Exercice 21.1 – Simplification d'une expression

On pose $f(x,y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

1. Montrer que le domaine de définition D de f est la réunion de trois ouverts de $\mathbb{R}^2$ deux à deux disjoints.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D et exprimer ses dérivées partielles.
3. Montrer que que f est constante sur chacun des ouverts de son ensemble de définition, et simplifier l'expression de f.

Exercice 21.2 – Équations élémentaires aux dérivées partielles.

Résoudre dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + f(x,y) = 0.$$

Exercice 21.3

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ solutions des systèmes suivants :

$$1. \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & xy^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & yx^2. \end{array}\right. \qquad 2. \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \mathrm{e}^x y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \mathrm{e}^x + 2y. \end{array}\right. \qquad 3. \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & x^2 y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & xy^2. \end{array}\right.$$

Exercice 21.4 – Extrait de Mines-Ponts 2018 PC

Soient U un ouvert du plan $\mathbb{R}^2$, et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique, c'est-à-dire de classe $\mathscr{C}^2$ sur U telle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Soit $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{U}$, et $\delta > 0$ tel que $\mathrm{B}_o(\mathrm{M}_0, \delta) \subset \mathrm{U}$, on pose

$$g : (r,t) \in \left]-\delta \,;\, \delta\right[\times \mathbb{R} \longmapsto g(r,t) = f\left(x_0 + r\cos(t), y_0 + r\sin(t)\right).$$

Vérifier sur $\left]-\delta \,;\, \delta\right[\times \mathbb{R}$ la relation : $r^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r\dfrac{\partial g}{\partial r} = -\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}$.

Exercice 21.5 – Changement de coordonnées pour résoudre une équation aux dérivées partielles

Déterminer, en posant $x = u\mathrm{e}^{v}$ et $y = \mathrm{e}^{-v}$, toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\Omega = \mathbb{R} \times]0\,;+\infty[$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \Omega,\quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Exercice 21.6 – Équations élémentaires aux dérivées partielles (suite)

Résoudre dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 + x.$$

Exercice 21.7

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$, et $f(x,y) = \frac{y^4}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. La fonction f est-elle $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 21.8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy}$.

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Le prolongement obtenu est-il de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 21.9

Déterminer les extrema de l'application f définie par

$$f(x,y) = x^3 - 15xy^2 - 3xy + 12.$$

Exercice 21.10

Rechercher les extrema globaux sur $\Delta = [0\,;2] \times [-1\,;0]$ de l'application

$$f : (x,y) \mapsto x^2 - 2x + xy + y^2.$$

Exercice 21.11

On s'intéresse à la fonction $f : (x,y) \mapsto e^{x+y} + e^{3-x} + e^{3-y}$.

1. Démontrer *l'inégalité arithmético-géométrique* :

$$\forall (a,b,c) \in \left(\mathbb{R}_+\right)^3, \quad \frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

2. Déterminer les extrema locaux et globaux de f.

Exercice 21.12

On note $f(x,y)$ le carré du produit des distances du point $M = (x,y)$ à chaque côté du triangle OAB où $A = (a,0)$ et $B = (0,b)$.
Déterminer le maximum de f dans le triangle OAB.

Exercice 21.13

Déterminer les extremums sur $K = [0\,;\,1]^2$ de la fonction

$$(x,y) \mapsto \min(x,y) \times |x-y|.$$

Exercice 21.14 – Extrait de CCINP 2020

On se donne un entier $n \geqslant 2$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$, et $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.
On fixe des réels $a_{i,j}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ et on considère l'application $f : B_n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}x_i x_j\right) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}x_i x_j.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier les extremums de f sur la partie B_n.
On définit la matrice $M_f \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comme la matrice **symétrique** dont les coefficients $(m_{i,j})$ vérifient :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i = j \\ \frac{a_{i,j}}{2} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette partie, on suppose $n=2$ et que l'application $f : \mathrm{B}_2 \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\forall (x_1,x_2) \in \mathrm{B}_2, \quad f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2.$$

1. Justifier que l'application f admet un maximum et un minimum sur B_2.
2. En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos(t),\sin(t))$, déterminer les extremums de l'application f sur la frontière $\mathrm{S}_2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ de B_2.
3. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer les points critiques de l'application f dans la boule unité ouverte $\mathrm{B}_2' = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ de $\mathbb{R}^2$.
4. En déduire que le maximum de f sur B_2 est 3 et que le minimum de f sur B_2 est -1.
5. Vérifier que la plus grande valeur propre de M_f est égale au maximum de f sur B_2 et que la plus petite valeur propre de M_f est égale au minimum de f sur B_2.

Partie II - Le cas général

On considère $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{B}_n$ et on note X la colonne de ses coordonnées.

6. Montrer que $f(x) = \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{M}_f\mathrm{X}$.
7. Justifier que la matrice M_f est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on note $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de M_f comptées avec leur multiplicité et on suppose que $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$.
On fixe une matrice **orthogonale** $\mathrm{P} \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M}_f = \mathrm{PDP}^{-1}$ où :

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

8. Montrer les égalités $\mathrm{Y}^\mathrm{T}\mathrm{Y} = \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{X} = \|x\|^2$.
9. On suppose que $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$. Montrer que $\lambda_1 \leqslant \mathrm{Y}^\mathrm{T}\mathrm{DY} \leqslant \lambda_n$ et en déduire que $\lambda_1 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_n$.
10. En déduire que si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, alors $\max_{\mathrm{B}_n}(f) = \lambda_n$ et $\min_{\mathrm{B}_n}(f) = \lambda_1$.
11. Dans le cas où $\lambda_1 \geqslant 0$, déterminer le maximum et le minimum de f sur B_n.

Partie III - Application des résultats

Dans cette **partie,** on suppose que $n \geqslant 3$ et que

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{B}_n, \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2x_i x_j.$$

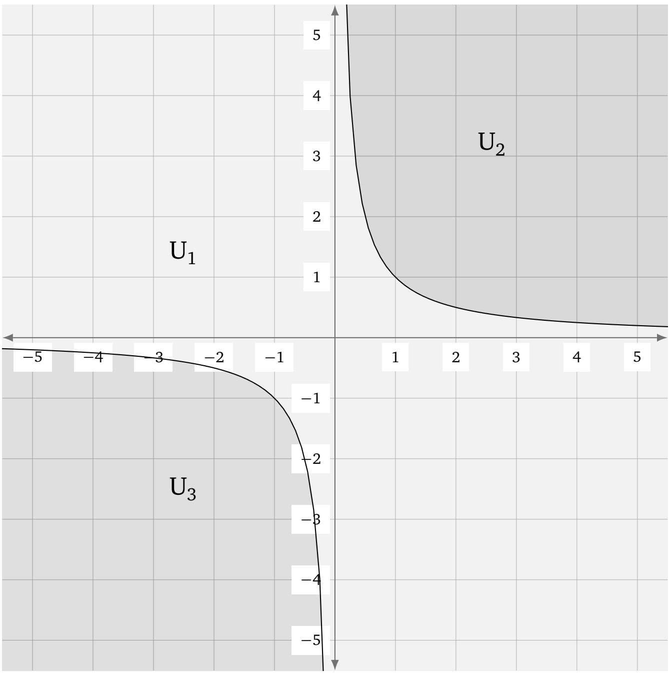
12. Déterminer le maximum et le minimum de l'application f sur B_n (on pourra commencer par déterminer le rang de la matrice $\mathrm{M}_f - 2\mathrm{I}_n$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

Solutions

Une correction de l'exercice 21.1

énoncé

Le programme de PC ne connaît que la convexité, donc c'est seulement lorsque les dérivées partielles d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sont nulles sur une partie convexe qu'un-e élève de PC peut en déduire que la fonction est constante.
Mais en vérité, c'est sur toute partie connexe*, c'est-à-dire faite d'un seul morceau, que ce résultat est valable, et on va se permettre de l'appliquer ci-dessous.*



1. $f(x, y)$ est définie si, et seulement si, $xy \neq 1$, et l'ensemble $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 1\}$

est réunion de

$$U_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\right\}$$
$$U_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } xy > 1\right\}$$
$$U_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \text{ et } xy > 1\right\}$$

les applications $\varphi : (x,y) \mapsto x$ et $\psi : (x,y) \mapsto xy$ sont polynomiales, donc continues sur $\mathbb{R}^2$, ainsi $U_1 = \psi^{-1}(]-\infty\,;1[)$, et $V = \psi^{-1}(]1\,;+\infty[)$ sont des ouverts, ainsi que $W_1 = \varphi^{-1}(]0\,;+\infty[)$ et $W_2 = \varphi^{-1}(]-\infty\,;0[)$.
Par conséquent, $U_2 = W_1 \cap V$ et $U_3 = W_2 \cap V$ sont encore des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

En vérité, la partie $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1\} = \psi^{-1}(]1\,;+\infty[)$ est aussi un ouvert, mais ce n'est pas un ouvert connexe, autrement dit formé d'un seul morceau. En effet, on ne peut pas passer du point $(-2,-2)$ au point $(2,2)$, qui sont tous deux dans A, par une trajectoire continue $t \mapsto (x(t), y(t))$ qui reste incluse dans A, car par le théorème des valeurs intermédiaires, x et y devraient s'annuler, puisqu'elles sont continues et passent de -2 à 2, et le point correspondant vérifie alors $xy = 0$, et n'est donc pas dans A.
Dans un ouvert non connexe, une fonction peut avoir un gradient nul en tout point sans être constante !

2. ➟ Les applications $(x,y) \mapsto x$, $(x,y) \mapsto y$, et $(x,y) \mapsto \frac{x+y}{1-xy}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$ comme fractions rationnelles définies sur $\mathscr{D}$,
   ➟ l'application arctan est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

   donc $(x,y) \mapsto \arctan(x)$, $(x,y) \mapsto \arctan(y)$ et $(x,y) \mapsto \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ sont encore $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$, et finalement f aussi comme somme de fonctions $\mathscr{C}^1$.

Pour tout $(x,y)\in\mathscr{D}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\times \arctan'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1-xy)-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1-xy)^2}\times\frac{1}{1+\frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}}\\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{1-2xy+(xy)^2+x^2+2xy+y^2}\\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = 0,
\end{aligned}$$

et de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$.

3. On en déduit que f est constante sur chacun des trois ouverts connexes.
Ainsi on utilise le fait que $\arctan(0)=0$, $\arctan(\pm1)=\pm\frac{\pi}{4}$, et $\arctan \underset{\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\frac{\pi}{2}$, pour conclure que

$$\forall (x,y)\in \mathrm{U}_1,\ f(x,y)=f(0,0)=0,$$
$$\text{donc } \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)=\arctan(x)+\arctan(y),$$

$$\forall (x,y)\in \mathrm{U}_2,\ f(x,y)=\lim_{x\to+\infty} f(x,1)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$
$$\text{donc } \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)=\frac{\pi}{2}+\arctan(x)+\arctan(y),$$

$$\forall (x,y)\in \mathrm{U}_3,\ \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)=-\frac{\pi}{2}+\arctan(x)+\arctan(y).$$

Une correction de l'exercice 21.2 *énoncé*

1. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$, alors pour tout réel y (tel que $f(x,y)$ est défini et f admet une dérivée partielle en (x,y) par rapport à x) la fonction $x \mapsto f(x,y)$ a une dérivée nulle. Mais on ne peut en déduire que f est constante par rapport à x que sur chaque intervalle $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x,y) \text{ est défini}\}$.
   C'est pourquoi l'hypothèse selon laquelle f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ nous permet de conclure les yeux fermés que :
   $$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{C}(y) \in \mathbb{R},\ f(x,y)=\mathrm{C}(y),$$
   autrement dit comme f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$,
   $$\exists \mathrm{C} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}),\ f:(x,y)\mapsto \mathrm{C}(y).$$
2. Pour tout x fixé dans $\mathbb{R}$, la fonction $v : y \mapsto f(x,y)$ vérifie pour tout $y \in \mathbb{R}$, $v'(y) = \frac{1}{1+x^2} \times \frac{1}{1+y^2}$, donc il existe $\mathrm{C}(x)$ tel que $v(y) = \frac{1}{1+x^2}\arctan(y)+\mathrm{C}(x)$, c'est-à-dire
   $$\exists \mathrm{C} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}),\ f:(x,y)\mapsto \frac{1}{1+x^2}\arctan(y)+\mathrm{C}(x).$$
3. Il existe $\mathrm{C} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $f:(x,y)\mapsto \mathrm{C}(y)\mathrm{e}^{-x}$.

Une correction de l'exercice 21.3 *énoncé*

1. Soit f une solution du système, et soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Posons $g(x) = f(x,y)$. Alors la première relation s'exprime aussi par $g'(x) = xy^2$, soit $g(x) = \frac{1}{2}x^2y^2+$ Cte. Cette constante dépend de y, qui a été fixé le temps d'intégrer la relation. On en déduit l'existence de $\mathrm{C} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de sorte que, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+\mathrm{C}(y)$$
   Puisque f est $\mathscr{C}^1$, C est également $\mathscr{C}^1$ et la deuxième relation donne
   $$\mathrm{C}'(y)=0$$
   c'est-à-dire C est constante. Il existe donc $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ de sorte que
   $$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+\mathrm{A}.$$
   Réciproquement, une telle fonction est solution du système. 2. On reprend la même méthode, en fixant $y \in \mathbb{R}$ et en posant $g(x) = f(x,y)$. De $g'(x) = \mathrm{e}^x y$, on tire

$g(x) = e^x y + cte$. Il existe donc une fonction $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = e^x y + C(y)$. On dérive cette fois par rapport à y, et on trouve $C'(y) = 2y$, soit $C(y) = y^2 +$ Cte. Ainsi, si f est solution, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x, y) = e^x y + y^2 + A.$$

Réciproquement, ces fonctions sont solutions. 3. Si on reprend la méthode des questions précédentes, on observe que si f est solution, il existe une fonction $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 y + C(y)$. On dérive par rapport à y, et en utilisant la deuxième relation, on trouve que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$C'(y) = xy^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

Or, si y est fixé, le membre de gauche est constant, et le membre de droite est un polynôme de degré 3 en x : ceci est impossible et donc l'équation n'a pas de solutions. On aurait pu aussi remarquer que, si on cherchait une fonction de classe C^2, les dérivées partielles croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne pouvaient pas être égales, contredisant le théorème de Schwarz.

Une correction de l'exercice 21.4

énoncé

➟ Soit $h : (r, t) \in]-\delta, \delta[\times \mathbb{R} \mapsto (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)$.
La fonction h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-\delta, \delta[\times \mathbb{R}$ (car les deux fonctions coordonnées le sont).
De plus, $g = f \circ h$, donc g est de classe $\mathscr{C}^2$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

D'après la règle de la chaine, en posant $h(r, t) = (\varphi_1(r, t), \varphi_2(r, t))$, on a, pour tout $(r, t) \in]-\delta, \delta[\times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}(r, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(r, t))\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(r, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(r, t))\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}(r, t) \\
&= \cos(t)\frac{\partial f}{\partial x}(h(r, t)) + \sin(t)\frac{\partial f}{\partial y}(h(r, t)) \\
\frac{\partial g}{\partial t}(r, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(r, t))\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(r, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(r, t))\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(r, t) \\
&= -r\sin(t)\frac{\partial f}{\partial x}(h(r, t)) + r\cos(t)\frac{\partial f}{\partial y}(h(r, t))
\end{aligned}$$

puis en appliquant de nouveau la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t) = \cos(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(r,t) + \cos(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}(r,t)\\ + \sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(r,t) + \sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}(r,t)\\ = \cos^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h(r,t)) + 2\cos(t)\sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h(r,t))\\ + \sin^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h(r,t)) \text{ (par le théorème de Schwarz),}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t) = -r\cos(t)\frac{\partial f}{\partial x}(h(r,t)) - r\sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(r,t)\\ - r\sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(r,t) - r\sin(t)\frac{\partial f}{\partial y}(h(r,t))\\ + r\cos(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(r,t)\\ + r\cos(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(r,t)\\ = -r\cos(t)\frac{\partial f}{\partial x}(h(r,t)) + r^2\sin^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h(r,t))\\ - r^2\cos(t)\sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h(r,t)) - r\sin(t)\frac{\partial f}{\partial y}(h(r,t))\\ - r^2\cos(t)\sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(h(r,t)) + r^2\cos^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h(r,t)),\end{aligned}$$

donc, comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h(r,t)) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h(r,t))$ car f est harmonique, on a, pour tout

$(r,t) \in \left]-\delta, \delta\right[\times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left(r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r\frac{\partial g}{\partial r}\right)(r,t) &= r^2\cos^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h(r,t)) \\ &\quad + 2r^2\cos(t)\sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h(r,t)) + r^2\sin^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h(r,t)) \\ &\quad + r\cos(t)\frac{\partial f}{\partial x}(h(r,t)) + r\sin(t)\frac{\partial f}{\partial y}(h(r,t)) \\ &= -r^2\cos^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h(r,t)) + 2r^2\cos(t)\sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(h(r,t)) \\ &\quad - r^2\sin^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h(r,t)) + r\cos(t)\frac{\partial f}{\partial x}(h(r,t)) \\ &\quad + r\sin(t)\frac{\partial f}{\partial y}(h(r,t)) \\ &= -\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t),\end{aligned}$$

donc on a bien $r^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r\dfrac{\partial g}{\partial r} = -\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}$ sur $\left]-\delta,\delta\right[\times \mathbb{R}$.

Une correction de l'exercice 21.5

énoncé

La résolution d'équations aux dérivées partielles est l'affaire des mathématiques appliquées, donc on ne va pas trop s'embarrasser d'existences et autres rigueurs…

- f est $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω, et $X : (u,v) \mapsto (x,y) = (ue^v, e^{-v})$, dont la réciproque est $(x,y) \mapsto (xy, -\ln(y))$, est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ sur Ω, donc $g : (u,v) \mapsto f(x,y) = f(ue^v, e^{-v})$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, avec en particulier (en appliquant la proposition 20.8)

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial v} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \times ue^v + \frac{\partial f}{\partial y} \times (-e^{-v}) \\ &= x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y},\end{aligned}$$

➟ ainsi

$$\forall (x,y)\in\Omega,\ \ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$
$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \ \frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

ce qui équivaut à

$$\exists C\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}),\ \ g : (u,v)\mapsto g(u,v) = C(u)$$

c'est-à-dire

$$\exists C\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}),\ \ f : (x,y)\mapsto f(x,y) = C(xy).$$

On vérifie bien que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$= x\times C'(xy)\times y - y\times C'(xy)\times x = 0.$$

Une correction de l'exercice 21.6 *énoncé*

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 0$, équivaut à

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 0$$

$$\exists c\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}),\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = c(y),$$

d'où

$$\exists (A,B)\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R})\times\mathscr{C}^2(\mathbb{R}),\ \ f(x,y) = A(y) + B(x).$$

2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$, donc

$$\exists A\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}),\ \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = A(y),$$

d'où

$$\exists (A,B)\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})^2,\ \ f(x,y) = A(y)x + B(y).$$

3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1+x$, donc

$$\exists a \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = a(y) + x + \frac{1}{2}x^2,$$

d'où

$$\exists (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) \times \mathscr{C}^1(\mathbb{R}),\quad f(x,y) = \mathrm{A}(y) + \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) y + \mathrm{B}(x).$$

Une correction de l'exercice 21.7

énoncé

1. f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme toute fraction rationnelle sur son domaine de définition.
   Et en $(0,0)$, avec les coordonnées polaires :
   $$|f(x,y)| = \frac{(r\sin(\theta))^4}{r^2} = r^2 \sin^4(\theta) \leqslant r^2 = x^2 + y^2 \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} 0,$$
   donc par encadrement $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} 0 = f(0,0)$, ce qui prouve la continuité de f en $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.
2. ➟ D'une part, $t \mapsto f(t,0) = 0$ et $t \mapsto f(0,t) = t^2$ sont dérivables en 0 avec un nombre dérivé nul pour les deux, donc f admet des dérivées partielles en $(0,0)$, qui valent 0.
   ➟ D'autre part, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2y^5}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4y^3}{x^2+y^2}$$
   et de nouveau avec les coordonnées polaires, on prouve que ces deux fonctions tendent vers 0, en $(0,0)$ ce qui permet de conclure que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. ➟ $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(t,0) = 0$ est dérivable en 0 de nombre dérivé nul, donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ admet une dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$, qui vaut $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$.
   ➟ $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = 0$ est dérivable en 0 de nombre dérivé nul, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ admet une dérivée partielle nulle par rapport à y en $(0,0)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$.

➟ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{8xy^5}{(x^2+y^2)^3}-\frac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

et pour tout $t\neq 0$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(t,t)=-1.$$

Si f est $\mathscr{C}^2$ en $(0,0)$, alors en particulier :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0,$$

donc par composition des limites

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(t,t)=-1\xrightarrow[t\longrightarrow 0]{}0,$$

ce qui entraîne que $-1=0$ dont nous savons que c'est faux.

Une correction de l'exercice 21.8 *énoncé*

1. ➟ Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2+y^2-xy=(x-\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2$ est nul si, et seulement si, $(x,y)=(0,0)$, donc la fraction rationnelle f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   ➟ Du résultat précédent on déduit que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $x^2+y^2-xy=(x-\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2\geqslant\frac{3}{4}y^2$, donc :

$$|f(x,y)|\leqslant\frac{y^4}{\frac{3}{4}y^2}=\frac{4}{3}y^2\xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{}0,$$

   donc par encadrement $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{}0$, ce qui nous autorise à prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ en posant $f(0,0)=0$.
2. ➟ On sait déjà que f, prolongée comme précédemment, est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. De plus

$$\forall(x,y)\neq(0,0),\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{(2x-y)y^4}{(x^2-xy+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{(x-2y)y^4}{(x^2-xy+y^2)^2}+\frac{4y^3}{x^2-xy+y^2}.$$

➟ ➔ $\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t-0} = 0 \xrightarrow[t\longrightarrow 0]{} 0$, donc f admet une dérivée partielle selon x en $(0,0)$, qui vaut $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

➔ De même $\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t-0} = \frac{t^2}{t} = t \xrightarrow[t\longrightarrow 0]{} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

➟ Avec les coordonnées polaires $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, on remarque que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &= \left|-\frac{r(2\cos(\theta)-\sin(\theta))\sin(\theta)^4}{\left(\cos(\theta)^2-\cos(\theta)\sin(\theta)+\sin(\theta)^2\right)^2}\right| \\ &\leqslant r \times \frac{|2\cos\theta|+|\sin\theta|}{|1-\cos(\theta)\sin(\theta)|^2} \leqslant r \times \frac{3}{\left|1-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right|^2} \\ &\leqslant r \times \frac{3}{\frac{1}{4}} \ \textit{(car } \tfrac{1}{2} \leqslant 1-\tfrac{1}{2}\sin(2\theta) \leqslant \tfrac{1}{2}\textit{)} \\ &\leqslant 12r = 12\sqrt{x^2+y^2},\end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 12\sqrt{x^2+y^2},$$

ce dont on déduit par encadrement que $\frac{\partial f}{\partial x}$ tend vers $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ en $(0,0)$. Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$, et par conséquent sur $\mathbb{R}^2$.

➟ De même

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| &= \left|\frac{\left(4\cos(\theta)^2-3\cos(\theta)\sin(\theta)+2\sin(\theta)^2\right)r\sin(\theta)^3}{\left(\cos(\theta)^2-\cos(\theta)\sin(\theta)+\sin(\theta)^2\right)^2}\right| \\ &\leqslant r\frac{9}{\left|1-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right|^2} \leqslant 36r = 36\sqrt{x^2+y^2},\end{aligned}$$

d'où la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$, et par conséquent sur $\mathbb{R}^2$.

➟ On peut donc affirmer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3. ➟ On sait déjà que f, prolongée, est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (d'après la question précédente), et

$\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus pour tout $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{2(2x-y)(x-2y)y^4}{(x^2-xy+y^2)^3} - \frac{4(2x-y)y^3}{(x^2-xy+y^2)^2} + \frac{y^4}{(x^2-xy+y^2)^2}.$$

- $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t-0} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ admet une dérivée partielle selon x en $(0,0)$, ce qui prouve que f admet en $(0,0)$ la dérivée seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$.
- Mais pour tout $t \neq 0$, on remarque que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(t,t) = (\text{...calculs...}) = -1$$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ ne tend pas vers $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$, ce qui prouve que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$, et permet de conclure que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Une correction de l'exercice 21.9

énoncé

- La fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, par conséquent, tout extremum de f sur $\mathbb{R}^2$ sera un point critique. Cherchons donc ces points critiques.
- le gradient de f est donné par

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 15y^2 - 3y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -30xy - 3x = -30x\left(y + \frac{1}{10}\right)$$

donc celui-ci est nul si, et seulement si,

$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ -15y^2-3y=0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} y=-\frac{1}{10} \\ 3x^2+\frac{15}{100}=0 \ \textit{(ce qui est impossible)} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ -3y\,(5y+1)=0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=-\frac{1}{5} \end{array}\right.$$

On a donc deux points critiques qui sont $(0,0)$ et $(0,-\frac{1}{5})$, ce sont les seuls points possibles où f peut éventuellement atteindre un extremum.

➠ Pour tout réel t,

$$f(t,t)-f(0,0)=-14t^3-3t^2 \underset{t\to 0}{\sim} -3t^2$$

donc $f(t,t)-f(0,0)<0$ pour t dans un voisinage de 0 privé de 0, et

$$f(t,-t)-f(0,0)=-14t^3+3t^2 \underset{t\to 0}{\sim} 3t^2$$

donc $f(t,-t)-f(0,0)>0$ pour t dans un voisinage de 0 privé de 0.
On en déduit que $f(0,0)$ n'est pas un extremum de f sur $\mathbb{R}^2$.

➠ Pour tout réel t,

$$f(0+t,-\frac{1}{5}+t)-f\left(0,-\frac{1}{5}\right) \underset{t\to 0}{\sim} 3t^2$$

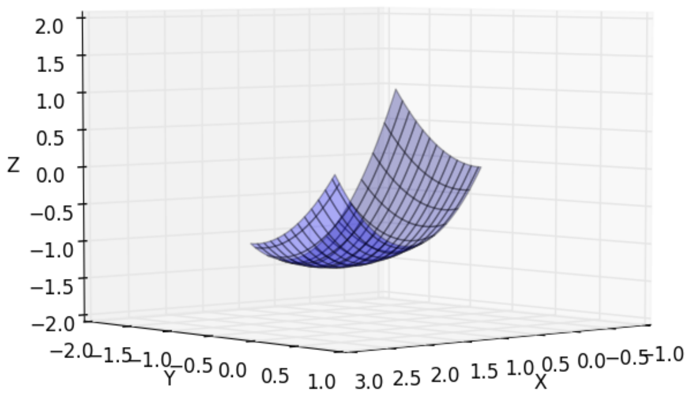
donc $f\left(0+t,-\frac{1}{5}+t\right)-f\left(0,-\frac{1}{5}\right)>0$ pour t dans un voisinage de 0 privé de 0, et

$$f\left(0-t,-\frac{1}{5}+t\right)-f\left(0,-\frac{1}{5}\right) \underset{t\to 0}{\sim} -3t^2$$

donc $f(0-t,-\frac{1}{5}+t)-f\left(0,-\frac{1}{5}\right)<0$ pour t dans un voisinage de 0 privé de 0.
On en déduit que $f(0,-\frac{1}{5})$ n'est pas un extremum de f sur $\mathbb{R}^2$.

On en conclut que f n'a pas d'extremum sur $\mathbb{R}^2$.

Une correction de l'exercice 21.10 *énoncé*



- f est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On en déduit que :
  - f est continue sur le fermé borné Δ, donc elle admet forcément un minimum et un maximum sur Δ ;
  - si f admet un extremum à l'intérieur de Δ, c'est-à-dire dans l'ouvert $]0\,;-2[\times]-1\,;0[$, alors ça ne peut être qu'en un point critique.
- Je vous laisse retrouver que le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$ est $(\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$ où f prend pour valeur $f(\frac{4}{3},-\frac{2}{3})=-\frac{4}{3}$, et que sur les bords f prend les valeurs extrêmes $f(0,-1)=1$ et $f(3/2,-1)=-5/4$.

  On en déduit que le maximum de f sur Δ est $f(0,-1)=1$, et que le minimum est $f(\frac{4}{3},-\frac{2}{3})=-\frac{4}{3}$.

Une correction de l'exercice 21.11 *énoncé*

1. Pour tout $(a,b,c) \in]0\,;+\infty[^3$,

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} = (abc)^{1/3} \iff a+b+c \geqslant 3(abc)^{1/3}$$
$$\iff (a+b+c)^3 \geqslant 27abc$$
$$\iff (a+b+c)^3 - 27abc \geqslant 0.$$

Fixons $(a,b) \in]0\,;+\infty[^2$, et étudions sur $]0\,;+\infty[$ la fonction $\varphi : x \mapsto (a+b+x)^3 - 27abx$.
Elle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$, de dérivée

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 3(a+b+x)^2 - 27ab = 3\left[(a+b+x)^2 - 9ab\right]\\ &= 3\left[(x+a+b)^2 - \left(3\sqrt{ab}\right)^2\right]\\ &= 3\left(x+a+b+3\sqrt{ab}\right)\left(x+a+b-3\sqrt{ab}\right)\\ &= 3\left(x-(-a-b-3\sqrt{ab})\right)\left(x-(-a-b+3\sqrt{ab})\right).\end{aligned}$$

On note $\beta = -(a+b+3\sqrt{ab})$ et $\alpha = -(a+b-3\sqrt{ab})$ les deux racines de $\varphi'(x)$, alors $\beta < 0 < \alpha$. Par conséquent :

- si $\alpha \leqslant 0$:

x	0 $+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$
$\varphi(x)$	$(a+b)^3$ $\nearrow$ $+\infty$

  donc pour tout $x > 0$, $\varphi(x) > \varphi(0) = (a+b)^3 > 0$, ce qui prouve le résultat voulu.
- si $\alpha > 0$, alors

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$(a+b)^3$	$\searrow$	$\varphi(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

donc pour tout $x > 0$, $\varphi(x) > \varphi(\alpha)$.
Or

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha) &= (a+b+\alpha)^3 - 27ab\,\alpha = (a+b+\alpha)^3 - (27ab)\,\alpha \\
&= (a+b+\alpha)^3 - \left[3(a+b+\alpha)^2\right] \times \alpha \ \ \textit{(car } \varphi'(\alpha) = 0\textit{)} \\
&= \left(3\sqrt{ab}\right)^3 - \left[3\left(3\sqrt{ab}\right)^2\right] \times \alpha = 27ab\left(\sqrt{ab} - \alpha\right) \\
&= 27ab\left(a+b-2\sqrt{ab}\right) = 27ab\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0,
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité voulue.

2. ➟ L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc elle n'atteint ses extrema qu'en des points critiques. Cherchons ces points critiques :

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) = 0 &\iff \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} e^{x+y} - e^{3-x} \\ e^{x+y} - e^{3-y} \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff e^{x+y} = e^{3-x} = e^{3-y} \iff x+y = 3-x = 3-y \\
&\qquad \textit{(car } \exp \textit{ est strictement croissante donc injective sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
&\iff x = y = 1
\end{aligned}$$

donc f admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$ qui est $A = (1,1)$.

➟ Étudions si $f(A) = f(1,1)$ est effectivement un extremum : pour tout $H = (x,y) \in$

$\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{A}+\mathrm{H})-f(\mathrm{A}) &= f(1+x,1+y)-f(1,1)\\
&= \mathrm{e}^{x+y+2}+\mathrm{e}^{2-x}+\mathrm{e}^{2-y}-\mathrm{e}^2\\
&= 3\left[\frac{\mathrm{e}^{x+y+2}+\mathrm{e}^{2-x}+\mathrm{e}^{2-y}}{3}-\sqrt[3]{\mathrm{e}^6}\right]\\
&= 3\left[\frac{\mathrm{e}^{x+y+2}+\mathrm{e}^{2-x}+\mathrm{e}^{2-y}}{3}-\sqrt[3]{\mathrm{e}^{x+y+2}\times\mathrm{e}^{2-x}\times\mathrm{e}^{2-y}}\right]\\
&\geqslant 0 \quad \textit{(d'après la question 1 car les exponentielles sont strictement positives).}
\end{aligned}$$

Donc $f(1,1)=\mathrm{e}^2$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$, et c'est le seul extremum.

Une correction de l'exercice 21.12

énoncé

➟ L'équation cartésienne de la droite (AB) est $bx+ay-ab=0$, donc la distance d'un point $\mathrm{M}(x,y)$ du plan à cette droite (voir l'exercice 14.7) est $\frac{|bx+ay-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Ainsi pour tout point $\mathrm{M}(x,y)$ du plan,

$$f(x,y)=x^2y^2\frac{(bx+ay-ab)^2}{a^2+b^2}.$$

➟ C'est une fonction polynomiale, elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour chercher son maximum, cherchons ses éventuels points critiques.
Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xy^2(-ab+ay+bx)(-ab+ay+2bx),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2x^2y(-ab+ay+bx)(-ab+2ay+bx).
\end{aligned}$$

Le maximum que l'on cherche n'est pas atteint sur les bords du triangle où f est nulle (et f n'est pas identiquement nulle dans le triangle !). Donc cherchons les points critiques de f en éliminant tous les points qui vérifient $x=0$, $y=0$, ou $bx+ay-ab=0$ (qui est l'équation de l'hypothénuse du triangle). Cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} -ab+ay+2bx &= 0\\ -ab+2ay+bx &= 0\end{cases} \quad \text{autrement dit} \quad \begin{cases} 2bx+ay &= ab\\ bx+2ay &= ab\end{cases}$$

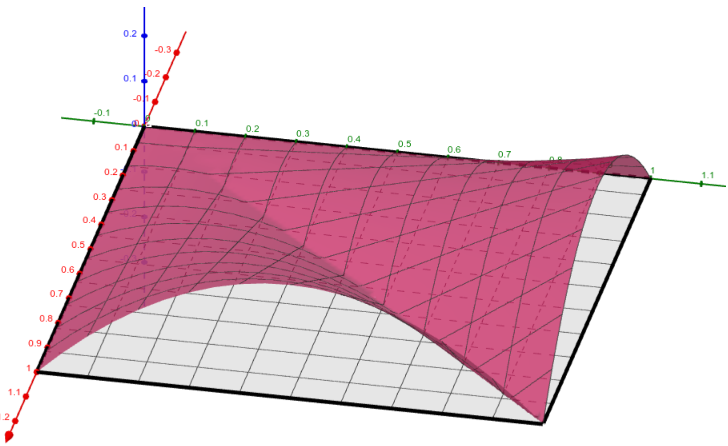
qui se résout en $x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{b}{3}$.

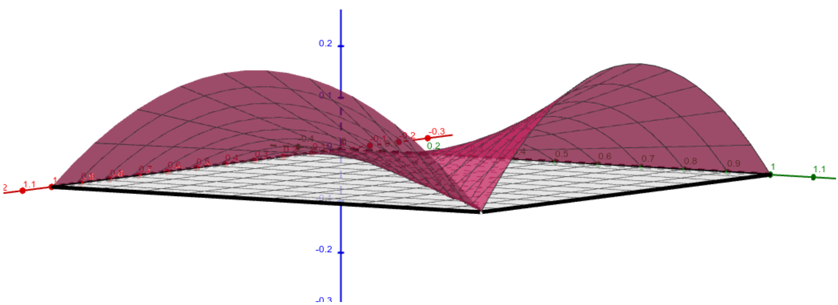
➟ Le maximum de f, qui est positive, ne peut donc être atteint qu'au point $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$, et ce maximum vaut :

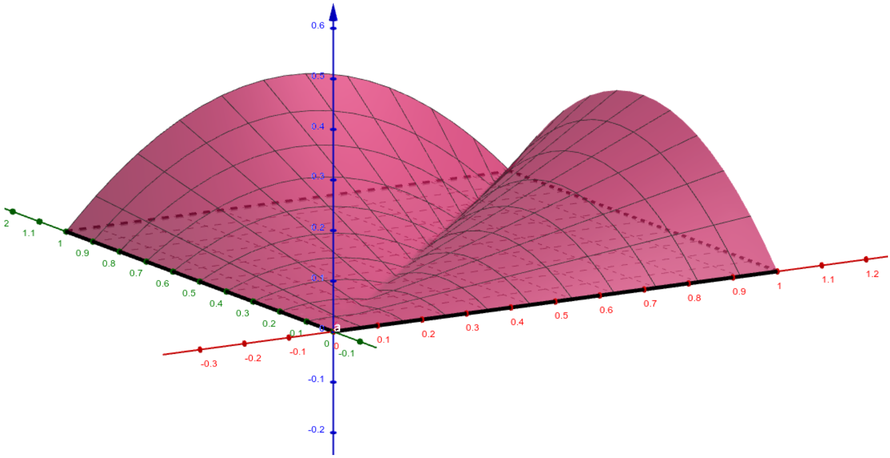
$$f\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right) = \frac{a^4 b^4}{9(a^2+b^2)}.$$

Une correction de l'exercice 21.13 *énoncé*

Tout d'abord trichons un peu avec geogebra.







1. Notons f cette fonction, et rappelons cette formule qui ne cesse de m'émerveiller :

$$\min(x, y) = \frac{1}{2}((x+y) - |x-y|).$$

On en déduit que pour tout $(x, y) \in \mathrm{K}$,

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\left((x+y)|x-y| - (x-y)^2\right),$$

ce qui nous permet d'affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions polynomiales par la valeur absolue qui sont toutes continues.

2. La partie K est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$, autrement dit une partie compacte. Ainsi le théorème des bornes atteintes nous permet de conclure que f admet un minimum et un maximum sur K.

On remarque que
- pour tout $(x, y) \in \mathrm{K}$, $x + y \geqslant x - y$ et $x + y \geqslant y - x$, donc $x + y \geqslant |x - y|$, d'où

$$f(x, y) \geqslant \frac{1}{2}\left(|x-y|^2 - (x-y)^2\right) = 0,$$

- et $f(0,0) = 0$,

donc elle admet pour minimum 0.

Il nous reste à chercher son maximum.

3. Comme la valeur absolue est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;0[$, on prouve par composition que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}$, où D est la droite $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$.

Si f atteint son maximum dans l'ouvert

$$\mathring{K} \setminus D = \left\{ (x,y) \in]0\ ;\ 1[^2 \mid y < x \right\} \cup \left\{ (x,y) \in]0\ ;\ 1[^2 \mid y > x \right\},$$

ce sera en un point critique.
Dans la partie $\left\{ (x,y) \in]0\ ;\ 1[^2 \mid y > x \right\}$, $f(x,y) = x(y-x)$, donc son gradient est

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y-2x \\ x \end{pmatrix}.$$

Il ne s'annule pas dans cette partie, f n'y admet pas de point critique.
Comme pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f(y,x)$, on en déduit par symétrie qu'il n'y a pas de point critique non plus dans l'autre partie.

4. On en déduit que f ne peut atteindre son maximum que sur les bords de K, ou sur le segment de D qui est dans K.
   Mais sur ce segment $x = y$, donc $f(x,y) = 0$, donc f atteindra son maximum sur un bord de K, c'est-à-dire sur les segments

   $$S_1 = \{(t,0) \mid t \in [0\ ;\ 1]\}, \qquad S_2 = \{(1,t) \mid t \in [0\ ;\ 1]\},$$
   $$S_3 = \{(t,1) \mid t \in [0\ ;\ 1]\}, \qquad S_4 = \{(0,t) \mid t \in [0\ ;\ 1]\}.$$

   - Sur S_1 et S_4, la fonction f est nulle.
   - Sur S_2 : pour tout $t \in [0\ ;\ 1]$,

     $$f(1,t) = \frac{1}{2}t(1-t) = -\frac{1}{2}\left(t^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

     donc f est maximale au point $(1, \frac{1}{2})$ où elle vaut $\frac{1}{8}$.
   - Sur S_3, $f(t,1)$ a la même expression, d'où donc f est maximale au point $(\frac{1}{2},1)$ où elle vaut aussi $\frac{1}{8}$.

En conclusion, le minimum de f sur K est 0, et son maximum est $\frac{1}{8}$.

Une correction de l'exercice 21.14 *énoncé*

Partie I - Etude d'un exemple

1. La boule unité fermée B_2 est par définition une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$, et l'application f est polynomiale donc continue, par conséquent le théorème des bornes atteintes permet d'affirmer que f admet un maximum et un minimum sur B_2.
2. La frontière S_2 est le cercle unité du plan, et celui-ci est paramétré par l'application $t \in$

$[0\ ;\ 2\pi] \mapsto \big(\cos(t), \sin(t)\big)$, donc pour tout point $A = (a,b) \in S_2$, il existe $t \in [0\ ;\ 2\pi]$ tel que $A = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$.
Posons $h : t \in [0, 2\pi] \mapsto f(\cos(t), \sin(t)) = \cos^2(t) + \sin^2(t) + 4\cos(t)\sin(t) = 1 + 2\sin(2t)$.
De $|\sin(2t)| \leqslant 1$, on déduit que $-1 \leqslant h(t) \leqslant 3$.
Or $h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ et $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$, donc h admet pour maximum 3 et pour minimum -1, donc f a pour maximum 3 et pour minimum -1 sur la frontière S_2.

3. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynomiale. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_1 f(x,y) = 2x + 4y \text{ et } \partial_2 f(x,y) = 2y + 4x.$$

Ainsi, $(x,y) \in B_2'$ est un point critique de f si, et seulement si,

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 2y + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

f admet donc un unique point critique sur B_2', le point $(0,0)$.

4. D'après la question 1., f possède un maximum et un minimum sur B_2.
Ce maximum peut
   - soit être atteint sur la frontière S_2 de B_2, et donc valoir 3,
   - soit en un point intérieur à B_2, c'est-à-dire un point de B_2', qui sera alors nécessairement un point critique de f. Or le seul point critique est $(0,0)$, et $f(0,0) = 0$ est inférieur à 3.

   Donc le maximum de f sur B_2 est 3, atteint sur S_2 (et plus précisément en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$).
Par le même raisonnement, le minimum est -1.

5. On a $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\chi_{M_f}(X) = (X-1)^2 - 4 = (X-3)(X+1),$$

donc $\mathrm{Sp}(M_f) = \{-1, 3\}$ et on a donc bien la propriété demandée.

Partie II - Le cas général

6. Grâce à la formule du produit matriciel, pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$,

$$(M_f X)_i = \sum_{j=1}^{n} (M_f)_{i,j} (X)_j = \sum_{j=1}^{n} (M_f)_{i,j} x_j,$$

donc

$$\begin{aligned}
X^T M_f X &= \sum_{i=1}^{n} (X^T)_i (M_f X)_i = \sum_{i=1}^{n} (X^T)_i \sum_{j=1}^{n} (M_f)_{i,j} (X)_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i-1} m_{i,j} x_i x_j + m_{i,i} x_i x_i + \sum_{j=i+1}^{n} m_{i,j} x_i x_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} m_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} m_{i,j} x_i x_j \\
&= \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} m_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} m_{i,j} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} m_{i,j} x_i x_j \quad \textit{(car } M_f \textit{ est une matrice symétrique)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j \quad \textit{(par définition des } m_{i,j}\textit{)} \\
&= \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

7. La matrice M_f est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
8. La matrice P est orthogonale, donc son endomorphisme canoniquement associé est une isométrie, d'où pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, et $X = PY$, on a par définition d'une isométrie $\|Y\| = \|X\|$, d'où

$$\begin{aligned}
X^T X &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|X\|^2 \\
&= \|Y\|^2 = Y^T Y.
\end{aligned}$$

9. En posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on montre avec la formule du produit matriciel que

$$\begin{aligned} Y^T DY &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} y_j D_{i,j} y_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} y_j D_{j,j} y_j \ \ \textit{(car } D_{i,j} = 0 \textit{ pour } i \neq j\textit{)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2 \ \ \textit{(car } D_{j,i} = \lambda_j\textit{).} \end{aligned}$$

Or pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, comme $\lambda_1 \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_n$ et $y_i^2 \geqslant 0$, on a

$$\lambda_1 y_i^2 < \lambda_i y_i^2 < \lambda_n y_i^2,$$

puis en additionnant

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 y_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_n y_i^2$$

c'est-à-dire $\lambda_1 \|Y\|^2 \leqslant Y^T DY \leqslant \lambda_n \|Y\|^2$.

Mais comme $X \in B_n$, on sait que $\|X\| \leqslant 1$, et comme de plus $\|Y\| = \|X\|$, on a aussi $\|Y\| \leqslant 1$.
Ainsi, sachant que $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_n > 0$, on obtient

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_1 \|Y\|^2 \leqslant Y^T DY \leqslant \lambda_n \|Y\|^2 \leqslant \lambda_n, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} Y^T DY &= \left(P^{-1}X\right)^T D \left(P^{-1}X\right) \\ &= \left(P^T X\right)^T D \left(P^T X\right) \ \ \textit{(car } P \in \mathcal{O}_n\textit{)} \\ &= X^T P D P^T X \\ &= X^T M_f X = f(x), \end{aligned}$$

d'où l'encadrement demandé $\lambda_1 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_n$.

10. On suppose encore $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$.
On vient de voir que pour tout $x \in B_n$, $\lambda_1 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_n$, donc f est minorée et majorée sur B_n, ainsi elle admet une borne supérieure et une borne inférieure sur B_n qui vérifient

$$\lambda_1 \leqslant \inf_{B_n}(f) \leqslant \sup_{B_n}(f) \leqslant \lambda_n.$$

De plus, en prenant un vecteur propre X_1 de norme 1 (quitte à le normaliser, c'est-à-dire le diviser par sa norme) de M_f associé à la valeur propre λ_1, alors (en confondant encore $x_1 \in \mathbb{R}^n$ et sa colonne X_1,

- $\|X_1\| = 1$, donc $X_1 \in B_n$,
- $f(x_1) = X_1^T M_f X_1 = X_1^T \lambda_1 X_1 = \lambda_1 X_1^T X_1 = \lambda_1 \|x_1\|^2 = \lambda_1$,

ainsi $\inf\limits_{B_n}(f) \leqslant \lambda_1$, ce qui permet de conclure que $\lambda_1 = f(x_1)$ est le minimum de f sur B_n.

De même avec un vecteur propre unitaire X_n associé à λ_n, $f(x_n) = \lambda_n$, on montre que $\max\limits_{B_n}(f) = \lambda_n$.

11. Supposons $\lambda_1 \geqslant 0$.
    - Alors, pour tout $x \in B_n$, en gardant les notations de cette partie, on a
    $$\begin{aligned} f(x) &= X^T M_f X = Y^T D Y \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{\geqslant 0} \underbrace{y_i^2}_{\geqslant 0} \geqslant 0, \end{aligned}$$
    et, comme $f((0,\ldots,0)) = 0$, on peut conclure que $\min_{B_n}(f) = 0$, minimum atteint pour $x = 0$.
    - L'étude faite sur le majorant dans les 2 questions précédentes reste valable ici, donc on a $\max_{B_n}(f) = \lambda_n$.

Partie III - Application des résultats

12. Dans ce cas, $M_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $M_f - 2I_n = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(M_f - 2I_n) = 1$.

D'où, d'après le théorème du rang, on a

$$\dim \mathrm{Ker}(M_f - 2I_n) = n - \mathrm{rg}(M_f - 2I_n) = n - 1 \neq 0,$$

donc 2 est valeur propre de M_f et $E_2(M_f) = \mathrm{Ker}(m_f - 2I_n)$ est de dimension $n-1$. Comme M_f est symétrique réelle, elle est diagonalisable d'après le théorème spectral, et par conséquent

- 2 est valeur propre de M_f de multiplicité exactement $n-1$.

- M_f admet une dernière valeur propre, que l'on note λ.
- χ_{M_f} est scindé, donc la trace de M_f est égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, donc :

$$n = \mathrm{Tr}(M_f) = 2(n-1) + \lambda \iff \lambda = -n+2.$$

On a donc $\mathrm{Sp}(f) = \{-n+2, 2\}$, et, comme $-n+2 < 0$ et $2 > 0$, on a :

$$\min_{B_n}(f) = -n+2 \text{ et } \max_{B_n}(f) = 2.$$

Pour trouver la dernière valeur propre de M_f, on aurait aussi pu remarquer que la somme sur chaque ligne de M_f vaut $-n+2$, donc que $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M_f associé à la valeur propre $-n+2$, et un argument sur les dimensions des espaces propres permet alors de conclure qu'il n'y a pas d'autre valeur propre, et donc que $\mathrm{Sp}(M_f) = \{-n+2, 2\}$.