Arrêtons de confondre « loi de Bernoulli » et « loi binomiale » !

- *Dans l'immense majorité des cas, pour déterminer la probabilité d'un événement* B,
  - *soit*
    - *on commence par analyser, décomposer l'événement* B *(par exemple dans le cas d'une succession d'expériences, on peut écrire* B *comme intersection et/ou réunions d'événements du type* P_i*) ;*
    - *puis on en déduit* $\mathbb{P}(B)$ *en appliquant les propriétés de la probabilité (σ-additivité, probabilité d'une intersection, continuité croissante ou décroissante, etc).*
  - *soit on utilise la formule des probabilités totales !*

- *La formule des probabilités totales est peut-être la formule la plus importante du cours de probabilités, il est essentiel de bien la comprendre et de la savoir par cœur !*
- *En particulier, dans les exercices qui mettent en jeu plusieurs variables aléatoires, la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par l'une des variables est très souvent utile.*
  Par exemple, dans

$$\mathbb{P}(\square) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}_{X=x}(\square)$$

  on peut remplacer $\square$ *par n'importe quel événement, par exemple par l'événement* $(Y = y)$ *si on cherche la loi de* Y.
- *La dernière question de cours est à savoir par cœur les yeux fermés à cloche-pied avec une main attachée dans le dos.*

Questions de cours 1

1. Donner la formule des probabilités totales.
   (proposition 6.6)
2. Comment déterminer la probabilité d'une réunion finie d'événements ?
   (en faisant la somme de leurs probabilités s'ils sont deux à deux incompatibles, et sinon avec la formule du crible mais elle n'est pas au programme)
3. Comment déterminer la probabilité d'une intersection finie d'événements ?
   (avec la formule des probabilités composées : proposition 6.5)
4. Définir l'espérance et la variance d'une variable X, la covariance d'un couple (X, Y).
   (définitions 6.19, 6.24, et proposition 6.21)
5. Donner le théorème de transfert.
   (proposition 6.17)
6. Si on connaît la loi de X, ainsi que la loi du couple (X, Y), comment détermine-t-on la loi de Y ?
   (avec la proposition 6.11, qui utilise la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par X)

Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et A, B deux événements.
Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) \times \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) \times \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right).$$

Exercice 2

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise *(elle peut ainsi redevenir correcte, ce qui ne tient pas debout, mais on est dans le monde mathématique...)*.
On note p_n la probabilité que l'information soit correcte après n transmissions.

1. Donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la valeur de p_n en fonction de p et n.
3. Donner la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$. Quel commentaire peut-on faire de ce résultat ?

Exercice 3

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire les boules de l'urne deux par deux. Quelle est la probabilité d'avoir à chaque tirage une boule blanche et une boule noire ?

Exercice 4

On tire cinq cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir dans la main au moins une carte de chaque couleur ?

Exercice 5

Une urne U_1 contient 4 boules noires et 2 boules blanches, tandis qu'une urne U_2 contient 2 boules noires et 4 boules blanches. On choisit une urne au hasard et on tire alors 3 boules, avec remise.

1. Quelle est la probabilité que les trois boules soient noires ?

2. Sachant que les deux premières boules sont noires, quelle est la probabilité que la troisième le soit aussi ?

3. Les tirages successifs sont-ils indépendants ?

4. Calculer pour tout entier strictement positif la probabilité que le $k+1^{\text{e}}$ tirage donne une boule noire sachant que les k premiers tirages n'ont donné que des boules noires.
Que vaut la limite de ce résultat quand k tend vers $+\infty$? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 6

On dispose de trois pièces dont une est truquée avec *Face* de chaque côté, les deux autres étant équilibrées. On prend une pièce au hasard et on effectue des lancers successifs avec cette pièce.

1. Calculer de deux façons différentes la probabilité d'obtenir *Face* au premier lancer.

2. Calculer la probabilité de l'événement $F_n =$ « obtenir n fois *Face* lors des n premiers lancers », puis la probabilité de ne jamais obtenir *Pile*.

3. Calculer la probabilité que l'on ait pris la pièce truquée sachant que F_n est réalisé, puis la limite de cette probabilité lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 7

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{A}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système complet d'événements tel que $\mathbb{P}(\mathrm{A}_1) = \frac{1}{2^n}$ et $(\mathbb{P}(\mathrm{A}_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est le début d'une suite arithmétique.

1. Exprimer $\mathbb{P}(\mathrm{A}_i)$ pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$.
2. On considère un événement B tel que, pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $\mathbb{P}(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{A}_i) = \dfrac{1}{2^i}$.
   Exprimer $\mathbb{P}(\mathrm{B})$.

Exercice 8

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in\ ]0,1[$.
Déterminer les lois de chacune des variables $\min\{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{X}_n = 1\}$ et $\mathrm{X}_{\mathrm{N}+1} + \cdots + \mathrm{X}_{2\mathrm{N}}$.

Exercice 9

Une suite de variables indépendantes $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in\ ]0,1[$; on note $\mathrm{Y}_n = \mathrm{X}_n + \mathrm{X}_{n+1}$ et $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k$.
Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{S}_n)$, et $\mathrm{V}(\mathrm{S}_n)$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - 2p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

Exercice 10

Soient $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$, et $p, q \in\ ]0,1[$ avec $p + q = 1$.
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs respectivement dans $[\![0\ ;\ n]\!]$ et $[\![1\ ;\ n]\!]$, et telles que pour tout $(j,k) \in [\![0\ ;\ n]\!] \times [\![1\ ;\ n]\!]$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = j, \mathrm{Y} = k) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}, & \text{si } k = j \neq 0, \\ \dfrac{q^n}{n}, & \text{si } j = 0, \\ 0, & \text{si } k \neq j \text{ et } j \neq 0. \end{cases}$$

1. Donner les lois de X et Y, ainsi que l'espérance de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(\mathrm{X} = j)$.
4. Calculer la covariance de X et Y.
   Existe-t-il des valeurs de q telles que X et Y soient décorrélées ?

Exercice 11

On considère $p+1$ urnes $\mathrm{U}_0, \mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_p$ en supposant que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $p-k$ boules noires. L'expérience consiste à choisir aléatoirement une urne puis à effectuer un certain nombre de tirages avec remise dans cette urne.

1. Déterminer la probabilité de l'événement A_n défini par : « les n premiers tirages ont donné des boules blanches ».

2. Déterminer $\mathbb{P}\left(\mathrm{A}_{n+1} \mid \mathrm{A}_n\right)$, puis en calculer la limite quand n tend vers $+\infty$.

Solutions

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

> *Rappelons que si A et B sont indépendants par rapport à $\mathbb{P}$, alors $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$, ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.*

- Si A et B sont indépendants *(sous-entendu par rapport à $\mathbb{P}$)*, alors $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, et avec la remarque liminaire :
$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$$
$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\right)=\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}(B),$$
le résultat voulu est donc immédiat.
- Réciproquement, supposons que
$$\mathbb{P}(A\cap B)\times\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\right)\times\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\right).$$
Avec la formule des probabilités composées, on a
$$\mathbb{P}(A\cap B)\times\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}_A(B)\times\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\times\mathbb{P}_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$$
et
$$\mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\right)\times\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\right)=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right)\times\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\times\mathbb{P}_{\overline{A}}(B).$$
Donc l'égalité de départ revient à
$$\mathbb{P}_A(B)\times\mathbb{P}_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)=\mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right)\times\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$
autrement dit, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{\square}$ ayant droit aux propriétés des probabilités,
$$\mathbb{P}_A(B)\times\left(1-\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\right)=(1-\mathbb{P}_A(B))\times\mathbb{P}_{\overline{A}}(B),$$
d'où après développement et simplifications
$$\mathbb{P}_A(B)=\mathbb{P}_{\overline{A}}(B).$$
Ainsi, la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(A,\overline{A})$ nous donne
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B)&=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}_A(B)+\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\times\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}_A(B)+\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\times\mathbb{P}_A(B)\\&=\left(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\right)\times\mathbb{P}_A(B)=\mathbb{P}_A(B),\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}_A(B) && \textit{(avec la formule des probabilités composées)}\\ &= \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B) && \textit{(avec le résultat précédent),}\end{aligned}$$

dont on déduit l'indépendance de A et B.

Une correction de l'exercice 2 *énoncé*

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, notons A_n =« l'information est correcte après n transmissions », et appliquons la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements formé par A_n et $\overline{A_n}$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\times\mathbb{P}(A_{n+1}\mid A_n)+\mathbb{P}(\overline{A_n})\times\mathbb{P}(A_{n+1}\mid\overline{A_n})\\ \iff\ & p_{n+1} = p_n\times p+(1-p_n)\times(1-p) = (2p-1)p_n+(1-p).\end{aligned}$$

> *On est ici dans le cas typique d'une chaîne de Markov, dans laquelle les états à une certaine étape dépendent des états à l'étape précédente. Le raisonnement ci-dessus est un grand classique.*

2. On reconnaît une suite arithmético-géométrique, et comme on connaît parfaitement le protocole à suivre dans ce cas, on en déduit sans accroc que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$p_n = \frac{1}{2}\left(1+(2p-1)^n\right).$$

3. On suppose $0<p<1$, sinon l'expérience consiste en la transmission de la même information si $p=1$, ou bien une succession de « vrai-faux » dans le cas $p=0$. Donc $|2p-1|<1$, puis $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$. Au bout d'un grand nombre d'échanges, on a autant de chances de recevoir la bonne information que l'information contraire, ce qui peut surprendre si on s'attend à ce que ça dépende de p.

Une correction de l'exercice 3 *énoncé*

Pour $1\leqslant i\leqslant n$, notons S_i l'événement « le i-ième tirage donne une boule blanche et une boule noire », alors l'événement A dont on cherche la probabilité est

$$A = S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n \quad (n \text{ succès}).$$

La formule des probabilités composées donne :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(S_1)\times\mathbb{P}_{S_1}(S_2)\times\mathbb{P}_{S_1\cap S_2}(S_3)\times\cdots\times\mathbb{P}_{S_1\cap\cdots\cap S_{n-1}}(S_n). \tag{1}$$

Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{P}_{S_1\cap\cdots\cap S_{k-1}}(S_k)$ est la probabilité de tirer une boule blanche et une boule noire quand on pioche simultanément 2 boules dans une urne dans laquelle il reste $n-(k-1)=n-k+1$ boules blanches ainsi que $n-k+1$ boules noires, donc, en considérant les $\binom{2(n-k+1)}{2}$ tirages équiprobables :

$$\mathbb{P}_{S_1\cap\cdots\cap S_{k-1}}(S_k) = \frac{\binom{n-k+1}{1}\times\binom{n-k+1}{1}}{\binom{2(n-k+1)}{2}} = \frac{(n-k+1)^2}{\frac{(2n-2k+2)(2n-2k+1)}{2}} = \frac{2(n-k+1)^2}{(2n-2k+2)(2n-2k+1)}$$
$$= \frac{n-k+1}{2n-2k+1} \quad \textit{(mais on utilisera l'expression ci-dessus dans le calcul final).}$$

On peut retrouver cette probabilité en considérant qu'on tire 2 boules sans remise et alors

$$\mathbb{P}_{S_1\cap\cdots\cap S_{k-1}}(S_k) = \mathbb{P}(B_1\cap N_2)+\mathbb{P}(N_1\cap B_2) = 2\times\left(\frac{n-k+1}{2(n-k+1)}\times\frac{n-k+1}{2(n-k+1)-1}\right)$$
$$= \frac{n-k+1}{2n-2k+1}.$$

En reprenant (1), on obtient

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{k=1}^{n}\frac{2(n-k+1)^2}{(2n-2k+2)(2n-2k+1)} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k^2}{(2k)(2k-1)} \quad \textit{(en posant } k'=n-k+1\textit{)}$$
$$= 2^n\times\frac{\left(1\times2\times\cdots\times n\right)^2}{(2\times1)\times(4\times3)\cdots(2n\times(2n-1))} = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

Une correction de l'exercice 4 *énoncé*

Il y a $\binom{32}{5}$ mains possibles de 5 cartes, et on peut les considérer comme équiprobables.

Première méthode : une main est favorable lorsque les quatre couleurs y apparaissent, donc il y a nécessairement une couleur qui apparaît deux fois et les trois autres une seule fois :

- On choisit d'abord la couleur qui apparaît deux fois : il y a 4 possibilités, puis 2 cartes parmi les 8 de cette couleur ;
- il reste alors 3 couleurs, et 8 possibilités pour une carte dans chacune de ces 3 couleurs, ce qui fait 8^3 possibilités pour les 3 cartes disparates.

Le nombre total de mains favorables est donc

$$4\times\binom{8}{2}\times8^3,$$

et la probabilité recherchée vaut alors

$$\begin{aligned}
\frac{4\times\binom{8}{2}\times 8^3}{\binom{32}{5}} &= \frac{4\times\frac{8\times7}{2}\times 8^3}{\frac{32\times31\times30\times29\times28}{5!}} = \frac{2\times8\times7\times8^3\times(5\times4\times3\times2)}{32\times31\times30\times29\times28}\\
&= \frac{2\times2^3\times7\times\left(2^3\right)^3\times(5\times2^2\times3\times2)}{2^5\times31\times(2\times3\times5)\times29\times(2^2\times7)} = \frac{2^{16}\times7\times5\times3}{2^8\times3\times5\times7\times29\times31}\\
&= \frac{2^8}{31\times29} = \frac{256}{899}.
\end{aligned}$$

Une autre méthode : Numérotons de 1 à 4 les quatre couleurs. Notons A_i l'événement « la couleur i est dans la main ». On cherche la probabilité de $\bigcap_{i=1}^{4} A_i$. On évalue son contraire

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right) = 1-\mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{4} A_i}\right) = 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{4}\overline{A_i}\right).$$

À l'aide d'une formule du crible établie au passage (car hors programme en PC) :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{4}\overline{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{4}\mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\mathbb{P}\left(\overline{A_i}\cap\overline{A_j}\right) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}\mathbb{P}\left(\overline{A_i}\cap\overline{A_j}\cap\overline{A_k}\right).$$

Or par un raisonnement classique en équiprobabilité :

- $P(\overline{A_i}) = \frac{\binom{24}{5}}{\binom{32}{5}} = \frac{\frac{24\times23\times22\times21\times20}{5!}}{\frac{32\times31\times30\times29\times28}{5!}} = \frac{23\times11\times3}{31\times29\times4}$,
- $P(\overline{A_i}\cap\overline{A_j}) = \frac{\binom{16}{5}}{\binom{32}{5}} = \frac{13\times3}{31\times29\times2}$,
- et $P(\overline{A_i}\cap\overline{A_j}\cap\overline{A_k}) = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{32}{5}} = \frac{1}{4\times31\times29}$,

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{4}\overline{A_i}\right) &= \sum_{i=1}^{4}\frac{\binom{24}{5}}{\binom{32}{5}} - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{\binom{16}{5}}{\binom{32}{5}} + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}\frac{\binom{8}{5}}{\binom{32}{5}}\\
&= 4\times\frac{23\times11\times3}{31\times29\times4} - 6\times\frac{13\times3}{31\times29\times2} + 4\times\frac{1}{4\times31\times29}\\
&= \frac{23\times11\times3-3\times13\times3+1}{31\times29} = \frac{643}{899}.
\end{aligned}$$

On conclut que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{4} \mathrm{A}_i\right) = 1 - \frac{643}{899} = \frac{256}{899} \approx 0,28.$$

Une correction de l'exercice 5

énoncé

Cet exercice montre que ce n'est pas parce qu'on entend « avec remise » qu'il faut en déduire que les tirages sont indépendants. Dans cet exercice, les événements B_i sont indépendants par rapport aux probabilités $\mathrm{P}_{\mathrm{U}_1}$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{U}_2}$, mais pas par rapport à la probabilité P.

Notons $\mathrm{U}_1 =$ « on choisit l'urne U_1 », et $\mathrm{N}_i =$ « le i^{e} tirage donne une boule noire ».

1. On cherche ici $\mathbb{P}(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{N}_3)$. On applique la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $\left\{\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2 = \overline{\mathrm{U}_1}\right\}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{N}_3) = {} & \mathbb{P}(\mathrm{U}_1) \times \mathbb{P}_{\mathrm{U}_1}(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{N}_3) \\ & + \mathbb{P}(\mathrm{U}_2) \times \mathbb{P}_{\mathrm{U}_2}(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{N}_3)\end{aligned}$$

Or sachant U_1, les trois tirages se font avec remise dans l'urne qui contient une proportion constante, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, de boules noires, ces tirages sont donc indépendants relativement à la probabilité $\mathbb{P}_{\mathrm{U}_1}$.

Ne pas oublier que des événements ne sont pas indépendants en soi, mais seulement relativement à une probabilité ! Dans cet exercice, les tirages sont indépendants relativement à $\mathbb{P}_{\mathrm{U}_1}$ et $\mathbb{P}_{u_2}$, mais pas relativement à la probabilité $\mathbb{P}$ qui prend en compte le choix initial de l'urne.

d'où

$$\mathbb{P}_{\mathrm{U}_1}(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{N}_3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

De même $\mathbb{P}_{\mathrm{U}_2}(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{N}_3) = \frac{1}{27}$ et enfin

$$\mathbb{P}(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{N}_3) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{27} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{27} = \frac{1}{6}.$$

2. On cherche ici la probabilité $\mathbb{P}_{\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2}(\mathrm{N}_3)$.

Une fois n'est pas coutume, on va appliquer la formule des probabilités composées à l'envers, autrement dit, $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

$$\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{\mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3)}{\mathbb{P}(N_1 \cap N_2)}$$

Le numérateur a été calculé ci-dessus, et on calcule le dénominateur de la même manière avec la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{18}.$$

On obtient finalement

$$\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}.$$

3. Les tirages seraient indépendants si le résultat des deux premiers tirages n'avait pas d'influence sur le troisième tirage, autrement dit si on avait l'égalité $\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \mathbb{P}(N_3)$.
Mais, toujours par la même méthode de la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(N_1) = \mathbb{P}(N_2) = \mathbb{P}(N_3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

donc les tirages ne sont pas indépendants.

4. Comme aux deux questions qui précèdent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{N_1 \cap \cdots \cap N_k}(N_{k+1}) &= \frac{\mathbb{P}(N_1 \cap \cdots \cap N_k \cap N_{k+1})}{\mathbb{P}(N_1 \cap \cdots \cap N_k)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k}} \\
&= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{k} + \left(\frac{1}{3}\right)^{k}} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{k}} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Quand k tend vers $+\infty$, cette probabilité tend vers la probabilité d'avoir une boule noire dans l'urne U_1, ce qui confirme ce que nous dicte l'intuition, puisqu'à force d'obtenir des boules noires on pense que c'est l'urne U_1 qu'on a choisie.

Une correction de l'exercice 6 *énoncé*

1. Notons F_1 =« obtenir 1 fois *Face* au premier lancer » (notation compatible avec la définition ultérieure de F_n) et T =« la pièce choisie est truquée ».

(i) La formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(T, \overline{T})$ donne

$$\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(T)P_T(F_1) + \mathbb{P}(\overline{T})P_{\overline{T}}(F_1)$$

d'après l'énoncé $\mathbb{P}(T) = 1/3$, $\mathbb{P}(\overline{T}) = 2/3$, $P_T(F_1) = 1$ et $P_{\overline{T}}(F_1) = 1/2$, d'où

$$\mathbb{P}(F_1) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

(ii) Choisir une des trois pièces et la lancer revient à choisir au hasard une des 6 faces, ainsi comme il y a 4 côtés *Face* et 2 côtés *Pile* et que tous ces côtés peuvent être considérés comme équiprobables, on obtient

$$\mathbb{P}(F_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2. On recommence à utiliser la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(T, \overline{T})$

$$\mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(T)P_T(F_n) + \mathbb{P}(\overline{T})P_{\overline{T}}(F_n)$$

– or, sachant T, F_n revient à obtenir n fois *Face* avec la pièce truquée, donc $P_T(F_n) = 1$;

– et, sachant $\overline{T}$, F_n revient à obtenir n fois *Face* avec la pièce non-truquée, les lancers pouvant être considérés comme indépendants, on obtient $P_{\overline{T}}(F_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On obtient par conséquent

$$\mathbb{P}(F_n) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

Notons F =« ne pas obtenir *Pile* ». L'événement F est réalisé lorsqu'on obtient toujours *Face*, ainsi $F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$.

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+1} \subset F_n$ (si les $n+1$ premiers lancers donnent *Face*, alors les n premiers donnent *Face*), donc la suite d'événements $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante, ainsi

$$\mathbb{P}(F) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(F_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = \frac{1}{3}$$

car $|\frac{1}{2}| < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$.

3. On cherche $P_{F_n}(T)$, on utilise pour ça la formule de Bayes (version light)

$$P_{F_n}(T) = \frac{\mathbb{P}(T)P_T(F_n)}{\mathbb{P}(F_n)} = \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

Pour la même raison que précédemment, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{F_n}(T) = 1$.

Ceci corrobore le fait que si on observe quelqu'un choisir une des trois pièces et obtenir indéfiniment des *Face*, alors on est presque certain qu'il lance la pièce truquée.

Une correction de l'exercice 7

énoncé

1. En notant r la raison de cette suite arithmétique, on a pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_1) + (i-1)r,$$

mais aussi $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1$ puisqu'il s'agit d'un système complet d'événements.

Ainsi

$$\underbrace{n\,\mathbb{P}(A_1)}_{=\frac{1}{2^n}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(i-1)}_{\frac{n(n-1)}{2}}\, r = 1, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{2}{n(n-1)}\left(1-\frac{n}{2^n}\right).$$

Il en résulte que pour tout $i \in i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{2(i-1)}{n(n-1)}\left(1-\dfrac{n}{2^n}\right)$.

2. La formule des probabilités totales sur le système complet d'événements formé par les A_i donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{2(i-1)}{n(n-1)}\left(1-\frac{n}{2^n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{2(i-1)}{n(n-1)}\left(1-\frac{n}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + \frac{2}{n(n-1)}\left(1-\frac{n}{2^n}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{2^i}.
\end{aligned}$$

Pour calculer la dernière somme, on considère la fonction $g : x \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} x^{i-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$, qui est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ avec

$$g'(x) = \sum_{i=1}^{n} (i-1)x^{i-2} = \frac{nx^{n-1}(x-1) - (x^n - 1)}{(x-1)^2},$$

ce qui permet d'affirmer que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{2^i} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(i-1)\frac{1}{2^{i-2}} = \frac{1}{4}g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n\frac{1}{2^{n-1}}(\frac{1}{2}-1) - (\frac{1}{2^n}-1)}{(\frac{1}{2}-1)^2} = 1 - \frac{n+1}{2^n}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{2}{n(n-1)}\left(1 - \frac{n}{2^n}\right)\left(1 - \frac{n+1}{2^n}\right).$$

Mais comment diantre avons-nous pu vivre jusqu'à présent dans l'ignorance de ce résultat ?...

Une correction de l'exercice 8 *énoncé*

1. Le cours affirme que N suit la loi géométrique de paramètre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\mathrm{N} = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

2. Il est clair que l'image de Y est $\mathbb{N}$. On calcule sa loi en utilisant le système complet d'événements $(\mathrm{N} = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et l'indépendance de toutes les variables étudiées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k, \mathrm{N} = n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1} + \cdots + \mathrm{X}_{2n} = k, \mathrm{N} = n)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1} + \cdots + \mathrm{X}_{2n} = k)\mathbb{P}(\mathrm{N} = n).\end{aligned}$$

Comme $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, le cours affirme que la somme de n quelconques d'entre elles suit une loi binomiale de paramètres (n,p). Comme $1-(1-p)^2 = p(2-p)$, on en déduit que

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y} = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^n \times p(1-p)^{n-1} = p\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{2n-1} = p\frac{1-p}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} p(1-p)^{n-1} = p^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{2n-k-1}$$
$$= \frac{p^{k+1}(1-p)^{k-1}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\left((1-p)^2\right)^{n-k}.$$

Si l'on pose $f : t \in \,]-1,1[\, \mapsto \frac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n$, le théorème de dérivation terme à terme des sommes de séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence montre que

$$\forall t \in \,]-1,1[, \quad f^{(k)}(t) = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)t^{n-k}.$$

Comme $1-(1-p)^2 = p(2-p)$, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y=k) = \frac{p^{k+1}(1-p)^{k-1}}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.$$

Une correction de l'exercice 9

énoncé

Toutes les variables X_n ont pour espérance p et pour variance $p(1-p)$.
Donc par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbb{E}(X_k) + \mathbb{E}(X_{k+1})\right) = 2np.$$

Par propriété de la variance

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Y_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j).$$

Toujours avec la même propriété, sachant que les covariances de variables indépendantes sont nulles :

$$\mathbb{V}(Y_k) = \mathbb{V}(X_k) + \mathbb{V}(X_{k+1}) = 2p(1-p).$$

D'autre part, si $i < j-1$, alors $i+1 < j$, donc par le lemme des coalitions les variables $Y_i = X_i + X_{i+1}$ et $Y_j = X_j + X_{j+1}$ sont indépendantes, donc $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$.

Ainsi

$$\mathbb{V}(S_n) = 2np(1-p) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}).$$

Et par bilinéarité de la covariance

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \text{Cov}(X_i + X_{i+1}, X_{i+1} + X_{i+2}) &= \underbrace{\text{Cov}(X_i, X_{i+1} + X_{i+2})}_{=0} + \text{Cov}(X_{i+1}, X_{i+1} + X_{i+2}) \\
&= \text{Cov}(X_{i+1}, X_{i+1}) + \underbrace{\text{Cov}(X_{i+1}, X_{i+2})}_{=0} \\
&= \mathbb{V}(X_{i+1}) = p(1-p).
\end{aligned}$$

Rassemblons tous des calculs épars :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(S_n) &= \sum_{k=1}^{n} 2p(1-p) + 2\sum_{i=1}^{n-1}(p-p^2) \\
&= 2n\,p(1-p) + 2(n-1)p(1-p) \\
&= 2(2n-1)p(1-p).
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 10 *énoncé*

1. Les lois de X et Y sont les lois marginales du couple (X, Y), dont l'énoncé nous donne la loi conjointe.

On peut représenter la loi conjointe comme ci-dessous :

$X\backslash Y$	1	$\dots$			n
0	q^n/n	$\dots$			q^n/n
1	$\binom{n}{1}p^1q^{n-1}$	0	$\dots$		0
$\vdots$	0	$\ddots$ $\binom{n}{2}p^2q^{n-2}$	$\ddots$		$\vdots$
	$\vdots$				0
n	0	$\dots$		0	$\binom{n}{n}p^nq^0$

On sait déjà que $X(\Omega) = [\![0\ ;\ n]\!]$, et $Y(\Omega) = [\![1\ ;\ n]\!]$.

Pour tout $j \in [\![0\ ;\ n]\!]$, la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par Y nous donne

$$\mathbb{P}(X=j)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=j,Y=k)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\big((X=j)\cap(Y=k)\big).$$

➟ Si $j\in[\![1\ ;\ n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=j)&=\mathbb{P}(X=Y=j)+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}}0\\ &=\binom{n}{j}p^jq^{n-j}=\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}.\end{aligned}$$

➟ Si $j=0$,

$$\mathbb{P}(X=0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{q^n}{n}=q^n=(1-p)^n.$$

On reconnaît que X suit $\mathscr{B}(n,p)$.
Pour tout $k\in[\![1\ ;\ n]\!]$, la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements induit par X nous donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=k)&=\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(X=j,Y=k)\\ &=\mathbb{P}(X=0,Y=k)+\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(X=j,Y=k)\\ &=\frac{q^n}{n}+\mathbb{P}(X=Y=k)+0\\ &=\frac{q^n}{n}+\binom{n}{k}p^kq^{n-k}.\end{aligned}$$

La variable Y est finie, donc son espérance existe, et vaut

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\times \mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{q^n}{n}+\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{q^n}{n}+\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\\
&= \frac{n(n+1)}{2}\times\frac{q^n}{n}+\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\\
&= \frac{(n+1)q^n}{2}+\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\\
&= \frac{(n+1)q^n}{2}+\mathbb{E}(X)\\
&= \frac{(n+1)(1-p)^n}{2}+np. \quad \textit{(ce résultat me laisse dubitatif...)}
\end{aligned}$$

2. Le simple fait qu'il y ait autant de 0 dans la loi conjointe prouve que X et Y ne sont pas indépendantes. Pour être précis, par exemple $\mathbb{P}(X=1, Y=2)=0$ tandis que $\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=2)\neq 0$, donc $\mathbb{P}(X=1,Y=2)\neq\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=2)$.

> *Bien comprendre que deux variables sont indépendantes dès qu'il y a un* 0 *dans la loi conjointe !*

3. Soit $j\in[\![0\ ;\ n]\!]$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X=j)$ est donnée par, pour tout $k\in[\![1\ ;\ n]\!]$,

$$\mathbb{P}_{(X=j)}(Y=k)=\frac{\mathbb{P}\big((X=j)\cap(Y=k)\big)}{\mathbb{P}(X=j)}.$$

- Si $j=0$,

$$\mathbb{P}_{(X=0)}(Y=k)=\frac{\frac{q^n}{n}}{q^n}=\frac{1}{n}.$$

Donc sachant $(X=0)$, Y suit la loi uniforme sur $[\![1\ ;\ n]\!]$.

- Si $j\in[\![1\ ;\ n]\!]$,

$$\mathbb{P}_{(X=j)}(Y=k)=\begin{cases}\frac{0}{\mathbb{P}(X=j)}=0 & \text{si } k\neq j,\\ \frac{\binom{n}{k}p^jq^{n-j}}{\binom{n}{k}p^jq^{n-j}}=1 & \text{si } k=j.\end{cases}$$

Donc sachant $(X=j)$, Y est la variable certaine égale à j.

4. La covariance de X et Y (on sait qu'elle existe puisque X et Y sont finies) est donnée par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{n} k\times j\times \mathbb{P}\big((X=j)\cap(Y=k)\big)\\ &= \sum_{j=1}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \quad \textit{(d'après la loi conjointe donnée dans l'énoncé)}\\ &= \mathbb{E}(X^2) \quad \textit{(parce qu'on est observateur)}\\ &= \mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}X)^2 = np(1-p) + n^2p^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= np(1-p) + n^2p^2 - (np)\times\left(\frac{(n+1)(1-p)^n}{2} + np\right)\\ &= np\left(1-p+\frac{(n+1)(1-p)^n}{2}\right)\\ &= n(1-q)\left(q+\frac{(n+1)q^n}{2}\right).\end{aligned}$$

Si X et Y sont décorrélées *(c'est la première fois que je vois ce terme en proba, mais on traduit facilement en « indépendantes »)*, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, ce qui n'est pas possible d'après le résultat ci-dessus car $q \in]0\ ;\ 1[$.

La réponse est donc non.