Le rapport du Jaury

(i). ➟ **Diagonaliser une matrice** A, c'est trouver une matrice diagonale D (avec les **valeurs propres sur la diagonale**) et une matrice inversible P (avec **en colonnes les vecteurs propres** respectifs aux valeurs propres) telles que $\boxed{\mathrm{A}=\mathrm{P}\times\mathrm{D}\times\mathrm{P}^{-1}}$; comme dans la remarque 12.12.

➟ Pour **trouver les vecteurs propres** de la matrice A associés à la valeur propre λ, on doit résoudre $\mathrm{AX}=\lambda\mathrm{X}$, mais il est hautement conseillé de résoudre le système homogène équivalent $\boxed{(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_n)\mathrm{X}=0}$, et ce en appliquant la technique du **pivot de Gauss** avec des **opérations sur les lignes** de la matrice $(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_n)$!

> *Le mieux étant d'obtenir cette forme de résolution :*
>
> $$\begin{aligned}(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_n)\mathrm{X}=0 &\iff \cdots \ \textit{(pivot de Gauss)}\ \cdots\\ &\iff \mathrm{X}=\cdots\\ &\iff \mathrm{X}\in\mathrm{Vect}\,(\square,\ldots)\,,\end{aligned}$$
>
> *pour conclure que* $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})=\mathrm{Vect}\,(\square,\ldots)$.

(ii). Même si le premier réflexe pour trouver les valeurs propres d'une matrice M est de chercher le polynôme caractéristique, il est parfois plus facile de trouver les valeurs propres et leurs ordres de multiplicité par des considérations comme

➟ Peu d'élèves pensent à utiliser le fait que **la trace de** M **est la somme des valeurs propres** *(chaque valeur propre λ étant comptée m_λ fois)* !

C'est pourtant un outil très utile, ne serait-ce que pour vérifier les valeurs propres qu'on a trouvées, mais aussi pour trouver celles qui restent quand on en a déjà d'autres *(voir les exercices 5, 6, 8, 9)*.

➟ la somme des termes de chaque ligne de M vaut $\square$ *(le même résultat pour toutes les lignes)*, donc $\mathrm{M}\times\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\square\times\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, ainsi $\square$ est une valeur propre de M ;

➟ la somme des termes de chaque colonne de M vaut $\square$, donc la somme des termes de chaque ligne de $\mathrm{M}^\top$ vaut $\square$, ainsi d'après la remarque

ci-dessus $\square$ est une valeur propre de $M^\top$, donc $\square$ est aussi une valeur propre de M *(mais on ne connaît pas a priori de vecteur propre associé)* ;
- ➟ on remarque une colonne où seul le terme de la diagonale est non nul, *etc*, et d'en déduire le polynôme caractéristique.

(iii). Rappelons que la phrase « *le polynôme caractéristique de $\square$ est scindé dans* $\mathbb{K}[X]$ » sert à dire que $\square$ a toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

En particulier, si $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ a un polynôme caractéristique qui n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, par exemple $\chi_M = X(X^2+4)$, alors M a des valeurs propres hors de $\mathbb{R}$, c'est pour ça que M n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *(mais dans ce cas elle est quand même diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ car $\chi_M = X(X-2i)(X+2i)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$).*

(iv). Bien comprendre que la proposition 12.16 est en deux parties :
- ➟ la première partie affirme que si jamais on trouve un polynôme annulateur de $\square$ scindé à racines simples, alors $\square$ est diagonalisable ;
- ➟ la deuxième partie affirme qu'en particulier, $\square$ est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\square)} (X-\lambda)$ annule $\square$.

(v). Attention ! $\boxed{\text{Les notations } m_\lambda \text{ et } d_\lambda \text{ ne sont pas standard.}}$

Un jour sans doute, elles seront connues sous le nom de *notations de Jaury*, mais pour le moment l'humanité n'est pas prête.

Questions de cours 1

1. Donner la définition d'une valeur propre d'un endomorphisme et d'une matrice, ainsi que des ordres de multiplicité algébrique et géométrique.
   Définitions 12.4 et 12.7.
   Quelles inégalités y a-t-il entre ces deux ordres ?
   Proposition 12.12.
2. Donner la relation entre les valeurs propres et la trace.
   Voir le dernier résultat de la proposition 12.11.
3. Définir un endomorphisme diagonalisable, et une matrice diagonalisable.
   Définitions 12.5 et proposition 12.14.
4. Dans un espace vectoriel de dimension finie, donner trois caractérisations de la diagonalisabilité (dont une avec un polynôme annulateur).
   Les propositions 12.15 et 12.16.
5. Donner une condition suffisante de diagonalisabilité.
   Proposition 12.17

Exercice 1

Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable ? Déterminer les puissances de A.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. Diagonaliser $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, et en déduire l'expression de A^n.
2. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = v_0 = 1$ et
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n \end{cases}$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déduire de la première question l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 3

1. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.
2. En déduire que son commutant *(c'est-à-dire l'ensemble des matrices qui commutent avec* A*)* est $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.

Exercice 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de la matrice A ci-contre. Est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est semblable à A.
3. Déterminer B^n pour tout entier naturel n, et en déduire A^n.

Exercice 5

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $M = \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix}$.

Montrer que M est diagonalisable ; déterminer son spectre.

Exercice 6

On note J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1, et pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $M(a, b)$ la matrice dont les termes diagonaux valent a, et dont les autres coefficients valent b.

1. Donner le rang et le polynôme caractéristique de J_n. Montrer que J_n est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.
2. En déduire que $M(a, b)$ est diagonalisable, donner ses valeurs propres et sous-espaces propres.

Exercice 7

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n \geqslant 3$, de rang 2, de trace nulle et telle que $\mathrm{A}^n \neq 0_n$.
Montrer que A est diagonalisable et donner son spectre.

Exercice 8

Soient $n \geqslant 2$ un entier pair et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & n & 1 & \cdots & n \\ 2 & n-1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 3 & n-2 & 3 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & n & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer le rang de A.
Montrer que A est diagonalisable et préciser ses éléments propres.

Exercice 9

Soient
- $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$,
- $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes valent 1 sauf ceux de la diagonale qui sont nuls,
- et l'application $u : \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n \mapsto \mathrm{M} + \mathrm{tr}(\mathrm{M})\mathrm{A}$.

1. Prouver que le polynôme $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 1$ est annulateur de u.

2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

Exercice 10 – 🔥

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2 + \mathrm{I}_n$ ne soit pas inversible.

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{AX} = i\mathrm{X}$ et $\mathrm{X} \neq 0$.

2. Montrer que A est semblable sur $\mathbb{R}$ à une matrice de la forme

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \mathrm{B} \\ \hline & & \\ \multicolumn{2}{c|}{0_{n-2,2}} & \mathrm{C} \end{array}\right), \quad \text{avec } \mathrm{B} \in \mathscr{M}_{2,n-2}(\mathbb{R}), \text{ et } \mathrm{C} \in \mathscr{M}_{n-2,n-2}(\mathbb{R}).$$

Exercice 11 – 🔥 - Mines-Ponts 2019

On considère une suite complexe $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $a_2 \neq 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la matrice A_n ci-contre dont on note χ_n le polynôme caractéristique :

$$\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer χ_2 et χ_3.

2. Montrer que χ_n est divisible par X^{n-2}.

3. On pose $b_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k^2$. Montrer alors que $\chi_n = \mathrm{X}^{n-2}(\mathrm{X}^2 - a_1\mathrm{X} - b_n)$.

4. Selon que b_n est nul ou non, étudier la diagonalisabilité de A_n.

Exercice 12 – 🔥🔥

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{A} \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Donner les valeurs propres de B et la dimension des sous-espaces propres correspondants.
À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Exercice 13 – 🔥🔥 - Mines-Ponts 2019

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par u.

Solutions

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

> *On voit que cette matrice est symétrique réelle, donc le théorème spectral nous permet d'affirmer que cette matrice est diagonalisable.*

Le polynôme caractéristique de la matrice A est :

$$
\begin{aligned}
\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X & 0 & -1 \\ 0 & X & 1 \\ -1 & 1 & X+1 \end{vmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + XL_3 - L_2 \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2+X(X+1) \\ 0 & X & 1 \\ -1 & 1 & X+1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{3+1}(-1)\begin{vmatrix} 0 & -2+X(X+1) \\ X & 1 \end{vmatrix} \\
&= X(-2+X(X+1)) = X\left(X^2+X-2\right) \\
&= X(X-1)(X+2)),
\end{aligned}
$$

donc A admet trois valeurs propres deux à deux distinctes qui sont 0, 1 et -2. On peut en déduire que A est diagonalisable et que les trois sous-espaces propres sont des droites vectorielles.
Les résolutions successives des systèmes $AX = 0$, $(A-I_3)X = 0$ et $(A+2I_3)X = 0$ donnent

$$
E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),\ E_{-2}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right).
$$

Ainsi $A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Puis par la méthode du pivot, ou méthode de Gauss-Jordan (on transforme

avec des opérations sur les lignes $(A|I_3)$ en $(I_3|P^{-1})$) on obtient

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & -1/3 & 1/3\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ 1/6 & -1/6 & -1/3\end{pmatrix}.$$

Par récurrence, on montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=PD^nP^{-1}$, ce qui donne :

$$A^n=\begin{pmatrix}1/3+1/6\,(-2)^n & -1/3-1/6\,(-2)^n & 1/3-1/3\,(-2)^n\\ -1/3-1/6\,(-2)^n & 1/3+1/6\,(-2)^n & -1/3+1/3\,(-2)^n\\ 1/3-1/3\,(-2)^n & -1/3+1/3\,(-2)^n & 1/3+2/3\,(-2)^n\end{pmatrix}.$$

Une correction de l'exercice 2

énoncé

1. Le polynôme caractéristique de A est

$$(X-7)(X-1)-(-2)\times 4=X^2-8X+15=(X-5)\cdot(X-3),$$

donc les valeurs propres de A sont 3 et 5.

La résolution de $(A-3I_2)X=0$ donne $E_3(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$, et celle de $(A-5I_2)X=0$ donne $E_5(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

2. La matrice A est dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et possède 2 valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

De plus, d'après les calculs précédents, en notant $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, on a la diagonalisation suivante de A :

$$A=P\times D\times P^{-1},$$

dont on tire par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}A^n&=PD^nP^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & 5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. (a) De manière évidente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
(b) On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= X_n = A^n X_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2 \times 5^n \\ -3^{n+1} + 4 \times 5^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 3 *énoncé*

1. On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-3)(X+2)$ et donc $\mathrm{Sp} A = \{-2, 3\}$.
Après résolution des équations $AX = 3X$ et $AX = -2X$, on obtient :

$$E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right).$$

On peut donc conclure que

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}}_{=P} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{=D} \times P^{-1},$$

sachant que la méthode de Gauss-Jordan nous donne

$$P^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Notons $\mathscr{C}(A)$ le commutant de A.
   - Il est évident que I_2 et A sont dans $\mathscr{C}(A)$, et je vous laisse prouver que $\mathscr{C}(A)$ est stable par combinaison linéaire, donc on a l'inclusion $\mathrm{Vect}(I_2, A) \subset \mathscr{C}(A)$.

- Réciproquement, soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{C}(A) &\iff AM = MA \iff (PDP^{-1})M = M(PDP^{-1}) \\
&\iff D \times (P^{-1}MP) = (P^{-1}MP) \times D \quad \textit{(en multiplicant à gauche par } P^{-1} \textit{ et à droite par } P\textit{).} \\
&\iff D \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times D \quad \textit{(en posant } P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\textit{)} \\
&\iff \begin{cases} -2b = 3b \\ 3c = -2c \end{cases} \iff b = c = 0 \\
&\iff P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \iff M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1} \\
&\iff M = a \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{=U} + d \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}}_{=V} \\
&\iff M \in \mathrm{Vect}(U, V).
\end{aligned}$$

  Ainsi $\mathscr{C}(A) = \mathrm{Vect}(U,V)$, et les matrices U et V n'étant pas colinéaires, on peut conclure que (U,V) est une base de $\mathscr{C}(A)$, et donc que $\dim(\mathscr{C}(A)) = 2$.

- Comme $\mathrm{Vect}(I_2, A)$ et $\mathscr{C}(A)$ sont de même dimension, et que l'un est inclus dans l'autre, on peut conclure qu'ils sont égaux.

Une correction de l'exercice 4

énoncé

1. Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{A}}(x) &= \det(x\mathrm{I}_3 - \mathrm{A})\\
&= \begin{vmatrix} x-1 & 12 & -2\\ -1 & x-1 & -1\\ -4 & -8 & x-3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + (x-1)\mathrm{L}_2 \\ \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 4\mathrm{L}_2 \end{matrix}\\
&= \begin{vmatrix} 0 & 12+(x-1)^2 & -x-1\\ -1 & x-1 & -1\\ 0 & -4(x+1) & x+1 \end{vmatrix}\\
&= -(-1)\begin{vmatrix} 12+(x-1)^2 & -x-1\\ -4(x+1) & x+1 \end{vmatrix}\\
&= (x+1)\begin{vmatrix} 12+(x-1)^2 & -x-1\\ -4 & 1 \end{vmatrix}\\
&= (x+1)\Big[12+(x-1)^2-(-4)(-x-1)\Big]\\
&= (x+1)\Big[12+(x^2-2x+1)-4x-4\Big]\\
&= (x+1)\Big[x^2-6x+9\Big] = (x+1)(x-3)^2.
\end{aligned}$$

Donc A admet deux valeurs propres : 3 est valeur propre d'ordre 2, et 1 est valeur propre d'ordre 1.
En résolvant $(\mathrm{A}-3\mathrm{I}_3)\mathrm{X} = 0$ et $(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)\mathrm{X} = 0$, on obtient $\mathrm{E}_3(f) = \mathrm{Vect}(-2{,}1{,}4)$ et $\mathrm{E}_{-1}(f) = \mathrm{Vect}(-1{,}0{,}1)$.
La somme des dimensions des sous-espaces propres ne donne pas 3 qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$, donc A n'est pas diagonalisable.

2. On doit montrer qu'il existe une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle A (ou plutôt l'endomorphisme u_{A} canoniquement associé à A) a pour matrice B, autrement dit

$$\underset{(e_1,e_2,e_3)}{\mathrm{Mat}}(u_{\mathrm{A}}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \mathrm{A}e_1 & \mathrm{A}e_2 & \mathrm{A}e_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1\\ e_2\\ e_3 \end{array} \end{array}$$

ce pourquoi il faut que

$$\left\{\begin{array}{ll} Ae_1 & = -e_1 \\ Ae_2 & = 3e_2 \\ Ae_3 & = e_2 + 3e_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} (A + I_3)e_1 & = 0 \\ (A - 3I_3)e_2 & = 0 \\ (A - 3I_3)e_3 & = e_2 \end{array}\right.$$

On prend pour les deux premiers vecteurs les deux vecteurs propres $e_1 = (-1,0,1)$ et $e_2 = (-2,1,4)$ respectivement associés à -1 et 3 que l'on a trouvé dans la première question.
Enfin, en résolvant le système de matrice augmentée $(A - 3I_3|e_2)$, on constate que le vecteur $e_3 = (1,0,0)$ convient.
On vérifie de nouveau que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ de la façon de notre choix, par exemple en calculant le déterminant dans la base canonique de la famille :

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

qui vaut -1 en développant par la dernière colonne.
D'où C.Q.F.D.

3. ➟ Par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, B^n est de la forme

$$B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & u_n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 3$, donc on déduit *(suite arithmético-géométrique)* que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3}{2} \times (3^n - 1)$.

➟ Par la formule de changement de base, on pose $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(e_1, e_2, e_3)$, et alors

$$A = \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(f) = P \times B \times P^{-1}$$

➟ Puis par récurrence *(ou par changement de base pour f^n remarquons !)*, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = P \times B^n \times P^{-1}$$

et je vous laisse faire le calcul qui donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A^n = \begin{pmatrix} 4\times 3^n - 3 & -10\times 3^n + 4\,(-1)^n + 6 & 4\times 3^n - (-1)^n - 3 \\ -\frac{3}{2}\times 3^n + \frac{3}{2} & 4\times 3^n - 3 & -\frac{3}{2}\times 3^n + \frac{3}{2} \\ -6\times 3^n + 6 & 16\times 3^n - 4\,(-1)^n - 12 & -6\times 3^n + (-1)^n + 6 \end{pmatrix}$$

ce qui est vraiment super chouette.

Une correction de l'exercice 5

énoncé

La matrice M est diagonalisable car elle est symétrique réelle.

Méthode empirique

L'observation de la somme des termes de chaque ligne de M nous permet d'avancer que

$$M \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 4a \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $4a$ est une valeur propre de M et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

Puis avec encore plus d'astuce en additionnant la première et la troisième colonne, ainsi que la deuxième et la quatrième :

$$M \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$

donc 0 est valeur propre, puis

$$\mathrm{M}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=2b\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \text{ et }\ \mathrm{M}\times\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}=2b\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

donc $2b$ est valeur propre, d'ordre de multiplicité géométrique au moins 2. On en déduit que le spectre de M est $\{0,4a,2b\}$, avec les ordres de multiplicité géométriques et algébrique respectivement égaux à $1,1,2$.

Autre méthode

Calculons le polynôme caractéristique de M : l'opération élémentaire $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3+\mathrm{L}_4$ donne :

$$\begin{aligned}\chi_{\mathrm{M}}(\lambda)&=\begin{vmatrix}a+b-\lambda & a & a-b & a\\ a & a+b-\lambda & a & a-b\\ a-b & a & a+b-\lambda & a\\ a & a-b & a & a+b-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(4a-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a-b & a+b-\lambda & a & a-b\\ a-b-\lambda & a & & \\ a & a-b & a & a+b-\lambda\end{vmatrix}\end{aligned}$$

Ensuite les opérations $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - a\mathrm{L}_1$ pour $i=2,3,4$ donnent :

$$\chi_{\mathrm{M}}(\lambda)=(4a-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-\lambda & 0 & -b\\ -b & 0 & b-\lambda & 0\\ 0 & -b & 0 & b-\lambda\end{vmatrix}$$

Enfin avec les opérations $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ et $C_4 \leftarrow C_4 - C_2$ il vient :

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) &= (4a-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-\lambda & 0 & -2b+\lambda \\ -b & 0 & 2b-\lambda & 0 \\ 0 & -b & 0 & 2b-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4a-\lambda)(2b-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-\lambda & 0 & -1 \\ -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (4a-\lambda)(2b-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-\lambda & -1 \\ 0 & -b & 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-4a)(\lambda-2b)^2.
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de M sont donc dans le cas général où $0, 2b$ et $4a$ sont distincts (c'est-à-dire $a \neq 0, b \neq 0$ et $b \neq 2a$) : 0 et $4a$ valeurs propres simples et $2b$ valeur propre double.

Une correction de l'exercice 6 *énoncé*

1. ➟ **Première méthode :** Le rang de cette matrice est 1, donc son noyau *(en vérité c'est le noyau de son endomorphisme canoniquement associé)* est de dimension $n-1$, ce qui revient à dire que 0 est une valeur propre de J_n d'ordre de multiplicité géométrique $n-1$, et d'ordre de multiplicité algébrique supérieur ou égal à $n-1$.

   Par conséquent, X^{n-1} divise le polynôme caractéristique χ_{J_n} qui est unitaire de degré n, donc se factorise donc sous la forme

   $$\chi_{J_n}(X) = X^{n-1}(X-\lambda), \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}.$$

   Autre méthode : $\chi_{J_n}(X) = X^{n-1}(X-\lambda)$, où $\lambda \in \mathbb{C}$.

   ➟ Ce polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, donc on sait que la trace de J_n, c'est-à-dire n, est égale à la somme des valeurs propres, qui vaut ici λ. On en déduit donc que $\lambda = n$, puis que $\chi_{J_n}(X) = X^{n-1}(X-n)$, et enfin que 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité algébrique $n-1$, et n valeur propre d'ordre 1.

> *La somme des termes de chaque ligne donne n, d'où*
>
> $$\mathrm{J}_n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$
>
> *ce qui donne une autre manière de prouver que n est valeur propre de* J_n*, et que* $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre associé.*

- On sait déjà que $\dim(\mathrm{E}_0(\mathrm{J}_n)) = n-1$.

  D'autre part, n est valeur propre de J_n d'ordre de multiplicité algébrique 1, donc $\dim(\mathrm{E}_n(\mathrm{J}_n)) = 1$,

  > *Rappelons que l'égalité entre l'ordre de multiplicité géométrique, c'est-à-dire la dimension du sous-espace propre, et l'ordre de multiplicité algébrique est toujours vraie pour les valeurs propres simples, c'est-à-dire les valeurs propres d'ordre de multiplicité algébrique* 1.

  et par conséquent J_n est diagonalisable.
- On remarque que les $n-1$ vecteurs $\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_i$, où les E_i forment la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, pour $i \in [\![2, n]\!]$ sont dans $\mathrm{E}_0(\mathrm{J}_n)$ et forment une famille libre, donc une base de $\mathrm{E}_0(\mathrm{J}_n)$.

  D'autre part, on a vu que la colonne C remplie de 1 est dans $\mathrm{E}_n(\mathrm{J}_n)$ qui est de dimension 1, donc $\mathrm{E}_n(\mathrm{J}_n) = \mathrm{Vect}(\mathrm{C})$.
- En conclusion, J_n est diagonalisable de la façon suivante :

$$\mathrm{J}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}}_{=\mathrm{D}} \times \mathrm{P}^{-1}.$$

Ou, ce qui revient au même, $\mathrm{P}^{-1} \times \mathrm{J}_n \times \mathrm{P} = \mathrm{D}$.

2. On remarque que $M(a,b) = bJ_n + (a-b)I_n$, donc

$$\begin{aligned} P^{-1} \times M(a,b) \times P &= P^{-1}\big(bJ_n + (a-b)I_n\big)P \\ &= bP^{-1}J_nP + (a-b)P^{-1}I_nP = b\,D + (a-b)I_n \\ &= \operatorname{Diag}\Big(\underbrace{a-b,\dots,a-b}_{n-1 \text{ fois}},\ a+(n-1)nb\Big). \end{aligned}$$

On en déduit que $M(a,b)$ est diagonalisable, que ses valeurs propres sont $a-b$ d'ordre $n-1$, et $a+(n-1)b$ d'ordre 1, avec la même matrice de passage P, donc les même sous-espaces propres que J_n : $E_{a-b}(M(a,b)) = E_0(J_n)$, et $E_{a+(n-1)b}(M(a,b)) = E_n(J_n)$.

Une correction de l'exercice 7

énoncé

- Par le théorème du rang, $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ est de dimension $n-2$, donc $\chi_A(X) = X^{n-2}Q$, avec $\deg(Q) = 2$ *(mais rien n'empêche a priori* Q *de s'annuler en* 0*)*.
- Soient a et b les autres racines, éventuellement complexes, de Q, alors

$$\chi_A = X^{n-2}(X-a)(X-b),$$

  et

$$\mathrm{Tr}(A) = (n-2) \times 0 + a + b,$$

  d'où $a = -b$ car $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
- Si $a = b = 0$, alors le polynôme caractéristique de A est X^n, mais alors le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que $A^n = 0_n$, ce qui contredit l'énoncé.
  Ainsi a est non nul.
- On en déduit que a et $-a$ sont deux valeurs propres distinctes, non nulles et comme 0 est déjà d'ordre de multiplicité algébrique au moins $n-2$, a et $-a$ sont des valeurs propres simples, c'est-à-dire d'ordre de multiplicité algébrique 1.
  Ainsi χ_A est scindé, et les 3 sous-espaces propres ont une dimension égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante, donc A est diagonalisable.

Une correction de l'exercice 8 *énoncé*

On commence par remarquer que la définition de la matrice impose que n soit un entier pair.

- Il est clair que $\mathrm{rg}(A) = 2$ donc par le théorème du rang 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité géométrique $n-2$, et par un coup d'œil affuté :

$$\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

- On remarque que la somme des lignes est constante et vaut $\frac{n(n+1)}{2}$ donc $\frac{n(n+1)}{2}$ est valeur propre et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

- Comme $\mathrm{Tr}\,(A) = \frac{n^2}{2}$, la dernière valeur propre λ *(fut-elle en théorie complexe, ou égale à une des deux précédentes)* vérifie

$$(n-2) \times 0 + \frac{n(n+1)}{2} + \lambda = \frac{n^2}{2},$$

d'où $\lambda = -\frac{n}{2}$.

- Ainsi A admet pour valeurs propres 0 à l'ordre de multiplicité géométrique $n-2$, et deux autres valeurs propres $\frac{n(n+1)}{2}$ et $-\frac{n}{2}$, non nulles et distinctes entre elles.

Ainsi, comme les sous-espaces propres sont en somme directe dans $\mathbb{R}^n$, les sous-espaces propres associés à $\frac{n(n+1)}{2}$ et $-\frac{n}{2}$ sont des droites vectorielles. En particulier, on sait déjà que

$$E_{\frac{n(n+1)}{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Donc il nous suffit donc de trouver un vecteur propre particulier de S associé à la valeur propre $-\frac{n}{2}$.

➟ Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un tel vecteur propre, alors $SX = -\frac{n}{2}X$, ce qui équivaut à

$$\forall k \in [\![1\ ;\ n]\!],\quad k \times x_1 + (n-k+1) \times x_2 + k \times x_3 + \dots$$
$$\dots + (n-k+1) \times x_n = -\frac{n}{2} x_k$$

Notons A, *resp.* B, la somme des coefficients d'indices impairs, *resp.* pairs, de X. Remarquons en passant que $A + B = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

Alors $SX = -\frac{n}{2}X$ équivaut à

$$\forall k \in [\![1\ ;\ n]\!],\quad k \times A + (n-k+1) \times B = -\frac{n}{2} x_k.$$

En additionnant ces égalités pour k de 1 à n, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} k\,A + \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\,B = -\frac{n}{2} \sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{n}{2}(A+B)$$
$$\text{c'est-à-dire}\quad \frac{n(n+1)}{2} A + \frac{n(n+1)}{2} B = -\frac{n}{2}(A+B)$$
$$\text{d'où}\quad A + B = 0, \quad \text{donc}\quad B = -A.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} SX = -\frac{n}{2}X &\iff \forall k \in [\![1\ ;\ n]\!],\quad k \times A - (n-k+1) \times A = -\frac{n}{2} x_k \\ &\iff \forall k \in [\![1\ ;\ n]\!],\quad x_k = \frac{2A}{n}(2k-n-1)) \\ &\iff X = \frac{2A}{n} \begin{pmatrix} -(n-1) \\ -(n-3) \\ \vdots \\ -1 \\ +1 \\ \vdots \\ +(n-1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi ce dernier vecteur colonne ci-dessus est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $-\frac{n}{2}$, et il forme à lui tout seul une base de $E_{-\frac{n}{2}}(A)$.

Une correction de l'exercice 9 *énoncé*

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

La matrice A a pour terme général $a_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j, \\ 1, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$.

1. Prouvons que $P = X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u c'est-à-dire que $P(u) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$, autrement dit que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $P(u)(M) = 0_n$.
On remarque que

$$\begin{aligned} u^2(M) = u \circ u(M) &= (M + \mathrm{tr}(M)A) + \mathrm{tr}\,(M + \mathrm{tr}(M)A)\,A \\ &= M + \mathrm{tr}(M)A + \mathrm{tr}(M)A + \mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(A)A \quad \textit{(par linéarité de la trace)} \\ &= M + 2\mathrm{tr}(M)A \quad \textit{(car } \mathrm{Tr}\,(A) = 0\textit{).} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u^2(M) - 2u(M) + \mathrm{Id}(M) &= M + 2\mathrm{tr}(M)A - 2M - 2\mathrm{tr}(M)A + M \\ &= 0_n \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

2. Le polynôme $P = (X-1)^2$ est annulateur de u, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{1\}$.
Or $u(A) = A$ et $A \neq 0_n$ donc 1 est bien valeur propre, et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \{1\}$.
Si u est diagonalisable alors d'après le cours, $(X-1)$ est un polynôme annulateur de u, autrement dit $u - \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ est l'endomorphisme nul, donc $u = \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$, ce qui n'est pas.
Donc u n'est pas diagonalisable.

3. Soit λ une valeur propre de u, alors il existe une matrice non nulle M telle que $u(M) = \lambda M$, c'est-à-dire $M + \mathrm{Tr}\,(M)\,A = \lambda M$, ce qui entraîne que $(\lambda - 1)M = \mathrm{Tr}\,(M)\,A$.

- Si $\lambda = 1$, alors $u(M) = M$ si, et seulement si, $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$, et comme la trace est une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que son rang vaut 1, donc grâce au théorème du rang que son noyau est de dimension $n^2 - 1$.

  Donc 1 est valeur propre de u d'ordre de multiplicité géométrique $n^2 - 1$.

- Si $\lambda \neq 1$, alors $u(M) = \lambda M \Longleftrightarrow M = \frac{\mathrm{Tr}(M)}{\lambda - 1} A \Longrightarrow M \in \mathrm{Vect}(A)$.
  On va donc chercher des solutions sous la forme $M = cA$, où $c \in \mathbb{R}$. On remarque en particulier que comme $\mathrm{Tr}(A) = 0$, par linéarité de la trace, $\mathrm{Tr}(M) = c \times \mathrm{Tr}(A) = 0$, et donc que $u(M) = M$.
  On a donc

$$u(M) = \lambda M \Longleftrightarrow \begin{cases} M = \lambda M \\ \exists \mu \in \mathbb{R},\ \ M = \mu A \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda) M = 0_n \\ \exists \mu \in \mathbb{R},\ \ M = \mu A \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow M = 0_n \ \ \textit{(car } \lambda \neq 1\textit{)}$$

  donc λ n'est pas valeur propre de u.

On a donc prouvé que 0 est la seule valeur propre de u et que son ordre de multiplicité géométrique est $n^2 - 1$, et celle-ci étant strictement inférieure à $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$, on peut conclure que u n'est pas diagonalisable.

Une correction de l'exercice 10

énoncé

- La matrice $A^2 + I_n$ elle n'est pas inversible, donc

$$\det\left(A^2 + I_n\right) = 0,$$

  or $A^2 + I_n = (A - iI_n)(A + iI_n)$, d'où par propriété du déterminant

$$\det(A - iI_n)\det(A + iI_n) = 0.$$

  Ainsi l'un des deux facteurs de ce produit est nul, ce qui prouve que i, ou $-i$ est valeur propre de A.

  > *J'espère qu'il est clair qu'un scalaire λ est valeur propre de $\square$ si, et seulement si, $\square - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est pas inversible (ou bijectif).*

  Mais comme A est une matrice à coefficients réels, on en déduit que i ET $-i$ sont valeurs propres de A, donc en particulier qu'il existe X non nul dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que

- On écrit le vecteur X de la question (a) sous la forme $U + iV$ avec U et V dans $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. La relation $AX = iX$ se traduit alors par $A(U + iV) = i(U + iV)$, c'est-à-dire par

$$AU = -V$$
$$AV = U.$$

Il est impossible que U ou V soit nul, sinon U et V le seraient, donc X serait nul, ce qui n'est pas le cas. Par suite, si (U, V) est une famille liée, on peut supposer sans perte de généralité que $U = kV$ avec $k \in \mathbb{R}$. De la première équation ci-dessus, on tire $AV = -V/k$, et de la seconde, $AV = kV$, d'où l'on déduit $(1 + k^2) V = 0$, donc $V = 0$ (puisque k est réel), mais on vient de voir que cela est impossible. La famille (U, V) est donc libre, et on peut compléter cette famille pour former une base de $\mathbb{R}^n$, identifié ici à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les deux relations $AU = -V$ et $AV = U$ montrent que A est semblable à une matrice de la forme décrite dans l'énoncé.

Une correction de l'exercice 11 *énoncé*

1. $\chi_2(X) = X(X - a_1) - a_2^2$, $\chi_3(X) = X^3 - a_1 X^2 + \left(-a_2^2 - a_3^2\right) X$.
2. Comme $a_2 \neq 0$, $\operatorname{rg}(A_n) = 2$, donc par le théorème du rang $\dim(\operatorname{Ker}(A_n)) = n - 2$, donc 0 est valeur propre de A_n pour $n \geqslant 3$ avec pour ordre de multiplicité $m_0 \geqslant n - 2$. Ainsi $(X - 0)^{n-2} = X^{n-2}$ divise χ_n.
3. Récurrence en développant selon la dernière colonne.
4.
   - Si $b_n = 0$, alors $\chi_n = X^{n-1}(X - a_1)$, donc 0 est valeur propre de A_n d'ordre $n - 1$ strictement supérieur à la dimension du sous-espace propre associé, donc A_n n'est diagonalisable.
   - Si $b_n \neq 0$, alors $X^2 - a_1 X - b_n$ est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = a_1^2 + 4b_n^2 > 0$ (car $a_2 \neq 0$), donc il admet deux racines α et β réelles distinctes, et non nulles.

     Ainsi χ_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, et les ordres de multiplicité de ses valeurs propres 0, α et β sont $n - 2$, 1 et 1, donc sont égales aux dimensions de sous-espaces propres, donc A_n est diagonalisable.

Une correction de l'exercice 12 *énoncé*

Soit $X = \binom{x}{y}$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors on a :

$$BX = \lambda X \iff \begin{cases} Ay &= \lambda x \\ x &= \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} Ay &= \lambda^2 y \\ x &= \lambda y \end{cases}$$

Ainsi, λ est valeur propre de B si et seulement si λ^2 est valeur propre de A. On a aussi prouvé ci-dessus que l'application $E_{\lambda^2}(A) \to E_\lambda(B)$ définie par

$y \mapsto \begin{pmatrix} \lambda y \\ y \end{pmatrix}$ est une bijection, et donc $\dim(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B})) = \dim(\mathrm{E}_{\lambda^2}(\mathrm{A}))$.
Puisque A est diagonalisable, on sait que

$$\sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{E}_\mathrm{A}(\mu_i)) = n,$$

où $\mu_1, \dots, \mu_p$ sont les valeurs propres de A. Si $\mu_i \neq 0$ pour tout i, chaque μ_i admet deux racines carrés complexes distinctes $\pm\lambda_i$, et on a

$$\sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{E}_\mathrm{B}(\lambda_i)) + \sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{E}_\mathrm{B}(-\lambda_i)) = 2\sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{E}_\mathrm{A}(\lambda_i^2)) = 2n,$$

et donc B est diagonalisable.
Au contraire, si $\mu_1 = 0$, alors on obtient une seule carrée, qui vaut 0, et la somme des dimensions des sous-espaces propres de B vaut

$$\dim(\mathrm{E}_1) + 2\sum_{i=2}^{p} \dim(\mathrm{E}_{\mu_i}) = 2n - \dim(\mathrm{E}_1) < 2n.$$

On en conclut que B est diagonalisable si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A.

Une correction de l'exercice 13 *énoncé*

- Supposons que u est diagonalisable, alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u.
  Soit F un sous-espace vectoriel de E, de base $(x_1, \dots, x_p)$, grâce au théorème de la base incomplète, on complète cette famille libre $(x_1, \dots, x_p)$ avec $n-p$ vecteurs pris dans la base $(e_1, \dots, e_p)$ pour obtenir une nouvelle base de E.
  On peut noter cette base $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_{n-p})$.
  Ainsi $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(y_1, ..., y_{n-p})$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F stable par u.
- Pour la réciproque
  Première méthode : par l'absurde. Supposons que u n'est pas diagona-

lisable, et trouvons un sous-espace vectoriel qui n'a pas de supplémentaire stable par u.

L'endomorphisme u n'est pas diagonalisable, donc

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

est un sous-espace vectoriel de E différent de E.

Prenons alors un supplémentaire G de F dans E, et montrons que G n'est pas stable par u.

De nouveau par l'aburde, supposons que G est stable par u, alors u induit un endomorphisme de G que l'on note u_G. Comme G est de dimension au moins 1, le polynôme caractéristique de u_G est de degré au moins 1, donc il admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$ (c'est le théorème de d'Alembert-Gauss !), et cette racine est alors une valeur propre de u_G. Il existe alors un vecteur non nul x dans G tel que $u_G(x) = \lambda x$, mais par définition de u_G, $u_G(x) = u(x)$, donc $u(x) = \lambda x$, donc λ est valeur propre de u, et $x \in E_\lambda(u)$, donc par définition de F, $x \in F$.

Avoir supposé que G est stable par u nous a donc permis de construire un vecteur non nul qui est dans $F \cap G$, ce qui contredit le fait que G est un supplémentaire de F dans E. Donc G n'est pas stable par u, et l'exercice est bouclé.

Deuxième méthode : par récurrence sur la dimension de E.

- Si $\dim(E) = 1$, quel que soit l'endomorphisme u de E, quoi que l'on suppose sur les sous-espaces vectoriels de E stables ou non, u est diagonalisable, je vous laisse vous en convaincre sans moi.
- Soit n un entier supérieur ou égal à 2, supposons que la réciproque vraie dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n-1$, et montrons qu'elle est vraie dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

  Plaçons-nous dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n, et prenons un endomorphisme u de E tel que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par u.

  Le polynôme caractéristique de u admet au moins une racine complexe (encore par le théorème de d'Alembert-Gauss), donc u admet au moins une valeur propre. Notons e_1 un de ses vecteurs propres, et $D = \mathrm{Vect}(e_1)$.

Par hypothèse, D admet un supplémentaire H stable par u, qui est donc un hyperplan de E. Le sous-espace vectoriel H est un hyperplan de E, autrement dit $\dim(\mathrm{H}) = n-1$.

Notons alors u_{H} l'endomorphisme de H induit par u, et montrons que u_{H} vérifie aussi la propriété suivante : « tout sous-espace vectoriel de H admet un supplémentaire stable par u_{H} ».

Notons aussi p la projection sur H parallèlement à la droite vectorielle D.

Soit F un sous-espace vectoriel de H.

Alors $\mathrm{D}+\mathrm{F}$ est un sous-espace vectoriel de E, donc par hypothèse sur u, il existe un sous-espace vectoriel G supplémentaire de $\mathrm{D}+\mathrm{F}$ dans E, et stable par u.

On va montrer que $p(\mathrm{G})$ est stable par u_{H}, et que c'est un supplémentaire de F dans H.

- Tout d'abord $p(\mathrm{G})$ est bien un sous-espace vectoriel de H.
- Montrons qu'il est stable par u : soit $x \in p(\mathrm{G})$ alors il existe $x_0 \in \mathrm{G}$ tel que $x = p(x_0)$.

  Par définition de p, $x - p(x_0) \in \mathrm{D} = \mathrm{Vect}(e)$, donc il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $x_0 = ae + p(x_0)$.

  En appliquant u, on obtient

  $$u(x_0) = au(e) + u(p(x_0)) = au(e) + u(x).$$

  En appliquant à présent p, on obtient

  $$p(u(x_0)) = 0_{\mathrm{E}} + p\big(u(x)\big).$$

  Mais $p(\mathrm{G}) \subset \mathrm{H}$, donc $x \in \mathrm{H}$, ainsi comme H est stable par u, on sait que $u(x) \in \mathrm{H}$, d'où $p\big(u(x)\big) = u(x)$.

  Ainsi $u(x) = p(u(x_0))$, et comme $x_0 \in \mathrm{G}$ et G est stable par u, on sait que $u(x_0) \in \mathrm{G}$, et donc $u(x)$, c'est-à-dire $p(u(x_0))$ est bien dans $p(\mathrm{G})$, C.Q.F.D.
- Montrons que $p(\mathrm{G})$ est un supplémentaire de F dans H.
  - Comme $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ et $p(\mathrm{G}) \subset \mathrm{H}$, il va sans dire que $\mathrm{F} + p(\mathrm{G}) \subset \mathrm{H}$.

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{H}$, alors G étant un supplémentaire de $\mathrm{D}+\mathrm{F}$ dans E, il existe $x_1 = b\,e + x_\mathrm{F} \in \mathrm{D}+\mathrm{F}$ et $x_\mathrm{G} \in \mathrm{G}$ tels que $x = (b\,e + x_\mathrm{F}) + x_\mathrm{G}$.

Alors d'une part $p(x) = x$ car $x \in \mathrm{H}$; et d'autre part

$$p(x) = b\,p(e) + p(x_\mathrm{F}) + p(x_\mathrm{G}) = 0_\mathrm{E} + x_\mathrm{F} + p(x_\mathrm{G}) \quad \textit{(car } x_\mathrm{F} \in \mathrm{F} \subset \mathrm{H}\textit{)},$$

donc $x \in \mathrm{F} + p(\mathrm{G})$.

On a bien établi que $\mathrm{H} = \mathrm{F} + p(\mathrm{G})$.

- Si $x \in \mathrm{F} \cap p(\mathrm{G})$, alors $x = p(x_0)$ avec $x_0 \in \mathrm{G}$, mais $x \in \mathrm{F} \subset \mathrm{H}$, donc $x = p(x)$. Ainsi $p(x) = p(x_0)$, donc $x - x_0 \in \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{D}$, d'où l'existence d'un $c \in \mathbb{C}$ tel que $x = x_0 + c\,e$.

  Mais alors $x_0 = x - c\,e$, donc $x_0 \in \mathrm{D}+\mathrm{F}$, or $x_0 \in \mathrm{G}$ et G et $\mathrm{D}+\mathrm{F}$ sont en somme directe, donc $x_0 = 0_\mathrm{E}$, puis $x = p(x_0) = 0_\mathrm{E}$, C.Q.F.D.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à u_H, qui permet de conclure que u_H est diagonalisable, autrement dit qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de H formée de vecteurs propres de u_H, qui sont aussi des vecteurs propres de E.

Dans ce cas la famille obtenue en concaténant la base (e) de D et cette base $\mathscr{B}$ de H est une base de E puisque D et H sont supplémentaires, et elle est formée de vecteurs propres de u, donc u est diagonalisable.