un réel x quelconque, et $y = 2t - x$, ainsi

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, f(2t - x) - f(x) = 2(t - x)f'(t).$$

Mais pour x fixé, la fonction $t \mapsto f'(t) = \frac{f(2t-x)-f(x)}{2(t-x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ comme rapport de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Par conséquent f' est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{x\}$, et comme on a prouvé ceci pour tout réel x , on conclut que f' est dérivable sur \mathbb{R} , donc que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

- ⊕ On dérive par rapport à t dans l'égalité

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, f(2t - x) - f(x) = 2(t - x)f'(t),$$

pour obtenir

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, 2f'(2t - x) = 2f'(t) + 2(t - x)f''(t),$$

d'où pour $t = 0$, et en remplaçant x par $-x$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, f'(x) = f'(0) + 2xf''(0),$$

donc f' est une fonction affine, c'est-à-dire polynomiale de degré 1, d'où

f est une fonction polynomiale de degré 2.

⊕ Réciproquement, si $f = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \alpha(y^2 - x^2) + \beta(y - x) \\ &= (y - x)(\alpha(x + y) + \beta) \\ (y - x)f'(\tfrac{1}{2}(x + y)) &= (y - x)\left(2\alpha(\tfrac{1}{2}(x + y)) + \beta\right) \\ &= (y - x)(\alpha(x + y) + \beta) \\ &= f(y) - f(x). \end{aligned}$$

⊕ On peut ainsi conclure que

les fonctions réelles f dérivables sur \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(y) - f(x) = (y - x)f'(\tfrac{1}{2}(x + y))$$

sont les fonctions polynomiales de degré 2.

Une correction de l'exercice 20.11

énoncé

1. On procède par récurrence, avec $H_0 = 1$, puis

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left[e^{-x^2} H_n(x)\right]' \quad (\text{par hypothèse de récurrence, et avec abus de notation}) \\ &= -2x \times e^{-x^2} \times H_n(x) + e^{-x^2} \times H_n'(x) \\ &= e^{-x^2} \left(-2xH_n(x) + H_n'(x)\right) \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu en prenant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $H_{n+1} = -2xH_n + H_n'$.

2. On sait que pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2} = -2x \times f(x), \\ \text{donc } f' &= u \times f \quad (\text{où } u; x \mapsto -2x) \end{aligned}$$

donc en appliquant la formule de Leibniz (de dérivation d'un produit), pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout réel x ,

$$\begin{aligned} f^{(n+2)}(x) &= \left(f'\right)^{(n+1)}(x) = (u \times f)^{(n+1)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(n+1-k)}(x) \times f^{(k)}(x) \\ &= -2x f^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} H_{n+2}(x) &= e^{x^2} f^{(n+2)}(x) = -2xe^{x^2} f^{(n+1)}(x) - 2(n+1)e^{x^2} f^{(n)}(x) \\ &= -2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x), \end{aligned}$$

ce qui nous donne la relation de récurrence voulue.

3. \Rightarrow D'une part si on suppose qu'au rang $n \in \mathbb{N}$, $\deg(H_n) = n$ et $\deg(H_{n+1}) = n+1$, ce qui est vrai pour $n = 0$, alors le polynôme

$$H_{n+1} = -2XH_{n+1} - 2(n+1)H_n,$$

est de degré $n+2$ comme somme de $-2XH_{n+1}$ qui est de degré $n+2$, et de $-2(n+1)H_n$ de degré n .

Donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(H_n) = n$.

- \Rightarrow D'autre part, supposons de nouveau qu'au rang $n \in \mathbb{N}$, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P | H_n \rangle = (-1)^n \langle P^{(n)} | H_0 \rangle$, ce qui est vrai au rang $n = 0$.

Alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\begin{aligned} \langle P | H_{n+1} \rangle &= \langle P | -2XH_n + H'_n \rangle \quad (\text{d'après la question 1}) \\ &= \langle P | -2XH_n \rangle + \langle P | H'_n \rangle. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \langle P | -2XH_n \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)H_n(t)(-2te^{-t^2})dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)H_n(t)f'(t)dt. \end{aligned}$$

Or $t \mapsto P(t)H_n(t)$ et f sont \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , et par croissances comparées $P(t)H_n(t)f(t)$ tend vers 0 en $\pm\infty$, donc par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \langle P | -2XH_n \rangle &= - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (PH_n)'(t)f(t)dt \right) \\ &= - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (PH_n)'(t)f(t)dt \right) \\ &= - \langle P' | H_n \rangle - \langle P | H'_n \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi il reste

$$\langle P | H_{n+1} \rangle = - \langle P' | H_n \rangle$$

d'où grâce à l'hypothèse de récurrence appliquée à P' ,

$$\langle P | H_{n+1} \rangle = -(-1)^n \langle (P')^{(n)} | H_0 \rangle = (-1)^{n+1} \langle P^{(n+1)} | H_0 \rangle, \quad \text{c.Q.F.D.}$$

Exercices du chapitre 20. Fonctions vectorielles

→ Ainsi pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, si $p < q$, alors

$$\begin{aligned}\langle H_p \mid H_q \rangle &= \langle H_p^{(q)} \mid H_0 \rangle \\ &= 0 \text{ (car } \deg(H_p) = p < q)\end{aligned}$$

ce qui prouve que la famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

→ ⊕ Tout d'abord la famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale et formée de polynômes non nuls, donc elle est libre.

⊕ Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, soit N un entier tel que $N \geq \deg(P)$, alors

→ $H_0, \dots, H_N \in \mathbb{R}_N[X]$;

→ la famille (H_0, \dots, H_N) est libre ;

→ elle est de cardinal $N + 1$, et $\dim(\mathbb{R}_N[X]) = N + 1$,

donc (H_0, \dots, H_N) est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.

Ainsi $P \in \text{Vect}(H_0, \dots, H_N) \subset \text{Vect}((H_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

On a donc établi que $\mathbb{R}[X] \subset \text{Vect}((H_n)_{n \in \mathbb{N}})$, et l'inclusion réciproque est évidente, donc $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$.

⊕ la famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale, libre, et génératrice de $\mathbb{R}[X]$, c'est donc une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Une correction de l'exercice 20.12

énoncé

La fonction $L : X \mapsto \det_{\mathcal{B}}(X, f(a_1), f(a_2))$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^3 , et $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^3)$.
Donc par composition, l'application de I dans \mathbb{R}

$$\varphi = L \circ f : x \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f(x), f(a_1), f(a_2))$$

est \mathcal{C}^1 sur I de dérivée $\varphi' : x \mapsto (L \circ f')(x) = \det_{\mathcal{B}}(f'(x), f(a_1), f(a_2))$.

De plus $\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = 0$, donc par le théorème de Rolle, il existe c entre a_1 et a_2 , donc dans I , tel que $\varphi'(c) = 0$, autrement dit $\det_{\mathcal{B}}(f'(c), f(a_1), f(a_2)) = 0$.

Ainsi la famille $(f'(c), f(a_1), f(a_2))$ est liée, et comme $(f(a_1), f(a_2))$ est libre, on peut affirmer que $f'(c) \in \text{Vect}(f(a_1), f(a_2))$.

Une correction de l'exercice 20.13

énoncé

L'application $L : X \mapsto (f(b) - f(a)|X)$ est linéaire, donc $\varphi = L \circ f$, qui va de $[a ; b]$ dans \mathbb{R} , conserve la continuité de f sur $]a ; b[$ et la dérivabilité de f sur $]a ; b[$, avec en plus

$$\forall t \in]a ; b[, \varphi'(t) = L \circ f' = (f(b) - f(a)|f'(t)).$$

Cette application φ vérifie les conditions du théorème des accroissements finis, donc il existe

$c \in]a ; b[$ tel que $\varphi'(c) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}$, ce qui donne

$$(f(b) - f(a))|f'(c)| = \frac{(f(b) - f(a))|f(b)| - (f(b) - f(a))|f(a)|}{b - a}$$

d'où

$$(f(b) - f(a))|f'(c)| = \frac{\|f(b) - f(a)\|^2}{b - a}.$$

Puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne que

$$\frac{\|f(b) - f(a)\|^2}{b - a} \leq \|f(b) - f(a)\| \times \|f'(c)\|$$

dont on déduit l'inégalité voulue.

Une correction de l'exercice 20.14

énoncé

→ Comme le déterminant d'une matrice est linéaire par rapport à chaque colonne, et donc par rapport à chaque ligne par transposition, on peut affirmer que l'application L de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} définie par

$$L(x, y, z) = \begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

est linéaire.

Ainsi comme u, v, w sont de classe \mathcal{C}^2 sur $[a ; b]$ à valeurs dans \mathbb{R} , alors la fonction $\varphi = (u, v, w)$ est \mathcal{C}^2 sur $[a ; b]$ à valeurs dans \mathbb{R}^3 , et par conséquent, l'application

$$f = L \circ \varphi : t \mapsto \begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u(t) & v(t) & w(t) \end{vmatrix}$$

est de classe \mathcal{C}^2 sur $[a ; b]$ à valeurs dans \mathbb{R} , avec en particulier pour tout $t \in [a ; b]$,

$$f'(t) = (L \circ \varphi)'(t) = (L \circ \varphi')(t) = \begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u'(t) & v'(t) & w'(t) \end{vmatrix}$$

$$\text{et } f''(t) = \begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u''(t) & v''(t) & w''(t) \end{vmatrix}.$$

Exercices du chapitre 20. Fonctions vectorielles

→ Comme le déterminant d'une matrice dont deux lignes sont égales est nul, on remarque que $f(a) = f(b) = 0$, et f , étant \mathcal{C}^2 sur $]a ; b[$, respecte les conditions du théorème de Rolle, donc il existe un réel d dans $]a ; b[$ tel que $f'(d) = 0$.

→ Mais d'après l'énoncé

$$\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0,$$

autrement dit $f'(a) = 0$.

Ainsi f' s'annule en a et en d , avec $a < d$, et comme f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]a ; b[$, l'application f' est continue sur $]a ; b[$ et dérivable sur $]a ; b[$, donc on peut de nouveau appliquer le théorème de Rolle à f' entre a et d , ce qui nous donne l'existence de $c \in]a ; d[\subset]a ; b[$ tel que $f''(c) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0, \text{ C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 20.15

énoncé

Les fonctions $u : x \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \cos(x+a) \\ \cos(x+b) \end{pmatrix}$, et $v : x \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \sin(x+a) \\ \sin(x+b) \end{pmatrix}$ sont dérivables sur \mathbb{R} , car

ce sont des fonctions vectorielles dont les coordonnées sont dérivables sur \mathbb{R} .

Ainsi, par la multilinéarité du déterminant, la fonction

$$D : x \mapsto \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \sin(x) \\ 1 & \cos(x+a) & \sin(x+a) \\ 1 & \cos(x+b) & \sin(x+b) \end{vmatrix}$$

est aussi dérivable, avec pour tout réel x :

$$\begin{aligned} D'(x) &= \begin{vmatrix} 1 & -\sin(x) & \sin(x) \\ 1 & -\sin(x+a) & \sin(x+a) \\ 1 & -\sin(x+b) & \sin(x+b) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \cos(x) \\ 1 & \cos(x+a) & \cos(x+a) \\ 1 & \cos(x+b) & \cos(x+b) \end{vmatrix} \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Donc D est constante sur \mathbb{R} , égale à

$$\begin{aligned} D(0) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \cos(a) & \sin(a) \\ 1 & \cos(b) & \sin(b) \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cos(a) - 1 & \sin(a) \\ 0 & \cos(b) - 1 & \sin(b) \end{vmatrix} \\ &= (\cos(a) - 1)\sin(b) - (\cos(b) - 1)\sin(a) \\ &= \cos(a)\sin(b) - \cos(b)\sin(a) - \sin(b) + \sin(a) \\ &= \sin(b - a) - \sin(b) + \sin(a). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \sin(x) \\ 1 & \cos(x+a) & \sin(x+a) \\ 1 & \cos(x+b) & \sin(x+b) \end{vmatrix} = \sin(b - a) - \sin(b) + \sin(a).$$

Une correction de l'exercice 20.16

énoncé

1. (a) A est symétrique réelle donc diagonalisable.

$$(b) \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} -1 + \lambda & 0 & -2 \\ 0 & -1 + \lambda & 0 \\ -2 & 0 & -1 + \lambda \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient, après factorisation :
 $\chi_A = (X - 1)(X + 1)(X - 3)$.

On obtient aisément, $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $E_{-1} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_3 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On pose $e'_1 = (0, 1, 0)$, $e'_2 = (1, 0, -1)$ et $e'_3 = (1, 0, 1)$.

Alors, $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de vecteurs propres pour l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice A .

2. Notons (S) le système $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$.

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Exercices du chapitre 20. Fonctions vectorielles

Alors, $(S) \iff X' = AX$.

On note P la matrice de passage de la base canonique e de \mathbb{R}^3 à la base e' .

$$\text{D'après 1., } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Et, si on pose } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ alors } A = PDP^{-1}.$$

Donc $(S) \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X$.

$$\text{On pose alors } X_1 = P^{-1}X \text{ et } X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, par linéarité de la dérivation, } (S) \iff X_1' = DX_1 \iff \begin{cases} x_1' = x_1 \\ y_1' = -y_1 \\ z_1' = 3z_1 \end{cases}$$

On résout alors chacune des trois équations différentielles d'ordre 1 qui constituent ce système.

$$\text{On trouve } \begin{cases} x_1(t) = ae^t \\ y_1(t) = be^{-t} \\ z_1(t) = ce^{3t} \end{cases} \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Enfin, on détermine x, y, z en utilisant la relation $X = PX_1$.

$$\text{On obtient : } \begin{cases} x(t) = be^{-t} + ce^{3t} \\ y(t) = ae^t \\ z(t) = -be^{-t} + ce^{3t} \end{cases} \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Une correction de l'exercice 20.17

énoncé

$$\implies \text{ Il s'écrit sous forme matricielle } X' = AX, \text{ où } A \text{ est la matrice } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

\implies Par la méthode de son choix, on trouve que les valeurs propres de A sont 1 (valeur propre simple) et 2 (valeur propre double).

On détermine comme on veut que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à 1 ;

puis que le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est la droite vectorielle engendrée par $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En particulier, la matrice n'est pas diagonalisable puisque les ordres de multiplicité de 2 sont différents.

→ On choisit le vecteur $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans le seul but de compléter la famille libre (V_1, V_2)

en une base de \mathbb{R}^3 , car il est simple de vérifier que V_1, V_2 et V_3 forment une famille libre. Puis un petit calcul nous donne $AV_3 = -2V_1 + V_2 + 2V_3$, donc la matrice de A (plus précisément de l'endomorphisme canoniquement associé à A) dans cette nouvelle base $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$ est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(A) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(AV_1, AV_2, AV_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

autrement dit par la formule de changement de bases :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=P} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=T} \times P^{-1}.$$

→ Posons $Y = P^{-1}X$.

La fonction vectorielle Y vérifie le système $Y' = TY$, qu'on écrit

$$\begin{cases} u' = u - 2w \\ v' = 2v + w \\ w' = 2w \end{cases} \quad (\text{système triangulaire qui se résout « du bas vers le haut ».)$$

- ⊕ Les solutions de $w' = 2w$ sont les fonctions $w : t \mapsto ae^{2t}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$;
- ⊕ puis (en passant la méthode de variation de la constante), les solutions de $v' = 2v + w$, pour les fonctions w déterminées ci-dessus, sont les fonctions $v : t \mapsto be^{2t} + at e^{2t}$;
- ⊕ enfin les solutions de $u' = u - 2w$, toujours pour les fonctions w déterminées dans le premier point, sont les fonctions $u : t \mapsto ce^t - 2a e^{2t}$.

→ Pour trouver enfin la solution générale du système initial, il suffit de faire $X = PY$, soit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ce^t - 2\alpha e^{2t} \\ (b + \alpha t)e^{2t} \\ \alpha e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ce^t + (3b - 2\alpha + 3\alpha t)e^{2t} \\ (b + \alpha t)e^{2t} \\ (b + \alpha + \alpha t)e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 20.18

énoncé

(1) **Résolution du système homogène** : on diagonalise (polynôme caractéristique $X^2(X - 6)$, puis sous-espaces propres) A en

$$A = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

En posant $X = PY$,

$$(H) : X' = AX \iff Y' = DY$$

$$\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 e^{6t} \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = P \times Y(t) = P \times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 e^{6t} \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} C_1 - C_3 e^{6t} \\ C_2 - 2C_3 e^{6t} \\ C_1 + 2C_2 + C_3 e^{6t} \end{pmatrix}$$

(2) **Recherche d'une solution particulière de (E)** : cherchons une solution X de (E) sous

la forme $X = PY$, où $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

$$X' = AX + B \iff P^{-1}X' = P^{-1}APY + P^{-1}B$$

$$\iff Y' = DY + P^{-1}B.$$

Mais un rapide et infaillible calcul donne

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

puis pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} 4t + 1 \\ -2t \\ 6t^2 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{aligned} X' = AX + B &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t + 1 \\ -2t \\ 6t^2 \end{pmatrix} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1'(t) = 4t + 1 \\ y_2'(t) = -2t \\ y_3'(t) = 6y_3(t) + 6t^2 \end{cases} \end{aligned}$$



Rappelons encore une fois qu'il nous suffit de trouver une solution vectorielle Y , autrement dit une solution de chacune des trois équations ci-dessus.

Les deux premières équations différentielles sont élémentaires, et pour la 3^e, je me contente de chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 (comme le second membre $6t^2$) et je trouve $-\frac{1}{18} - \frac{1}{3}t - t^2$.

Il suffit de prendre :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = t + 2t^2 \\ y_2(t) = -t^2 \\ y_3(t) = -\frac{1}{18} - \frac{1}{3}t - t^2 \end{cases}$$

et enfin (avec $X = PY$) on obtient la solution de (E) suivante :

$$\begin{aligned} X : t &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t + 2t^2 \\ -t^2 \\ -\frac{1}{18} - \frac{1}{3}t - t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{18} + \frac{4}{3}t + 3t^2 \\ \frac{1}{9} + \frac{2}{3}t + t^2 \\ -\frac{1}{18} + \frac{2}{3}t - t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) Finalement les solutions de (E) sont les applications de la forme

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{18} + \frac{4}{3}t + 3t^2 \\ \frac{1}{9} + \frac{2}{3}t + t^2 \\ -\frac{1}{18} + \frac{2}{3}t - t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 - C_3 e^{6t} \\ C_2 - 2C_3 e^{6t} \\ C_1 + 2C_2 + C_3 e^{6t} \end{pmatrix},$$

où $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$.

Une correction de l'exercice 20.19

énoncé

Le système différentiel (E) : $\begin{cases} x' = 2tx - y + t \cos(t) \\ y' = x + 2ty + t \sin(t) \end{cases}$ a pour forme matricielle :

$$X' = A(t)X + B(t) \text{ où } A(t) = \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} t \cos(t) \\ t \sin(t) \end{pmatrix}$$

1. On sait déjà que le système homogène $X' = AX$ correspondant est un plan vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ car A et B sont continues sur \mathbb{R} .

Soient $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ une application dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 , et $U : t \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{-t^2} X(t)$.

Alors U est aussi une application dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 , et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = e^{t^2} U(t),$$

donc

$$X'(t) = 2te^{t^2} U(t) + e^{t^2} U'(t),$$

donc

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff 2te^{t^2} U + e^{t^2} U' = Ae^{t^2} U \\ &\iff e^{t^2} U' = Ae^{t^2} U - 2te^{t^2} U = e^{t^2} (A - 2tI_2) U \\ &\iff U' = (A - 2tI_2) U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} U \\ &\iff \begin{cases} u' = -v \\ v' = u \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} u'' = -v' = -u \\ v' = u \end{cases} \\ &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} u = \alpha \cos + \beta \sin \\ v' = u \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui est vrai pour $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} u = \alpha \cos + \beta \sin \\ v = \alpha \sin - \beta \cos \end{cases}$

On vérifie alors que ces deux fonctions donnent bien une solution de

$$\begin{cases} u' = -v \\ v' = u \end{cases}$$

donc on conclut que

$$X : t \mapsto e^{t^2} \begin{pmatrix} \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) \\ \alpha \sin(t) - \beta \cos(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{t^2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \beta e^{t^2} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$

est solution de (H) sur \mathbb{R} .

Or on sait que ce système homogène (H) a pour ensemble de solutions sur \mathbb{R} un plan vectoriel, car A est une application continue sur \mathbb{R} , donc on a trouvé toutes les solutions de (H).

En conclusion, l'ensemble des solutions de (H) sur \mathbb{R} est :

$$\text{Vect} \left(t \mapsto e^{t^2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t \mapsto e^{t^2} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \right).$$

2. Soient X_1 et X_2 deux solutions de (H) et a_1, a_2 deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , alors $X = a_1 X_1 + a_2 X_2$ est aussi \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , avec

$$\begin{aligned} X' &= a_1' X_1 + a_1 X_1' + a_2' X_2 + a_2 X_2' \\ &= a_1' X_1 + a_1 A X_1 + a_2' X_2 + a_2 A X_2 \quad (\text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont solutions de (H)}) \\ &= a_1' X_1 + a_2' X_2 + A(a_1 X_1 + a_2 X_2) = a_1' X_1 + a_2' X_2 + A X, \end{aligned}$$

ainsi X est solution de (E) si, et seulement si, $X' = AX + B$, ce qui équivaut d'après la calcul précédent à $a_1' X_1 + a_2' X_2 + AX = AX + B$, autrement dit $a_1' X_1 + a_2' X_2 = B$.

Si on prend pour X_1 et X_2 les deux fonctions qui engendrent \mathcal{S}_H , c'est-à-dire

$$X_1 = t \mapsto e^{t^2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \text{ et } X_2 = t \mapsto e^{t^2} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix},$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (a_1'(t) \cos(t) + a_2'(t) \sin(t)) e^{t^2} &= t \cos(t) \\ (a_1'(t) \sin(t) - a_2'(t) \cos(t)) e^{t^2} &= t \sin(t) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a_1'(t) \cos(t) + a_2'(t) \sin(t) &= t \cos(t) e^{-t^2} \\ a_1'(t) \sin(t) - a_2'(t) \cos(t) &= t \sin(t) e^{-t^2} \end{cases} \\ &(\text{on effectue } L_2 \leftarrow \sin(t)L_2 + \cos(t)L_1, \text{ puis } L_1 \leftarrow \\ &L_1 - \cos(t)L_2) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a_2'(t) &= 0 \\ a_1'(t) &= t e^{-t^2} \end{cases} \text{ et on choisit } \begin{cases} a_2(t) &= 0 \\ a_1(t) &= -\frac{1}{2} e^{-t^2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi on peut affirmer que l'application

$$X_0 : t \mapsto -\frac{1}{2}e^{t^2}X_1(t) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

est une solution du système.

3. On peut donc conclure que l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} du système différentiel (E) de départ est

$$\{X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 \mid (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

autrement dit

$$\left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos(t) + a_1 \cos(t)e^{t^2} + a_2 \sin(t)e^{t^2} \\ -\frac{1}{2} \sin(t) + a_1 \sin(t)e^{t^2} - a_2 \cos(t)e^{t^2} \end{pmatrix} \mid (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Une correction du problème 20.20

énoncé

E3A PSI 2019

Partie I

1. (a) Si f est une solution de (E_1) , alors par définition d'une solution d'équation différentielle d'ordre 3, f est 3 fois dérivable sur \mathbb{R} et vérifie $f^{(3)} = f$.

Donc en particulier f' est de classe \mathcal{C}^2 et f'' de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , et a fortiori f , f' et f'' sont dérivables sur \mathbb{R} , d'où $g = f + f' + f''$ est également dérivable sur \mathbb{R} , et

$$g' = f' + f'' + f^{(3)} = f' + f'' + f.$$

Ainsi g est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle du premier ordre (E_2) : $y' = y$.

- (b) La résolution de (E_2) est classique : l'ensemble de ses solutions est

$$\text{Vect}(\exp) = \{ \lambda \exp \mid \lambda \in \mathbb{C} \} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto \lambda e^t \mid \lambda \in \mathbb{C} \end{array} \right\}.$$

(c) \implies



On procède dans un premier temps à l'**analyse** de l'équation (E_1) , dans laquelle on cherche les formes nécessaires des solutions. Pour cela on suppose qu'une fonction est solution et on étudie les conditions qui lui sont alors imposées.

On a vu que si f est une solution de l'équation (E_1) , alors $g = f + f' + f''$ est solution de (E_2) . Donc, d'après la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \lambda e^t.$$

C'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) + f'(t) + f(t) = \lambda e^t.$$

Autrement dit, f est solution de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$, équation différentielle linéaire du second ordre, dont le membre de droite est de forme exponentielle.

- ⊕ Son équation homogène associée est $(H) : y'' + y' + y = 0$, équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants qui a pour équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$, de solutions classiques j et j^2 .

On en déduit que l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle (H) est

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_H &= \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \alpha e^{jt} + \beta e^{j^2 t} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \end{array} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(t \mapsto e^{jt}, t \mapsto e^{j^2 t} \right). \end{aligned}$$

- ⊕ On cherche une solution particulière sous la forme $f_p : t \mapsto \mu e^t$, où $\mu \in \mathbb{C}$.

L'application f_p est bien sûr de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , et vérifie (E_λ) si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mu e^t + \mu e^t + \mu e^t = \lambda e^t \iff 3\mu = \lambda \iff \mu = \frac{\lambda}{3}.$$

Exercices du chapitre 20. Fonctions vectorielles

- ⊕ Donc si f est solution de (E_1) , alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \alpha e^{jt} + \beta e^{j^2 t} + \frac{\lambda}{3} e^t.$$

⇒



Voici venu le temps de la **synthèse**, étape dans laquelle on cherche, parmi les formes nécessaires des solutions obtenues lors de l'analyse, lesquelles sont vraiment solutions.

Réciproquement, soit f une fonction de la forme ci-dessus, alors f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et

$$\forall t \in \mathbb{R}, f^{(3)}(t) = j^3 \alpha e^{jt} + j^6 \beta e^{j^2 t} + \frac{\lambda}{3} e^t = f(t) \text{ (car } j^3 = 1).$$

donc f est solution de (E_1) .

⇒ On peut donc conclure que l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \alpha e^{jt} + \beta e^{j^2 t} + \frac{\lambda}{3} e^t \mid (\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \end{array} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(t \mapsto e^{jt}, t \mapsto e^{j^2 t}, t \mapsto e^t \right). \end{aligned}$$

2. (a) Un bref calcul de déterminant donne le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1),$$

dont les racines sont 1, j et j^2 .

Cela permet de répondre à la question de la diagonalisation de A

- ⇒ le polynôme caractéristique de A n'est pas scindé sur \mathbb{R} , donc A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ d'après le critère de diagonalisation ;
⇒ le polynôme caractéristique de A est scindé et à racines simples dans \mathbb{C} (en effet $j \neq j^2$ vu que $j \neq 0$ et $j \neq 1$), donc A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.

- (b) La matrice A est donc diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.

La résolution (*que je ne détaille pas*) des systèmes homogènes de matrices respectives $(A - jI_3)X$, $(A - j^2I_3)$ et $(A - I_3)$, permet d'obtenir :

$$\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\text{Ker}(A - jI_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \right),$$

$$\text{Ker}(A - j^2I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j^4 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \right),$$

ce dont on déduit que

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \text{(S)} : X' = AX &\iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ &\iff (P^{-1}X)' = DP^{-1}X \text{ (car } P^{-1} \text{ est constante)} \\ &\iff \begin{cases} Y = P^{-1}X \\ Y' = DY \end{cases} \end{aligned}$$

En posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, on obtient

$$Y' = DY \iff \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = jy_2 \\ y_3' = j^2y_3 \end{cases} \iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3, Y = t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t \\ \lambda_2 e^{jt} \\ \lambda_3 e^{j^2t} \end{pmatrix}.$$

On peut donc conclure, en remarquant que $Y = P^{-1}X$ équivaut à $X = PY$,

que

$$X' = AX \iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3, X = PY = t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{jt} + \lambda_3 e^{j^2 t} \\ \lambda_1 e^t + j\lambda_2 e^{jt} + j^2 \lambda_3 e^{j^2 t} \\ \lambda_1 e^t + j^2 \lambda_2 e^{jt} + j\lambda_3 e^{j^2 t} \end{pmatrix}.$$

(c) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une application de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R} . Posons $X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix}$.

Alors X est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} puisque toutes ses composantes le sont, et

$$X' = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \\ f^{(3)} \end{pmatrix}. \text{ Par conséquent}$$

$$f \text{ est solution de } (E_1) \iff f^{(3)} = f$$

$$\iff \begin{cases} f' = f' \\ f'' = f'' \\ f^{(3)} = f \end{cases} \iff X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X,$$

donc f est solution de (E_1) si et seulement si $X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix}$ est solution de

(S).

Or nous avons déterminé les solutions de (S) dans la question précédente, dont on déduit que f est solution de (E_1) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{jt} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} + \beta e^{j^2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j^4 \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que (en identifiant coefficient par coefficient) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(t) = \alpha e^{jt} + \beta e^{j^2 t} + \gamma e^t \\ f'(t) = \alpha j e^{jt} + \beta j^2 e^{j^2 t} + \gamma e^t \\ f''(t) = \alpha j^2 e^{jt} + \beta j^4 e^{j^2 t} + \gamma e^t \end{cases}$$

Les deux dernières égalités sont conséquence de la première. Donc, en conclusion :

f est solution de $(E_1) \iff \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \alpha e^{jt} + \beta e^{j^2 t} + \gamma e^t$,

et l'on retrouve bien la description des solutions donnée dans la question 1.(c).

3. (a) Soit $x > 0$,

$$\frac{\left| \frac{x^{3(n+1)}}{(3(n+1))!} \right|}{\left| \frac{x^{3n}}{(3n)!} \right|} = \frac{|x|^{3n+3}}{|x|^{3n}} \frac{(3n)!}{(3n+3)!} = \frac{|x|^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x|^3}{27n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc d'après la règle de D'Alembert, la série $\sum \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que le rayon de convergence demandé est $+\infty$.

(b) L'application φ est une somme d'une série entière de rayon de convergence infini, donc elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur son intervalle de convergence, c'est-à-dire \mathbb{R} .

(c) Une somme de série entière est dérivable terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (3n) \frac{x^{3n-1}}{(3n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (3n) \frac{x^{3n-1}}{(3n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}, \quad (20.4)$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (3n-1) \frac{x^{3n-2}}{(3n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!},$$

et enfin

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi^{(3)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (3n-2) \frac{x^{3n-3}}{(3n-2)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!}$$

$$\underset{[n'=n-1]}{=} \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{x^{3n'}}{(3n')!},$$

c'est-à-dire $\varphi^{(3)} = \varphi$.

On en déduit par une récurrence que je ne détaille pas que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} & \text{si } k \equiv 0 \pmod{3}, \\ \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} & \text{si } k \equiv 1 \pmod{3}, \\ \varphi''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} & \text{si } k \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

- (d) -i)- On sait que j est racine de $1 + X + X^2$, donc $1 + j + j^2 = 0$, donc il est facile de vérifier que $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est solution de ce système.

Réciproquement, la matrice de ce système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j^4 \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible (on pourrait invoquer la question 2b pour le justifier) car son déterminant est le déterminant de Vandermonde $V_3(1, j, j^2)$ qui est non nul puisque $1, j$ et j^2 sont deux à deux distincts. par conséquent ce système est de Cramer, autrement dit il possède une unique solution, qui est donc $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

- ii)- D'après la question précédente, $\varphi^{(3)} = \varphi$. On en déduit que φ est solution de (E_1) ; d'après la question 1.(c), il existe donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \alpha e^{ix} + \beta e^{j^2x} + \gamma e^x.$$

En dérivant l'égalité ci-dessus, et en l'évaluant en 0, on a :

$$\begin{cases} \varphi(0) & = \alpha + \beta + \gamma \\ \varphi'(0) & = \alpha j + \beta j^2 + \gamma \\ \varphi''(0) & = \alpha j^2 + \beta j^4 + \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi(0) & = \alpha + \beta + \gamma, \\ \varphi'(0) & = \alpha j + \beta j^2 + \gamma, \\ \varphi''(0) & = \alpha j^2 + \beta j + \gamma, \end{cases} \quad (20.5)$$

Mais d'autre part, en examinant les termes constants des développements en série entière en 0 de φ , φ' et φ'' explicités dans la question précédente, on a

$$\begin{cases} \varphi(0) &= 1, \\ \varphi'(0) &= 0, \\ \varphi''(0) &= 0. \end{cases} \quad (20.6)$$

En combinant (20.5) et (20.6), on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 1, \\ \alpha j + \beta j^2 + \gamma &= 0, \\ \alpha j^2 + \beta j + \gamma &= 0, \end{cases}$$

qui d'après la question précédente a pour unique solution $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Ainsi, sachant que $j^2 = \bar{j}$, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) &= \frac{e^x + e^{jx} + e^{j^2x}}{3} = \frac{e^x + e^{jx} + e^{\bar{j}x}}{3} \\ &= \frac{e^x + e^{jx} + \overline{e^{jx}}}{3} = \frac{e^x + 2\operatorname{Re}(e^{jx})}{3}. \end{aligned}$$

Enfin comme $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on a pour tout réel x ,

$$\operatorname{Re}(e^{jx}) = \operatorname{Re}(e^{jx}) e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),$$

ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{3} \left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right).$$