En petites dimensions

Exercice 22.1

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto f(M) = AM$.

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

Exercice 22.2

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.
M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 22.3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 22.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déduire de la question précédente les éléments propres de $aI_3 + bA + cA^2$, où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

Exercice 22.5

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.

Exercice 22.6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Donner un polynôme non nul annulateur de A de degré minimal.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

En dimension quelconque

Exercice 22.7

Soient n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$, et $E = \mathbb{K}_n[X]$.
Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières : avec ou sans un matrice de f.
2. Soit $Q \in E$, trouver $P \in E$ tel que $f(P) = Q$. *(Si $P \in E$, que vaut $P^{(n+1)}$?)*
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 22.8

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\,\mathrm{id}_E$ est nul.

1. Montrer que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

CC BY NC

Exercice 22.9

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts.

1. Montrer que $\Phi : P \mapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.
2. On pose pour tout $k \in \{1,2,3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{K}^3$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4. On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Exercice 22.10

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère les endomorphismes u et v de $\mathbb{R}[X]$ définis par
$$u : P \mapsto \int_1^X P, \text{ et } \quad v : P \mapsto P'.$$
   Déterminer $\operatorname{Ker}(u \circ v)$ et $\operatorname{Ker}(v \circ u)$.
   Le résultat de la question 1 est-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.

Exercice 22.11

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longrightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Exercice 22.12

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On suppose qu'il existe $v \in \mathrm{E}$ tel que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ? *(Discuter en fonction du vecteur v.)*

Exercice 22.13

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
   Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
   On considère la matrice $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général $a_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}$, et l'endomorphisme u de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $u(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{A}$.
   (a) Prouver que le polynôme $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 1$ est annulateur de u.
   (b) u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes : l'une avec l'aide de la question 1, l'autre sans.

Espaces euclidiens

Exercice 22.14

Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda \mathrm{I}_3 - \mathrm{A})$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   (c) en utilisant le rang de la matrice,
   (d) en calculant A^2.
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.
   Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

CC BY NC

Exercice 22.15

Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3=\mathrm{P}\oplus\mathrm{D}$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 22.16

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x\in\mathrm{E},\ ||x||=\sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $\mathrm{E}=\{f\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x\in[a,b]\ f(x)>0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\times\int_a^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\,,\ f\in\mathrm{E}\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Exercice 22.17

1. Soit $\mathrm{A}\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Prouver que $\mathrm{A}\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})\iff\mathrm{sp}(\mathrm{A})\subset[0,+\infty[$.
2. Prouver que $\forall\,\mathrm{A}\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{A}^2\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. Prouver que $\forall\,\mathrm{A}\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ \forall\,\mathrm{B}\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \mathrm{AB}=\mathrm{BA}\Longrightarrow\mathrm{A}^2\mathrm{B}\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $\mathrm{A}\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $\mathrm{B}\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}=\mathrm{B}^2$.

Exercice 22.18

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(\mathrm{A}^\perp\right)^\perp=\mathrm{A}$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^\perp=\mathrm{F}^\perp\cap\mathrm{G}^\perp$.
   (b) Démontrer que $(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})^\perp=\mathrm{F}^\perp+\mathrm{G}^\perp$.

Exercice 22.19

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Espaces vectoriels normés

Exercice 22.20

Pour toute matrice $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $\|\mathrm{A}\| = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|a_{i,j}\right|$.

1. Prouver que $\|\,\|$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que pour tout $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\|\mathrm{A}\times\mathrm{B}\| \leqslant n\,\|\mathrm{A}\|\,\|\mathrm{B}\|$.
   En déduire que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $\|\mathrm{A}^p\| \leqslant n^{p-1}\,\|\mathrm{A}\|^p$.
3. Démontrer que, pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \dfrac{\|\mathrm{A}\|^p}{p!}$ est convergente.
   La série de matrices $\sum \frac{\mathrm{A}^p}{p!}$ est-elle convergente ?

CC BY NC

Solutions

Une correction de l'exercice 22.1

énoncé

1. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   Alors $f(M) = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$.

   Ainsi

   $$M \in \operatorname{Ker} f \iff f(M) = 0_2 \iff \begin{cases} a &= -2c \\ b &= -2d \end{cases} \iff M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

   $$\iff M = c\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. (*)

   On pose $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   D'après (*), la famille (M_1, M_2) est génératrice de $\operatorname{Ker} f$.

   De plus, M_1 et M_2 sont non colinéaires ; donc (M_1, M_2) est libre.

   Donc (M_1, M_2) est une base de $\operatorname{Ker} f$.

2. $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, donc f est non injectif.

   Or f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

   On en déduit que f est non surjectif.

3. Par la formule du rang, $\operatorname{rg} f = 2$.

   On pose $M_3 = f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   M_3 et M_4 sont non colinéaires, donc (M_3, M_4) est une famille libre de $\operatorname{Im} f$.

   Comme $\operatorname{rg} f = 2$, (M_3, M_4) est une base de $\operatorname{Im} f$.

4. On a $\dim \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$. (1)

   Prouvons que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$: soit $M \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$.

   D'après 1. et 3., $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aM_1 + bM_2$ et $M = cM_3 + dM_4$.

   On a donc $\begin{cases} -2a &= c \\ -2b &= 2d \\ a &= 2c \\ b &= 4d \end{cases}$.

   On en déduit que $a = b = c = d = 0$, donc $M = 0$.

   Donc $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ (2)

   Donc, d'après (1) et (2), $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Une correction de l'exercice 22.2

énoncé

$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M)$.
Après calculs, on trouve, $\chi_M = X(X^2 + ca - ba - bc)$.

Premier cas : $ca - ba - bc < 0$
M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car M possède trois valeurs propres réelles distinctes.
Elle est, a fortiori, diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Deuxième cas : $ca - ba - bc = 0$
Alors, 0 est la seule valeur propre de M.
Ainsi, si M est diagonalisable, alors M est semblable à la matrice nulle c'est-à-dire $M = 0$ ou encore $a = b = c = 0$. Réciproquement, si $a = b = c = 0$ alors $M = 0$ et donc M est diagonalisable.
On en déduit que M est diagonalisable si et seulement si $a = b = c = 0$.

Troisième cas : $ca - ba - bc > 0$
Alors 0 est la seule valeur propre réelle et donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car $\chi_M(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$.
En revanche, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres complexes distinctes.

Une correction de l'exercice 22.3

énoncé

1. $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + aL_2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1+a \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   donc
   - si $a = 0$ ou $a = -1$, alors $\operatorname{rg}(A) = 2$;
   - sinon, $\operatorname{rg}(A) = 3$.

2. Notons χ_A le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ -a & \lambda & -1 \\ -a & -1 & \lambda \end{vmatrix}.$$

On remarque que sur chaque ligne, la somme des termes vaut $\lambda - a - 1$, donc on ajoute toutes les colonnes dans la première.

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &\underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-(a+1) & -a & -1 \\ \lambda-(a+1) & \lambda & -1 \\ \lambda-(a+1) & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-(a+1)) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2+aC_1 \\ C_3 \leftarrow C_3+C_1}}{=} (\lambda-(a+1)) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+a & 0 \\ 1 & -1-a & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-(a+1)) \times (\lambda+a)(\lambda-1).\end{aligned}$$

Ainsi les valeurs propres de A, qui sont les racines, sont $a+1$, $-a$ et -1.

Comme ces valeurs propres dépendent du paramètre a, elles ne sont pas forcément deux à deux distinctes, on va donc discuter selon leurs éventuelles égalités.

$$\begin{aligned} a+1 = -a &\iff a = -\frac{1}{2}, \\ a+1 = -1 &\iff a = -2, \\ -a = -1 &\iff a = 1. \end{aligned}$$

Ce qui amène aux quatre cas suivants :

- **Premier cas** : si $a \neq 1$, $a \neq -2$ et $a \neq -\frac{1}{2}$, alors A admet trois valeurs propres disctinctes, donc A est diagonalisable.
- **Deuxième cas** : si $a = 1$, alors $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$.
  Dans ce cas A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_{-1} = 2$, c'est-à-dire grâce au théorème du rang $\operatorname{rg}(A+I_3) = 1$.
  Or $A+I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc A est diagonalisable.

  Dans le cas où $a = 1$, on peut aussi remarquer que A est symétrique réelle donc diagonalisable.
- **Troisième cas** : si $a = -2$
  Alors, $\chi_A = (X+1)^2(X-2)$, et

$$A+I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

CC BY NC

est de rang au moins 2, donc la valeur propre -1 est d'ordre de multiplicité géométrique au plus 1, donc cet ordre vaut 1.

Et comme l'ordre de multiplicité algébrique de -1 est égal à 2, on peut conclure que A n'est pas diagonalisable.

➟ **Quatrième cas** : si $a = -\frac{1}{2}$, alors $\chi_A = (X - \frac{1}{2})^2(X+1)$, et

$$A - \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

est aussi de rang au moins 2, et on conclut comme ci-dessus mais avec la valeur propre $1/2$ que A est non diagonalisable.

Une correction de l'exercice 22.4

énoncé

1. $\chi_A = X^3 - 1$ donc $\mathrm{Sp}A = \{1, j, j^2\}$.
On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres distinctes.
On pose $E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_3)$, $E_j(A) = \mathrm{Ker}(A - jI_3)$ et $E_{j^2}(A) = \mathrm{Ker}(A - j^2 I_3)$.
Après résolution, on trouve $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E_j(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}\right)$.
Et, par conjugaison (comme A est à coefficients réels), $E_{j^2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right)$.

2. Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$, vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
On pose $e'_1 = (1,1,1)$, $e'_2 = (1, j^2, j)$, $e'_3 = (1, j, j^2)$ et $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
D'après 1., e' est une base de vecteurs propres pour f.
Soit P la matrice de passage de e à e'. On a $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & j^2 & j\\ 1 & j & j^2\end{pmatrix}$. Soit $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & j & 0\\ 0 & 0 & j^2\end{pmatrix}$.
Alors, $D = P^{-1}AP$, c'est-à-dire $A = PDP^{-1}$.
On en déduit que $B = aI_3 + bPDP^{-1} + cPD^2P^{-1} = P\left(aI_3 + bD + cD^2\right)P^{-1}$.
C'est-à-dire, si on pose $Q = a + bX + cX^2$, alors $B = P\begin{pmatrix}Q(1) & 0 & 0\\ 0 & Q(j) & 0\\ 0 & 0 & Q(j^2)\end{pmatrix}P^{-1}$.

On en déduit que B est diagonalisable et que les valeurs propres, distinctes ou non, de B sont $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$.

Premier cas : $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont deux à deux distincts

B possède trois valeurs propres distinctes : $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$.
De plus, on peut affirmer que :

$$E_{Q(1)}(B) = E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right),\ E_{Q(j)}(B) = E_j(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}\right) \text{ et } E_{Q(j^2)}(B) = E_{j^2}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right).$$

Deuxième cas : deux valeurs exactement parmi $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont égales.

Supposons par exemple que $Q(1) = Q(j)$ et $Q(j^2) \neq Q(1)$.
B possède deux valeurs propres distinctes : $Q(1)$ et $Q(j^2)$.
De plus, on peut affirmer que :

$$E_{Q(1)}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}\right) \text{ et } E_{Q(j^2)}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right).$$

Troisième cas : $Q(1) = Q(j) = Q(j^2)$.
B possède une unique valeur propre : $Q(1)$.
De plus, on peut affirmer que $B = Q(1)I_3$ et $E_{Q(1)}(B) = \mathbb{C}^3$.

Une correction de l'exercice 22.5 *énoncé*

1. On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-3)(X+2)$ et donc $\text{Sp}A = \{-2,3\}$.
   Après résolution des équations $AX = 3X$ et $AX = -2X$, on obtient :
   $$E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \text{ et } E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\right).$$

2. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   $$ND = DN \iff \begin{cases} -2b &= 3b \\ 3c &= -2c \end{cases} \iff b = c = 0 \iff N \text{ est diagonale.}$$

   On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$AM = MA \iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \iff D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \iff P^{-1}MP$ commute avec D.

C'est-à-dire, $AM = MA \iff P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \iff M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}$.

Donc, l'espace des matrices commutant avec A est $C(A) = \left\{P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1} \text{ avec } (a,d) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

donc $\dim C(A) = 2$.

Pour le justifier, on peut vérifier que : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & C(A) \\ (a,b) & \longmapsto & P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1} \end{array}$ est un isomorphisme.

De plus, ($I_2 \in C(A)$ et $A \in C(A)$) donc $\text{Vect}(I_2, A) \subset C(A)$.
De plus, $\dim C(A) = \dim \text{Vect}(I_2, A) = 2$.

On en déduit que $C(A) = \text{Vect}(I_2, A)$.

Une correction de l'exercice 22.6

énoncé

1. Déterminons le polynôme caractéristique χ_A de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{3} C_i}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ \lambda-1 & \lambda-3 & 1 \\ \lambda-1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)^3 \end{aligned}$$

   Donc $\chi_A = (X-1)^3$.
   Donc A admet 1 comme unique valeur propre.

2. Puisque 0 n'est pas valeur propre de A, A est inversible.
   Si A était diagonalisable elle serait semblable à la matrice identité et donc égale à la matrice identité. Puisque ce n'est pas le cas, A n'est pas diagonalisable.

3. Notons π_A le polynôme minimal de A.
   π_A divise χ_A et π_A est un polynôme annulateur de A.

$A - I_3 \neq 0$ et $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\pi_A = (X-1)^2$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$, $\exists\,!(Q,R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_1[X]$, $X^n = (X-1)^2Q + R$ (1)

Or, $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $R = aX + b$ donc $X^n = (X-1)^2Q + aX + b$.

Puisque 1 est racine double de $(X-1)^2$ on obtient : $1 = a + b$ et, après dérivation, $n = a$.

Donc $R = nX + 1 - n$.(2)

$\pi_A = (X-1)^2$ étant un polynôme annulateur de A on a d'après (1) et (2) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = nA + (1-n)I_3$$

Une correction de l'exercice 22.7 *énoncé*

1. f est clairement linéaire. (*) De plus, $\forall\, P \in E\setminus\{0\}$, $\deg P' < \deg P$ donc $\deg(P - P') = \deg P$.

Et, si $P = 0$, alors $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = \deg P = -\infty$.

On en déduit que $\forall\, P \in E$, $\deg f(P) = \deg P$.

Donc $f(E) \subset E$. (**)

D'après (*) et (**), f est bien un endomorphisme de E.

(a) Déterminons $\mathrm{Ker} f$.

Soit $P \in \mathrm{Ker} f$.

$f(P) = 0$ donc $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = -\infty$.

Or, d'après ce qui précéde, $\deg(P - P') = \deg P$ donc $\deg P = -\infty$.

Donc $P = 0$.

On en déduit que $\mathrm{Ker} f = \{0\}$.

Donc f est injectif.

Or, $f \in \mathscr{L}(E)$ et E est de dimension finie ($\dim E = n+1$) donc f est bijectif.

(b) Soit $e = (1, X, ..., X^n)$ la base canonique de E. Soit A la matrice de f dans la base e.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

$\det A = 1$ d'où $\det A \neq 0$.

CC BY NC

Donc f est bijectif.

2. Soit $Q \in E$.
D'après 1. : $\exists\, !P \in E$, tel que $f(P) = Q$.
$P - P' = Q$, $P' - P'' = Q'$,..., $P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$.
Or $P^{(n+1)} = 0$, donc, en sommant ces $n+1$ égalités, $P = Q + Q' + \cdots + Q^{(n)}$.

3. Reprenons les notations de 1.(b).
Tout revient à se demander si A est diagonalisable.
Notons χ_A le polynôme caractéristique de A.
D'après 1.(b), on a $\chi_A = (X-1)^{n+1}$.
Donc 1 est l'unique valeur propre de A.
Ainsi, si A était diagonalisable, alors A serait semblable à la matrice unité I_{n+1}.
On aurait donc $A = I_{n+1}$.
Ce qui est manifestement faux car $f \neq \mathrm{Id}$.
Donc A n'est pas diagonalisable et par conséquent, f n'est pas diagonalisable.

Une correction de l'exercice 22.8 *énoncé*

1. $f^2 - f - 2\,\mathrm{id}_E = 0 \iff \dfrac{1}{2}\left(f^2 - f\right) = \mathrm{id}_E$

$\iff \left(\dfrac{1}{2}(f - \mathrm{id}_E)\right) \circ f = \mathrm{id}_E$ *(par règles de calcul sur la composition)*

$\iff f \circ \left(\dfrac{1}{2}(f - \mathrm{id}_E)\right) = \mathrm{id}_E$ *(par linéarité de f)*

donc f est bijectif d'inverse $f^{-1} = \frac{1}{2}(f - \mathrm{id}_E)$.

> *Si E est de dimension finie, il suffit que $f \circ g = \mathrm{id}_E$ pour que f soit bijectif d'inverse g.*
> *Mais sans renseignement sur la dimension de E, il est nécessaire d'avoir $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_E$ pour conclure la même chose.*

2. ➟ **Analyse (unicité) :** supposons qu'il existe $a \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$, et $b \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E)$ tels que $x = a + b$.
Alors par linéarité de f, $f(x) = f(a) + f(b) = -a + 2b$.
Des deux égalités ci-dessus, on déduit que $a = \dfrac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \dfrac{x + f(x)}{3}$, d'où l'unicité de la décomposition $x = a + b$ avec existe $a \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$, et $b \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E)$.

Synthèse (existence) : réciproquement, prenons les vecteurs $a = \dfrac{2x - f(x)}{3}$ et

$b = \dfrac{x + f(x)}{3}$.

D'une part, on a bien l'égalité $x = a + b$.

Mais d'autre part,

$$\begin{aligned}(f + \mathrm{Id})(a) &= \frac{1}{3}\left(2f(x) - f^2(x) + 2x - f(x)\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(-f^2(x) + f(x) + 2x\right) = 0 \ \textit{(car } f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0\textit{)},\end{aligned}$$

donc $a \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

On montre de même que $b \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$, ce qui achève le raisonnement.

➡ On a montré l'existence et l'unicité de la décomposition que vous savez, donc on peut conclure que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_\mathrm{E}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_\mathrm{E})$.

Il se peut que des élèves ne remarquent pas que la partie analyse donne l'unicité de la décomposition, qui équivaut au fait que ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. Ces élèves seront alors amené(e)s à le faire ainsi :
prenons $x \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ et montrons que $x = 0_\mathrm{E}$.
Comme $x \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$, alors $f(x) = -x$ et $f(x) = 2x$; donc $-x = 2x$, d'où $x = 0_\mathrm{E}$, C.Q.F.D.

3. L'égalité $f^2 - f - 2\,\mathrm{id}_\mathrm{E} = 0$ revient à dire que $\mathrm{P}(f) = 0$ avec $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2$, donc que $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2$ est un polynôme annulateur de f.

Or $\mathrm{P} = (\mathrm{X} + 1)(\mathrm{X} - 2)$, donc par propriété des polynômes d'endomorphismes (et de matrices),

$$\mathrm{P}(f) = 0 \Longleftrightarrow (f + \mathrm{id}_\mathrm{E}) \circ (f - 2\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) = (f - 2\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) \circ (f + \mathrm{id}_\mathrm{E}) = 0,$$

dont on déduit directement que $\mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) \subset \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_\mathrm{E})$ ainsi que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{id}_\mathrm{E}) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_\mathrm{E})$.

Si on avait répondu à cette question avant la question précédente, on aurait pu affirmer directement que

$$a = \frac{2x - f(x)}{3} = -\frac{1}{3}(f(x) - 2x) = (f - 2\,\mathrm{id}_\mathrm{E})\left(-\frac{1}{3}x\right) \in \mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{id}_\mathrm{E})$$

donc d'après les inclusions précédentes, que $a \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_\mathrm{E})$.
Et de même, $b = (f + \mathrm{id}_\mathrm{E})\left(\frac{1}{3}x\right) \in \mathrm{Im}(f + \mathrm{id}_\mathrm{E}) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_\mathrm{E})$.

Mais comme on suppose de plus que E est en dimension finie,

➡ on a d'une part grâce au théorème du rang

$$\dim(\mathrm{Im}(f + \mathrm{id}_\mathrm{E})) = \dim(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_\mathrm{E})),$$

➟ et d'autre part, on déduit de l'égalité $E = \text{Ker}(f + \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 2\,\text{id}_E)$ que

$$\dim(\text{Ker}(f - 2\,\text{id}_E)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f + \text{id}_E)),$$

d'où l'égalité des dimensions de $\text{Im}(f + \text{id}_E)$ et $\dim(\text{Ker}(f - 2\,\text{id}_E))$.

Ainsi l'un de ces deux sous-espaces vectoriels est inclus dans l'autre, et ils sont de même dimension, donc ils sont égaux, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 22.9

énoncé

1. Par linéarité de l'évaluation $P \mapsto P(a)$ (où a est un scalaire fixé), Φ est linéaire.

   Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$.
   Alors $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0$, donc P admet trois racines distinctes.
   Or P est de degré inférieur ou égal à 2 ; donc P est nul.
   Ainsi, $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$ i.e. Φ est injective.

   Enfin, $\dim(\mathbb{K}_2[X]) = \dim(\mathbb{K}^3) = 3$ donc Φ est bijective.

   Par conséquent, Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{K}_2[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.

2. (a) Φ est un isomorphisme donc l'image réciproque d'une base est une base.
   Ainsi, (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

   (b) $L_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et vérifie $\Phi(L_1) = (1,0,0)$ i.e. $(L_1(a_1), L_1(a_2), L_1(a_3)) = (1,0,0)$.
   Donc, comme a_2 et a_3 sont distincts, $(X - a_2)(X - a_3) | L_1$.
   Or $\deg L_1 \leqslant 2$, donc $\exists k \in \mathbb{K}$ tel que $L_1 = k(X - a_2)(X - a_3)$.
   La valeur $L_1(a_1) = 1$ donne $k = \dfrac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$.
   Donc $L_1 = \dfrac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$.
   Un raisonnement analogue donne $L_2 = \dfrac{(X - a_1)(X - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}$ et $L_3 = \dfrac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$.

3. (L_1, L_2, L_3) base de $\mathbb{K}_2[X]$ donc $\exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$.
   Par construction, $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, L_i(a_j) = \delta_{ij}$ donc $P(a_j) = \lambda_j$.
   Ainsi, $P = P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3$.

4. On pose $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$. Ces trois réels sont bien distincts.
   On cherche $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $(P(a_1), P(a_2), P(a_3)) = (1,3,1)$.
   Par bijectivité de Φ et d'après 3. , l'unique solution est le polynôme $P = 1.L_1 + 3.L_2 + 1.L_3$.

On a $L_1 = \dfrac{(X-1)(X-2)}{2}$, $L_2 = \dfrac{X(X-2)}{-1}$ et $L_3 = \dfrac{X(X-1)}{2}$.
Donc $P = -2X^2 + 4X + 1$.

Une correction de l'exercice 22.10

énoncé

1. Soit $\lambda \neq 0$.
   Si λ valeur propre de $u \circ v$ alors $\exists\, x \in E \setminus \{0\} \,/\, (u \circ v)(x) = \lambda x$. $(*)$
   Pour un tel x non nul, on a alors $v(u \circ v(x)) = \lambda v(x)$ c'est-à-dire $(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x)$ $(**)$.
   Si $v(x) = 0$ alors, d'après $(*)$, $\lambda x = 0$. Ce qui est impossible car $x \neq 0$ et $\lambda \neq 0$.
   Donc $v(x) \neq 0$.
   Donc, d'après $(**)$, $v(x)$ est un vecteur propre de $v \circ u$ associé à la valeur propre λ.
2. On trouve que $v \circ u = \mathrm{Id}$ et $u \circ v : P \longmapsto P(X) - P(1)$.
   Ainsi $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(u \circ v) = \mathbb{R}_0[X]$.
   On observe que 0 est valeur propre de $u \circ v$ mais n'est pas valeur propre de $v \circ u$.
   On constate donc que le résultat de la question 1. est faux pour $\lambda = 0$.
3. Si E est de dimension finie, comme $\det(u \circ v) = \det u$
   $det()v = \det(v \circ u)$ alors :
   0 est valeur propre de $u \circ v \iff \det(u \circ v) = 0 \iff \det(v \circ u) = 0 \iff 0$ est valeur propre de $v \circ u$.

   Remarque 1 : le résultat de la question 1. est vrai pour $\lambda = 0$ si et seulement si E est de dimension finie.
   Remarque 2 : Si E est de dimension finie, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Une correction de l'exercice 22.11

énoncé

1. Supposons $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.
   Indépendamment de l'hypothèse, on peut affirmer que $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ (*)

   Montrons que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$.
   Soit $y \in \mathrm{Im} f$.
   Alors, $\exists\, x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Or $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$, donc $\exists\, (a, b) \in E \times \mathrm{Ker} f$ tel que $x = f(a) + b$.
   On a alors $y = f^2(a) \in \mathrm{Im} f^2$.
   Ainsi $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$ (**)

   D'après (*) et (**), $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) On a $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$.

CC BY NC

On en déduit que $\text{Im}f^2 = \text{Im}f \iff \text{rg}f^2 = \text{rg}f$ et $\text{Ker}\, f = \text{Ker}\, f^2 \iff \dim \text{Ker}\, f = \dim \text{Ker}\, f^2$.

Alors, en utilisant le théorème du rang, $\text{Im}f = \text{Im}f^2 \iff \text{rg}f = \text{rg}f^2 \iff \dim \text{Ker}\, f = \dim \text{Ker}\, f^2 \iff \text{Ker}\, f = \text{Ker}\, f^2$.

(b) Supposons $\text{Im}f = \text{Im}f^2$.

Soit $x \in \text{Im}f \cap \text{Ker}\, f$.

$\exists\, a \in \text{E}$ tel que $x = f(a)$ et $f(x) = 0_\text{E}$.

On en déduit que $f^2(a) = 0_\text{E}$ c'est-à-dire $a \in \text{Ker}\, f^2$.

Or, d'après l'hypothèse et 2.(a), $\text{Ker}\, f^2 = \text{Ker}\, f$ donc $a \in \text{Ker}\, f$ c'est-à-dire $f(a) = 0_\text{E}$.

C'est-à-dire $x = 0$.

Ainsi $\text{Im}f \cap \text{Ker}\, f = \{0_\text{E}\}$. (***)

De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \text{Im}\, f + \dim \text{Ker}\, f = \dim \text{E}$. (****)

Donc, d'après (***) et (****), $\text{E} = \text{Im}f \oplus \text{Ker}\, f$.

Une correction de l'exercice 22.12

énoncé

1. Si $v = 0_\text{E}$ alors f est l'endomorphisme nul et donc $\text{rg}f = 0$.
   Si $v \neq 0$ alors $\text{rg}f = 1$ car, si on note $c_1, c_2, ..., c_n$ les colonnes de la matrice A de f dans la base e, alors $c_1 \neq 0$ et $c_1 = c_2 = ... = c_n$.
2. On note χ_f le polynôme caractéristique de f.

   Premier cas : $v = 0_\text{E}$
   alors f est l'endomorphisme nul et donc f est diagonalisable.

   Deuxième cas : $v \neq 0_\text{E}$.
   Alors $\text{rg}f = 1$ et donc $\dim \text{Ker}\, f = n - 1$.
   Donc 0 est valeur propre de f et, si on note m_0 l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 dans le polynôme caractéristique de f, alors $m_0 \geqslant n - 1$.
   On en déduit alors que : $\exists \lambda \in \mathbb{K} \,/\, \chi_f = \text{X}^{n-1}(\text{X} - \lambda)$.(*)
   Et donc, $\text{tr}(f) = \lambda$.
   e est une base de E donc : $\exists\,!\,(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n \,/\, v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$.
   En écrivant la matrice de f dans la base e, on obtient alors $\text{tr}(f) = x_1 + x_2 + ... + x_n$.
   Ainsi, $\lambda = x_1 + x_2 + ... + x_n$.(**)
   Ce qui amène à la discussion suivante :

   Premier sous- cas : si $x_1 + x_2 + ... + x_n \neq 0$
   D'après (*) et (**), $\lambda = x_1 + x_2 + ... + x_n$ est une valeur propre non nulle de f et $\dim \text{E}_\lambda = 1$.

Ainsi, $\dim E_0 + \dim E_\lambda = n$ et donc f est diagonalisable.

Deuxième sous- cas : si $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$
Alors, d'après (*) et (**), $\chi_f = X^n$.
Donc 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité n dans le polynôme caractéristique.
Or $\dim E_0 = n - 1$.
Donc f n'est pas diagonalisable.

Remarque dans le cas où $v \neq 0$
Comme $v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$, alors, par linéarité de f, $f(v) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n)$.
C'est-à-dire, $f(v) = (x_1 + x_2 + ... + x_n)v$. (***)
On en déduit que : $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0 \iff f(v) = 0$.
De plus, dans le cas où $x_1 + x_2 + ...x_n \neq 0$, alors, d'après (***), v est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = x_1 + x_2 + ... + x_n$ et d'après ce qui précéde, $E_f(\lambda) = \text{Vect}(v)$.

Une correction de l'exercice 22.13

énoncé

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
   On suppose que P annule u.
   Soit λ une valeur propre de u.
   Prouvons que $P(\lambda) = 0$.
   λ valeur propre de u donc : $\exists\, x \in E \setminus \{0\} \ / \ u(x) = \lambda x$.
   On prouve alors par récurrence que : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ u^k(x) = \lambda^k x$.
   Ainsi : $P(u)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k x = P(\lambda)\, x$.
   Or $P(u) = 0$ donc $P(u)(x) = 0$ donc $P(\lambda)x = 0$.
   Or $x \neq 0$ donc $P(\lambda) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

   (a) Posons $P = X^2 - 2X + 1$.
   Prouvons que P est annulateur de u c'est-à-dire que $P(u) = 0$.
   Soit $M \in E$.
   $u^2(M) = u \circ u(M) = (M + \text{tr}(M)A) + \text{tr}\,(M + \text{tr}(M)A)\,A$.

C'est-à-dire, par linéarité de la trace, $u^2(M) = M + \mathrm{tr}(M)A + \mathrm{tr}(M)A + \mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(A)A$.
Or $\mathrm{tr}(A) = 0$ donc $u^2(M) = M + 2\mathrm{tr}(M)A$.
Ainsi $u^2(M) - 2u(M) + \mathrm{Id}(M) = M + 2\mathrm{tr}(M)A - 2M - 2\mathrm{tr}(M)A + M = 0$.

On a donc prouvé que $u^2 - 2u + \mathrm{Id} = 0$.
C'est-à-dire P est annulateur de u.

(b) Notons I_n la matrice unité de E.

Première méthode :

Notons $\mathrm{Spec}(u)$ le spectre de u.
$P = (X-1)^2$ et P est annulateur de u.
Donc d'après 1., $\mathrm{Spec}(u) \subset \{1\}$.
De plus $A \neq 0$ et $u(A) = A$ donc $\mathrm{Spec}(u) = \{1\}$.
Ainsi, si u était diagonalisable alors on aurait $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
C'est-à-dire, on aurait $u = \mathrm{Id}$.
Or $u(I_n) \neq I_n$ (puisque $\mathrm{tr}(I_n) \neq 0$) donc $u \neq \mathrm{Id}$.
On obtient donc une contradiction.
On en déduit que u n'est pas diagonalisable.

Deuxième méthode :

Notons π_u le polynôme minimal de u.
$P = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de u donc $\pi_u | P$.
Si u était diagonalisable alors π_u serait scindé à racines simples.
On aurait donc $\pi_u = X - 1$.
Ce qui impliquerait que $u = \mathrm{Id}$ car P_m est également un polynôme annulateur de u.
Or $u(I_n) \neq I_n$ (puisque $\mathrm{tr}(I_n) \neq 0$) donc $u \neq \mathrm{Id}$.
On obtient donc une contradiction.
On en déduit que u n'est pas diagonalisable.

Une correction de l'exercice 22.14

énoncé

1. (a) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

   (b) On obtient $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \lambda^2(\lambda - 3)$.

   $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_0(A) : x - y + z = 0$.

   Donc A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.

(c) $\text{rg}A = 1$ donc $\dim E_0(A) = 2$.

On en déduit que 0 est valeur propre au moins double de la matrice A.

Puisque $\text{tr}A = 3$ et que $\text{tr}A$ est la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leur multiplicité, la matrice A admet une troisième valeur propre qui vaut 3 et qui est nécessairement simple.

Comme dans la question précédente, on peut conclure que A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.

(d) On obtient $A^2 = 3A$ donc A est diagonalisable car cette matrice annule le polynôme $X^2 - 3X$ qui est scindé à racines simples.

2. On note $e = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note $(\,|\,)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

A est symétrique réelle et e est une base orthonormée, donc f est un endomorphisme symétrique et, d'après le théorème spectral, f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

On sait également que les sous-espaces propres sont orthogonaux donc il suffit de trouver une base orthonormée de chaque sous-espace propre pour construire une base orthonormée de vecteurs propres.

$E_3(f) = \text{Vect}((1,-1,1)$ et $E_0(f) : x - y + z = 0$.

Donc $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ est une base orthonormée de $E_3(f)$.

$\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ sont deux vecteurs orthogonaux de $E_0(f)$.

On les normalise et on pose $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{w} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}\right)$.

Alors $(\vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée de $E_0(f)$.

On en déduit que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée de vecteurs propres de f.

Une correction de l'exercice 22.15 *énoncé*

1. $D = \text{Vect}((1,2,3))$.

$(1,2,3) \notin P$ car les coordonnées du vecteur $(1,2,3)$ ne vérifient pas l'équation de P.

Donc $D \cap P = \{0\}$. (*)

De plus, $\dim D + \dim P = 1 + 2 = \dim \mathbb{R}^3$. (**)

D'après (*) et (**), $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Par définition d'une projection, $p(u) \in P$ et $u - p(u) \in D$.

$u - p(u) \in D$ signifie que $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u - p(u) = \alpha(1,2,3)$.

On en déduit que $p(u) = (x - \alpha, y - 2\alpha, z - 3\alpha)$.(***)

CC BY NC

Or $p(u) \in \mathrm{P}$ donc $(x-\alpha)+(y-2\alpha)+(z-3\alpha)=0$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{1}{6}(x+y+z)$.

Et donc, d'après (***), $p(u) = \frac{1}{6}(5x-y-z, -2x+4y-2z, -3x-3y+3z)$.

Soit $e=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit A la matrice de p dans la base e. On a $\mathrm{A} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

3. On pose $e'_1=(1,2,3)$, $e'_2=(1,-1,0)$ et $e'_3=(0,1,-1)$.
e'_1 est une base de D et (e'_2,e'_3) est une base de P.
Or $\mathbb{R}^3 = \mathrm{P} \oplus \mathrm{D}$ donc $e'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

De plus $e'_1 \in \mathrm{D}$ donc $p(e'_1)=0$. $e'_2 \in \mathrm{P}$ et $e'_3 \in \mathrm{P}$ donc $p(e'_2)=e'_2$ et $p(e'_3)=e'_3$.

Ainsi, $\mathrm{M}(p,e') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Une correction de l'exercice 22.16

énoncé

1. (a) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.

On pose $\forall\, x \in \mathrm{E}$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2$, $|(x|y)| \leqslant ||x||\,||y||$

Preuve :

Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(\lambda) = ||x+\lambda y||^2$.

On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(\lambda) \geqslant 0$.

De plus, $\mathrm{P}(\lambda) = (x+\lambda y|x+\lambda y)$.

Donc, par bilinéarité et symétrie de $(\,|\,)$, $\mathrm{P}(\lambda) = ||y||^2\lambda^2 + 2\lambda(x|y) + ||x||^2$.

On remarque que $\mathrm{P}(\lambda)$ est un trinôme en λ si et seulement si $||y||^2 \neq 0$.

Premier cas : si $y=0$

Alors $|(x|y)| = 0$ et $||x||\,||y|| = 0$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.

Deuxième cas : $y \neq 0$

Alors $||y|| = \sqrt{(y|y)} \neq 0$ car $y \neq 0$ et $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Donc, P est un trinôme du second degré en λ qui est positif ou nul.

On en déduit que le discriminant réduit Δ est négatif ou nul.

Or $\Delta = (x|y)^2 - ||x||^2||y||^2$ donc $(x|y)^2 \leqslant ||x||^2||y||^2$.

Et donc, $|(x|y)| \leqslant ||x||\,||y||$.

(b) On reprend les notations de 1. .
Prouvons que $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2$, $|(x|y)| = ||x||\,||y|| \iff x$ et y sont colinéaires.

Supposons que $|(x|y)| = ||x||\,||y||$.
Premier cas : si $y = 0$
Alors x et y sont colinéaires.
Deuxième cas : si $y \neq 0$
Alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0.
C'est-à-dire $\mathrm{P}(\lambda_0) = 0$ et comme $(\,|\,)$ est définie positive, alors $x + \lambda_0 y = 0$.
Donc x et y sont colinéaires.

Supposons que x et y soient colinéaires.
Alors $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.
Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (raisonnement similaire pour l'autre cas).
$|(x|y)| = |\alpha|.|(y|y)| = |\alpha|\,||y||^2$ et $||x||\,||y|| = \sqrt{(x|x)}\,||y|| = \sqrt{\alpha^2 (y|y)}\,||y|| = |\alpha|.||y||^2$.
Donc, on a bien l'égalité.

2. On considère le produit scalaire classique sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ défini par :
$\forall (f,g) \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$.
On pose $\mathrm{A} = \left\{ \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \,,\, f \in \mathrm{E} \right\}$.
$\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$.
$\mathrm{A} \neq \varnothing$ car $(b-a)^2 \in \mathrm{A}$ (valeur obtenue pour la fonction $t \longmapsto 1$ de E).
De plus, $\forall\, f \in \mathrm{E}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc A est minorée par 0.
On en déduit que A admet une borne inférieure et on pose $m = \inf(\mathrm{A})$.
Soit $f \in \mathrm{E}$.
On considère la quantité $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t \right)^2$.
D'une part, $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t \right)^2 = \left(\displaystyle\int_a^b 1\mathrm{d}t \right)^2 = (b-a)^2$.
D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(\,|\,)$ on obtient :

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t.$$

On en déduit que $\forall f \in \mathrm{E}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant (b-a)^2$.

Donc $m \geqslant (b-a)^2$.

Et, si on considère la fonction $f : t \longmapsto 1$ de E, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = (b-a)^2$.

Donc $m = (b-a)^2$.

Une correction de l'exercice 22.17

énoncé

On introduit, sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la norme euclidienne, notée $||\ ||$, associée au produit scalaire canonique, définie par : $\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $||\mathrm{X}|| = \sqrt{\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}}$.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Prouvons que $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{sp}(\mathrm{A}) \subset [0, +\infty[$.
   Raisonnons par double implication.

   Supposons que $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   Prouvons que $\mathrm{sp}(\mathrm{A}) \subset [0, +\infty[$.
   Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(\mathrm{A})$.
   $\exists \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ / $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$.
   Alors $\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\lambda\mathrm{X} = \lambda||\mathrm{X}||^2$.
   Or, $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX} \geqslant 0$.
   Donc $\lambda||\mathrm{X}||^2 \geqslant 0$.
   Or, $\mathrm{X} \neq 0$ donc $||\mathrm{X}||^2 > 0$.
   Donc $\lambda \geqslant 0$.

   Supposons que $\mathrm{sp}(\mathrm{A}) \subset [0, +\infty[$.
   Prouvons que $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ donc, d'après le théorème spectral, $\exists \mathrm{P} \in \mathrm{O}(n)$ / $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{\mathrm{T}}$ où $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.
   Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   $\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{PDP}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = (\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{D}(\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{X})$.
   Notons $y_1, y_2, ..., y_n$ les composantes de la matrice colonne $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}$.

   Ainsi $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX} = \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{DY} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$. (1)

Or, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A donc, par hypothèse, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.
Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i y_i^2 \geqslant 0$.
Donc, d'après (1), $X^T AX \geqslant 0$.

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Prouvons que $A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$(A^2)^T = A^T A^T$.
Or, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc $A^T = A$. Donc $(A^2)^T = A^2$. Donc $A^2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$X^T A^2 X = X^T A^T AX = (AX)^T (AX) = ||AX||^2 \geqslant 0$.
Donc $A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

3. soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et soit $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
On suppose que $AB = BA$.
Prouvons que $A^2B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Remarque : par hypothèse, A et B commutent donc A^2 et B commutent.
En effet : $A^2B = A(AB) = A(BA) = (AB)A = (BA)A = BA^2$.
$(A^2B)^T = B^T (A^2)^T = B^T (A^T)^2$.
Or, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $A^T = A$ et $B^T = B$.
Donc $(A^2B)^T = BA^2$.
Or, d'après la remarque, A^2 et B commutent.
Donc $(A^2B)^T = A^2B$.
Donc $A^2B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
A et B commutent donc $X^T (A^2B) X = X^T ABAX$.
Or, A est symétrique donc $X^T ABAX = (AX)^T B(AX)$.
On pose $Y = AX$.
$Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $(AX)^T B(AX) = Y^T BY \geqslant 0$.
Donc $X^T A^2 BX \geqslant 0$.
Donc $A^2B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

4. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc, d'après le théorème spectral et 1. :
$\exists P \in O(n) \ / \ A = PDP^T$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.
On pose $\Delta = \text{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$.
Alors $A = P\Delta^2 P^T = P\Delta P^T P\Delta P^T$ car $P^T = P^{-1}$.
C'est-à-dire, $A = (P\Delta P^T)^2$.

On pose alors $B = P\Delta P^T$.
On a $A = B^2$.
De plus, $B^T = \left(P^T\right)^T \Delta^T P^T = P\Delta P^T = B$ donc $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
De plus, B est semblable à Δ donc $\text{sp}(B) = \left\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}\right\}$ et donc $\text{sp}(B) \subset [0, +\infty[$.
Donc $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Une correction de l'exercice 22.18

énoncé

1. On a $A \subset \left(A^\perp\right)^\perp$. (*)
   En effet, $\forall x \in A, \forall y \in A^\perp, (x \mid y) = 0$.
   C'est-à-dire, $\forall\, x \in A,\ x \in (A^\perp)^\perp$.

   Comme E est un espace euclidien, $E = A \oplus A^\perp$ donc $\dim A = n - \dim A^\perp$.
   De même, $E = A^\perp \oplus \left(A^\perp\right)^\perp$ donc $\dim \left(A^\perp\right)^\perp = n - \dim A^\perp$.
   Donc $\dim \left(A^\perp\right)^\perp = \dim A$. (**)

   D'après (*) et (**), $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.
2. (a) Procédons par double inclusion.

   Prouvons que $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.
   Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$.
   Soit $y \in F + G$.
   Alors $\exists\, (f, g) \in F \times G$ tel que $y = f + g$.
   $(x \mid y) = \underbrace{(x \mid f)}_{\substack{=0 \\ \text{car } f \in F \text{ et } x \in F^\perp}} + \underbrace{(x \mid g)}_{\substack{=0 \\ \text{car } g \in G \text{ et } x \in G^\perp}} = 0.$
   Donc $\forall\, y \in (F+G),\ (x \mid y) = 0$.
   Donc $x \in (F+G)^\perp$.

   Prouvons que $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
   Soit $x \in (F+G)^\perp$.
   $\forall\, y \in F$, on a $(x \mid y) = 0$ car $y \in F \subset F + G$.
   Donc $x \in F^\perp$.
   De même, $\forall\, z \in G$, on a $(x \mid z) = 0$ car $z \in G \subset F + G$.
   Donc $x \in G^\perp$.
   On en déduit que $x \in F^\perp \cap G^\perp$.

   Finalement, par double inclusion, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

(b) D'après 2.(a), appliquée à $F^\perp$ et à $G^\perp$, on a $\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp = \left(F^\perp\right)^\perp \cap \left(G^\perp\right)^\perp$.

Donc, d'après 1., $\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp = F \cap G$.

Donc $\left(\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp\right)^\perp = (F \cap G)^\perp$.

C'est-à-dire, en utilisant 1. à nouveau, $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Une correction de l'exercice 22.19

énoncé

1. On pose $\forall (f,g) \in E^2$, $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

   Par linéarité de l'intégrale, $(\,|\,)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\,|\,)$ est symétrique.
   On en déduit que $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique.(*)

   Soit $f \in E$. $(f|f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t$.

   Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive sur $[0,2\pi]$ et $0 < 2\pi$, donc $(f|f) \geqslant 0$.
   Donc $(\,|\,)$ est positive.(**)

   Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.

   Alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = 0$.

   Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive et continue sur $[0,2\pi]$.
   Donc, f est nulle sur $[0,2\pi]$.
   Or f est 2π-périodique donc $f = 0$.
   Donc $(\,|\,)$ est définie.(***)

   D'après (*), (**) et (***), $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur E.

2. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$.

   $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x) \in F$.

   De plus, si on note h l'application $x \mapsto \dfrac{1}{2}$,

   $(h|f) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 0$ et $(h|g) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2x)\mathrm{d}x = 0$ donc $h \in F^\perp$ (car $F = \mathrm{Vect}(f,g)$).

   On en déduit que le projeté orthogonal de u sur F est $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x)$.

CC BY NC

Une correction de l'exercice 22.20

énoncé

1. On remarque que $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|A\| \geqslant 0$.
   i- Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| = 0$.
   Comme $\forall\,(i,j) \in \left(\llbracket 1,n\rrbracket\right)^2$, $|a_{i,j}| \geqslant 0$, on en déduit que $\forall\,(i,j) \in \left(\llbracket 1,n\rrbracket\right)^2$, $|a_{i,j}| = 0$, c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$.
   Donc $A = 0$.
   ii- Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
   $\|\lambda A\| = \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \left|\lambda a_{i,j}\right| = \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |\lambda| \left|a_{i,j}\right| = |\lambda| \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \left|a_{i,j}\right| = |\lambda|\,\|A\|$.
   iii- Soit $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)^2$ avec $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ et $B = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$.
   On a $\|A+B\| = \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \left|a_{i,j} + b_{i,j}\right|$.
   Or, $\forall\,(i,j) \in \left(\llbracket 1,n\rrbracket\right)^2$, $|a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leqslant \|A\| + \|B\|$.
   On en déduit que $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.
2. Soit $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)^2$ avec $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$, $B = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$.
   Posons $C = AB$.
   On a $C = \left(c_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ avec $\forall\,(i,j) \in \left(\llbracket 1,n\rrbracket\right)^2$, $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$.
   Donc, $\forall\,(i,j) \in \left(\llbracket 1,n\rrbracket\right)^2$, $\left|c_{i,j}\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,k}|.|b_{k,j}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \|A\|\,\|B\| = n\,\|A\|\,\|B\|$.
   On en déduit que $\forall\,(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)^2$, $\|AB\| \leqslant n\,\|A\|\,\|B\|$.(*)
   Pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, notons (P_p) la propriété : $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\,\|A\|^p$.
   Prouvons que (P_p) est vraie par récurrence.
   Pour $p = 1$, $\left\|A^1\right\| = n^0\,\|A\|^1$, donc (P_1) est vraie.
   Supposons la propriété (P_p) vraie pour un rang $p \geqslant 1$, c'est-à-dire $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\,\|A\|^p$.
   Prouvons que (P_{p+1}) est vraie.
   $\left\|A^{p+1}\right\| = \|A \times A^p\|$ donc, d'après (*), $\left\|A^{p+1}\right\| \leqslant n\,\|A\|\,\|A^p\|$.
   Alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $\left\|A^{p+1}\right\| \leqslant n\,\|A\|\,n^{p-1}\,\|A\|^p = n^p\,\|A\|^{p+1}$.
   On en déduit que (P_{p+1}) est vraie.
3. On a $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $\left\|\dfrac{A^p}{p!}\right\| \leqslant \dfrac{1}{n}\dfrac{(n\,\|A\|)^p}{p!}$.
   Or, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle $\sum \dfrac{x^p}{p!}$ converge, donc $\sum \dfrac{(n\|A\|)^p}{p!}$ converge.

Donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.

Or $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, donc $\sum \frac{A^p}{p!}$ converge.

cc BY NC