Questions de cours 1 *Réponses*

Compléter, ou bien cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Q1. Sachant que $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ et que $\tan\theta = -\frac{1}{2}$, quelle est la valeur de $\sin(\theta)$?

$$\sin(\theta) = \boxed{}.$$

Donner une valeur approchée *(grossière)* de θ en radians :

$$\theta \simeq \boxed{}.$$

Q2. Compléter la formule d'addition :

$$\sin(a+b) = \boxed{}.$$

Q3. ➟ Le réel $\ln(16)$ vaut :

☐ $4\ln(2)$, ☐ $4\ln(4)$, ☐ $(\ln 2)^4$, ☐ $8\ln(2)$

➟ Simplifier : $\log(0{,}2) + \log(0{,}005) = \boxed{}.$

Q4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Laquelle des fonctions suivantes n'est pas forcément paire ?

☐ $x \longmapsto f(\cos x)$, ☐ $x \longmapsto \cos(f(x))$,

☐ $x \longmapsto f(x)f(-x)$, ☐ $x \longmapsto f\left(x^2\right)$.

Q5. On suppose que f est dérivable en x_0, comment définit-on le nombre dérivé $f'(x_0)$?

$$f'(x_0) = \boxed{}.$$

Q6. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$.

1. Le domaine de définition de f est

$$\boxed{}.$$

2. Le domaine de dérivation de f est

$$\boxed{}.$$

3. L'expression de la dérivée de f est

$$f'(x) = \boxed{}.$$

Q7. Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Quelle est la dérivée de $x \longmapsto u(x^2) \times u(x)$?

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u(x^2)u(x)] = \boxed{}.$$

Questions de cours 2 *Réponses*

Compléter, ou bien cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Q1. Quelle est la valeur de $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$?

$\square\ \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$, $\square\ \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$, $\square\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\square\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Q2. Donner une valeur approchée grossière en radians de $\theta \in \left[-\pi\ ;\ -\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\tan(\theta) = \frac{1}{2}$:

$$\theta \simeq \boxed{}.$$

Q3. Exprimer $\tan(2x)$ en fonction de $\tan x$:

$$\tan(2x) = \boxed{}.$$

Q4. Exprimer le nombre $\ln\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$;

$$\ln\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right) = \boxed{}.$$

Q5. Laquelle des expresssions ci-dessous est-elle égale à $\left(e^{2+n}\right)^p$?

$\square\ (e^n)^{p+2}$, $\square\ e^{n(p+2)}$, $\square\ e^{p(n+2)}$, $\square\ \left(e^{2p}\right)^n$,

Q6. Soit f une fonction décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle fonction n'est pas forcément croissante ?

$\square\ x \longmapsto f \circ f(x)$, $\square\ x \longmapsto -f(x)$,

$\square\ x \longmapsto f(-x)$, $\square\ x \longmapsto f\left(x^2\right)$

Q7. On suppose que f est dérivable en x_0, comment définit-on le nombre dérivé $f'(x_0)$?

$$f'(x_0) = \boxed{}.$$

Q8. On considère la fonction $x \mapsto \tan(2x+1)$.

1. Le domaine de définition de f est

$$\boxed{}.$$

2. Le domaine de dérivation de f est

$$\boxed{}.$$

3. L'expression de la dérivée de f est

$$f'(x) = \boxed{}.$$

Q9. Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Quelle est la dérivée de $x \longmapsto u(x^4)$?

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[u\left(x^4\right)\right] = \boxed{}.$$

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|3-2x| \geqslant 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|4x+1| < 2$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{1}{1-x} > \frac{2x+1}{x-2}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^{3x+2} \leqslant \mathrm{e}^{x-1}$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1-2\sin^2(x-1)=0$.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin\left((x-1)^2\right)=1$.
7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin^2(3x+1)=\frac{1}{2}$.
8. Dérivabilité et dérivée de la fonction $x \mapsto x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
9. Dérivabilité et dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
10. Donner un majorant sur $]0\,;\,1]$ de la fonction $x \mapsto |x\ln(x)|$.
11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que la fonction $f_n : x \mapsto n\,x^3+n^2\,x-2$ s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un réel noté a_n.
    Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroissante.
12. (a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est dérivable sur $[0\,;\,1[$, et donner l'expression de sa dérivée.
    (b) Pour tout $x \in [0\,;\,1[$, donner une égalité liant $f'(x)$ et $f(x)$.
    (c) En déduire que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0\,;\,1[$.
    (d) Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
13. Justifier pour tout réel x, les inégalités
$$1-\frac{1}{2}x^2 \leqslant \cos(x) \leqslant 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4.$$
14. Pour tous entiers $n,p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$, étudier $\frac{x^n-a^n}{x^p-a^p}$ quand x tend vers a.
15. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-4x+6}{x-2}$
    (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
    (b) Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.
    (c) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

(d) Pour tout réel x de l'ensemble de définition de f , établir une relation entre $f(-2-4)$ et $f(x)$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un centre de symétrie que l'on précisera.

(e) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

Réponses aux questions de cours

questions

1. Sachant que $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ et que $\tan\theta = -\frac{1}{2}$, quelle est la valeur de $\sin(\theta)$?

$$\sin(\theta) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

Donner une valeur approchée *(grossière)* de θ en radians :

$$\theta \simeq \boxed{-2{,}7}.$$

2. Compléter la formule d'addition :

$$\sin(a+b) = \boxed{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}.$$

3. ➟ Le réel $\ln(16)$ vaut :

☑ $4\ln(2)$, ☐ $4\ln(4)$, ☐ $(\ln 2)^4$, ☐ $8\ln(2)$

➟ Simplifier : $\log(0{,}2) + \log(0{,}005) = \boxed{\log(0{,}001) = -3}$.

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Laquelle des fonctions suivantes n'est pas forcément paire ?

☐ $x \longmapsto f(\cos x)$, ☑ $x \longmapsto \cos(f(x))$,

☐ $x \longmapsto f(x)f(-x)$, ☐ $x \longmapsto f\left(x^2\right)$.

5. On suppose que f est dérivable en x_0, comment définit-on le nombre dérivé $f'(x_0)$?

$$f'(x_0) = \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}.$$

6. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$.
   (a) Le domaine de définition de f est
   $$\boxed{\text{la réunion des intervalles } \left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right] \text{ pour } k\in\mathbb{Z}}.$$
   (b) Le domaine de dérivation de f est
   $$\boxed{\text{la réunion des intervalles } \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\text{ pour } k\in\mathbb{Z}}.$$
   (c) L'expression de la dérivée de f est
   $$f'(x) = \boxed{-\frac{\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}}.$$
7. Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Quelle est la dérivée de $x \longmapsto u(x^2)\times u(x)$?
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u(x^2)u(x)] = \boxed{2xu'(x^2)\times u(x)+u(x^2)\times u'(x)}.$$

Réponses aux questions de cours

questions

1. Quelle est la valeur de $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$?

   ☑ $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$, ☐ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$, ☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ☐ $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.

   On l'obtient grâce à $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$.
2. Donner une valeur approchée grossière en radians de $\theta \in \left[-\pi\ ;\ -\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\tan(\theta) = \frac{1}{2}$:
   $$\theta \simeq \boxed{-\frac{8\pi}{7} \simeq -3{,}6}.$$
3. Exprimer $\tan(2x)$ en fonction de $\tan x$:
   $$\tan(2x) = \boxed{\frac{\tan(x)}{1-\tan^2(x)}}.$$

4. Exprimer le nombre $\ln\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$;

$$\ln\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right) = \boxed{\frac{1}{5}\left(\ln(3) - 2\ln(2)\right)}.$$

5. Laquelle des expresssions ci-dessous est-elle égale à $\left(\mathrm{e}^{2+n}\right)^p$?

☐ $(\mathrm{e}^n)^{p+2}$, ☐ $\mathrm{e}^{n(p+2)}$, ☑ $\mathrm{e}^{p(n+2)}$, ☐ $\left(\mathrm{e}^{2p}\right)^n$,

6. Soit f une fonction décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle fonction n'est pas forcément croissante ?

☐ $x \longmapsto f \circ f(x)$, ☐ $x \longmapsto -f(x)$,

☐ $x \longmapsto f(-x)$, ☑ $x \longmapsto f\left(x^2\right)$

7. On suppose que f est dérivable en x_0, comment définit-on le nombre dérivé $f'(x_0)$?

$$f'(x_0) = \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}.$$

8. On considère la fonction $x \mapsto \tan(2x+1)$.
   (a) Le domaine de définition de f est

$$\boxed{\text{la réunion des intervalles } \left]-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+k\pi\ ;\ \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+k\pi\right[, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}}.$$

   (b) Le domaine de dérivation de f est

$$\boxed{\text{le même que le domaine de définition}}.$$

   (c) L'expression de la dérivée de f est

$$f'(x) = \boxed{\frac{2}{\cos^2(2x+1)}}.$$

9. Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Quelle est la dérivée de $x \longmapsto u(x^4)$?

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[u\left(x^4\right)\right] = \boxed{4x^3 \times u'(x^4)}.$$