Questions de cours 1

Réponses

Compléter, ou bien cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Q1. $\sin(a+b) = \boxed{}$,

$\cos(a+b) = \boxed{}$.

Q2. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = ?$ $\square$ $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$, $\square$ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$, $\square$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\square$ $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Q3. Donner une valeur approchée grossière en radians de $\theta \in \left[-\pi\ ;\ -\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\tan(\theta) = \frac{1}{2}$:

$\theta \simeq \boxed{}$.

Q4. Exprimer le nombre $\ln\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$;

$$\ln\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right) = \boxed{}.$$

Q5. Soit f une fonction décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle fonction n'est pas forcément croissante ?

$\square$ $x \longmapsto f \circ f(x)$, $\square$ $x \longmapsto -f(x)$,

$\square$ $x \longmapsto f(-x)$, $\square$ $x \longmapsto f\left(x^2\right)$

Q6. On suppose que f est dérivable en x_0, comment définit-on le nombre dérivé $f'(x_0)$?

$$f'(x_0) = \boxed{}.$$

Q7. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\tan(2x)}$.

1. f est dérivable sur : $\mathscr{D} = \boxed{}$.

2. $\forall x \in \mathscr{D},\ f'(x) = \boxed{}$.

Q8. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer sans signe somme

$$\sum_{i=0}^{2n-1} i^2 = \boxed{}.$$

2. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, que vaut $\sum_{i=p}^{p+q} 2^i$?

☐ $2^p - 2^{p+q+1}$,

☐ $\dfrac{p \times (p+q) \times (p+q+1)}{6}$,

☐ $1 - 2^{p+q}$,

☐ $\dfrac{p^2 \times (p+q)^2}{4}$.

3. Écrire de deux manières différentes comme une double-somme :

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} u_{k,\ell} = \boxed{} = \boxed{}.$$

4. Écrire de deux manières différentes comme une double-somme :

$$\sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} u_{k,\ell} = \boxed{} = \boxed{}.$$

Colles de la semaine 2. Nom et prénom ?

Exercice 1

Donner le maximum sur $]0\ ;\ 1]$ de la fonction $x \mapsto |x \ln(x)|$.

Exercice 2

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est dérivable sur $[0\ ;\ 1[$, et donner l'expression de sa dérivée.
2. Pour tout $x \in [0\ ;\ 1[$, donner une égalité liant $f'(x)$ et $f(x)$.
3. En déduire que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0\ ;\ 1[$.
4. Déterminer $f^{(n)}(0)$, aussi notée $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que la fonction $f_n : x \mapsto n x^3 + n^2 x - 2$ s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un réel noté a_n.
Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroissante.

Exercice 4

Justifier pour tout réel $x \in]-\pi/2\ ;\ \pi/2[$, l'inégalité

$$\cos(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

Exercice 5

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$, étudier $\dfrac{x^n - a^n}{x^p - a^p}$ quand x tend vers a.

Exercice 6

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}(-1)^k 2^{n-k}$.

Exercice 7

Montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et à l'aide de la formule du binôme, en déduire le calcul de la somme

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}2^k.$$

Exercice 8

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n} \frac{\ell}{k(k-1)}$.

Exercice 9

1. Déterminer trois réels a, b et c qui vérifient pour entier $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}.$$

2. En déduire pour tout $n \geqslant 2$ la valeur de la somme :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$$

Exercice 10

Soit n un entier naturel, calculer la somme $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant p\leqslant n} \binom{p}{k}3^k$.

Exercice 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier l'expression $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}\right)$.

Exercice 12

1. En développant $(2k-1)^3$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

2. Retrouver ce résultat en déterminant auparavant la valeur des sommes $\sum_{k=0}^{2n} k^3$ et $\sum_{k=0}^{n}(2k)^3$.

Réponses aux questions de cours

questions

Q 1. $\sin(a+b) = \boxed{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}$,

$\cos(a+b) = \boxed{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$.

Q 2. Quelle est la valeur de $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$?

☑ $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$, ☐ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$, ☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ☐ $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.

On l'obtient grâce à $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$.

Q 3. Donner une valeur approchée grossière en radians de $\theta \in \left[-\pi\ ;\ -\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\tan(\theta) = \frac{1}{2}$:

$$\theta \simeq \boxed{-\frac{6\pi}{7} \simeq -2{,}7}.$$

Q 4. Exprimer le nombre $\ln\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$;

$$\ln\left(\sqrt[5]{\frac{3}{4}}\right) = \boxed{\frac{1}{5}(\ln(3)-2\ln(2))}.$$

Q 5. Soit f une fonction décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle fonction n'est pas forcément croissante ?

☐ $x \longmapsto f\circ f(x)$, ☐ $x \longmapsto -f(x)$,

☐ $x \longmapsto f(-x)$, ☑ $x \longmapsto f\left(x^2\right)$

Q 6. On suppose que f est dérivable en x_0, comment définit-on le nombre dérivé $f'(x_0)$?

$$f'(x_0) = \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}.$$

Q 7. On considère la fonction $x \mapsto \frac{1}{\tan(2x)}$.

1. f est dérivable sur : $\mathscr{D} = \boxed{\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{4}\right\}}$.
2. L'expression de la dérivée de f est

$$f'(x) = \boxed{\frac{-2}{\sin^2(2x)}}.$$

Q 8. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer sans signe somme

$$\sum_{i=0}^{2n-1} i^2 = \boxed{\frac{(2n-1)(2n)(4n-1)}{6}}.$$

2. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, que vaut $\sum_{i=p}^{p+q} 2^i$?

☑ $2^p - 2^{p+q+1}$,

☐ $\dfrac{p \times (p+q) \times (p+q+1)}{6}$,

☐ $1 - 2^{p+q}$,

☐ $\dfrac{p^2 \times (p+q)^2}{4}$.

3. Écrire de deux manières différentes comme une double-somme :

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} u_{k,\ell} = \boxed{\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=k}^{n} u_{k,\ell}} = \boxed{\sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} u_{k,\ell}}.$$

4. Écrire de deux manières différentes comme une double-somme :

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} u_{k,\ell} = \boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=k+1}^{n} u_{k,\ell}} = \boxed{\sum_{\ell=2}^{n} \sum_{k=1}^{\ell-1} u_{k,\ell}}.$$

Une correction de l'exercice 1

énoncé

Le meilleur moyen de trouver le maximum d'une fonction est de connaître sa courbe, ou à défaut de courbe, de connaître son tableau de variations qui n'est autre qu'une esquisse grossière de sa courbe… Et le plus simple pour étudier les variations d'une fonction est de connaître le signe de sa dérivée, à condition qu'elle soit dérivable, ce qui n'est pas le cas de la valeur absolue en 0 !

La fonction $u : x \mapsto x \ln(x)$ est dérivable sur $]0\ ;\ 1]$, de dérivée

$$u' : x \mapsto x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln(x) = 1 + \ln(x).$$

Or le logarithme est croissant donc u' aussi, et on remarque que $u'(\mathrm{e}^{-1}) = 0$, d'où le tableau

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}^{-1}}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	0

Ainsi la fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est négative sur $]0\,;\,1]$, avec pour minimum $-\frac{1}{\mathrm{e}}$, donc on en déduit que la fonction $x \mapsto |x\ln(x)|$ admet pour maximum $\frac{1}{\mathrm{e}}$ sur $]0\,;\,1]$.

Une correction de l'exercice 2

énoncé

1. la fonction $u : x \mapsto 1-x^2 = (1-x)(1+x)$ est dérivable sur $[0\,;\,1[$, à valeurs dans $]0\,;\,+\infty[$; et $\square \mapsto \sqrt{\square}$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, donc $f = \sqrt{} \circ u$ est dérivable sur $[0\,;\,1[$, de dérivée :
$$f' : x \mapsto \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$
2. On remarque que pour tout $x \in [0\,;\,1[$,
$$f'(x) = -x \times f(x).$$
3. On sait déjà que f est dérivable sur $[0\,;\,1[$.
Supposons que f est n fois dérivable pour $n \in \mathbb{N}^*$, or $v : x \mapsto -x$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc a fortiori n fois dérivable : ainsi $f' = v \times f$ est aussi n fois dérivable sur $[0\,;\,1[$, autrement dit que f est $n+1$ fois dérivable sur $[0\,;\,1[$.
On a prouvé par récurrence que f est n fois dérivable sur $[0\,;\,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0\,;\,1[$.

Une correction de l'exercice 6 *énoncé*

Le « $n-1$ » de $\binom{n-1}{k-1}$ est le seul élément de la somme que l'on ne pourra pas changer, le reste pouvant varier au gré des changements d'indice ou des rajouts ou retraits de termes de la somme. C'est donc lui qui nous dit qu'il faut tenter de faire apparaître la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{(n-1)-k} = (a+b)^{n-1}$$

avec, après observation, $a=-1$ et $b=2$.
Je vous fait aussi remarquer que la première manipulation à faire est le changement d'indice (s'il doit être fait), car celui modifie les bornes de la somme et annihile les modifications qu'on aura eu la mauvaise idée de faire auparavant.

Posons $k' = k-1$, autrement dit $k = k'+1$, dans la somme

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (-1)^k 2^{n-k}} &= \sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'} (-1)^{k'+1} 2^{n-(k'+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{k+1} 2^{n-(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1) \times (-1)^k 2^{(n-1)-k} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k 2^{(n-1)-k} \\
&= -(-1+2)^{n-1} \\
&\boxed{= -1}.
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 7 *énoncé*

Grâce à la formule définissant les coefficients du binôme,

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k}{k!} \times \frac{n!}{(n-k)!} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!} \times \frac{n!}{(n-k)!} & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$n\binom{n-1}{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } k=0, \\ n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} = \frac{n\times(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n \end{cases}$$

donc on obtient bien l'égalité demandée.
Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}2^k &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}2^k \quad \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= n\sum_{j=0}^{n-1} n\binom{n-1}{j}2^{j+1} \quad \textit{(en factorisant par } n\textit{, puis en posant } j=k-1\textit{)} \\ &= 2n\sum_{j=0}^{n-1} n\binom{n-1}{j}2^{j} \times 1^{n-1-j} \\ &= 2n(2+1)^{n-1} \quad \textit{(grâce à la formule du binôme)} \\ &= 2n \times 3^{n-1}. \end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 8 *énoncé*

Les deux écritures ci-dessous sont possibles

$$\sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n} \frac{\ell}{k(k-1)} = \sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=\ell+1}^{n} \frac{\ell}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{\ell}{k(k-1)}$$

Dans la deuxième écriture on reconnaît

$$\sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{\ell}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)} \sum_{\ell=1}^{k-1} \ell = \frac{1}{k(k-1)} \times \frac{(k-1)k}{2} = \frac{1}{2}$$

donc

$$\sum_{1 \leqslant \ell < k \leqslant n} \frac{\ell}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2} = (n-2+1) \times \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}$$

Une correction de l'exercice 9

énoncé

1. Soient a, b et c trois réels, alors pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1} = \frac{(a+b+c)k^2 + (a-c)k - b}{(k-1)k(k+1)}$$

donc l'égalité

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$$

est vraie pour tout entier $k \geqslant 2$ lorsque

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \\ -b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Par conséquent pour tout $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1/2}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1/2}{k+1}$$

2. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1/2}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1/2}{k+1}\right) = \sum_{k=2}^{n}\frac{1/2}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1/2}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1/2}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+1}\frac{1/2}{k}$$ *(on pose $k' = k-1$ dans la première somme, et $k' = k+1$ dans la troisième somme)*

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n-1}\frac{1/2}{k}\right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right) + \left(\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1/2}{k} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)}\right)$$

(on isole dans chaque somme les termes qui ne sont pas commun aux trois sommes)

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} + \sum_{k=3}^{n-1}\underbrace{\left(\frac{1/2}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1/2}{k}\right)}_{=0} = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.}$$

Une correction de l'exercice 10 *énoncé*

➠

➠ Les deux écritures ci-dessous sont possibles

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant p\leqslant n}\binom{p}{k}3^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n}\binom{p}{k}3^k = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}3^k$$

> *Rappelons que la recette (dans le cas où il y a une inégalité entre les indic les bornes de la première somme les valeurs minimales et maximales de l faire apparaître l'autre indice, et que l'indice de la première somme appar dans les bornes de la deuxième somme.*

On reconnaît (éventuellement après s'être perdu dans les méandres de la première écriture) dans la deuxième écriture la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}3^k = (3+1)^p = 4^p$$

donc

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant p\leqslant n}\binom{p}{k}3^k=\sum_{p=0}^{n}4^p=\frac{1-4^{n+1}}{1-4}=\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)$$

Une correction de l'exercice 11

énoncé

Soit n un entier strictement positif :

$$\mathrm{P}_n=\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k+1}}\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k+1}}$$ *(en utilisant la relation du triangle de Pascal)*

$$=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(n+1)!\,(n-k-1)!\,(k+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!\,n!}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{n+1}{n-k}$$ *(en simplifiant les factorielles)*

$$=\frac{n+1}{n}\times\frac{n+1}{n-1}\times\cdots\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+1}{1}=\frac{(n+1)^n}{n!}$$

on obtient donc $\boxed{\mathrm{P}_n=\frac{(n+1)^n}{n!}}$.

Une correction de l'exercice 12

énoncé

1. La formule du binôme nous donne pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$(2k-1)^3=(2k)^3-3(2k)^2+3(2k)-1=8k^3-12k^2+6k-1$$

donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3&=\sum_{k=1}^{n}(8k^3-12k^2+6k-1)=8\sum_{k=1}^{n}k^3-12\sum_{k=1}^{n}k^2+6\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\\&=8\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}-12\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+6\times\frac{n(n+1)}{2}-n\\&=2n^2(n+1)^2-2n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)-n\\&=2n^4-n^2=n^2(2n^2-1)\end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{2n} k^3 = \frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4} = n^2(2n+1)^2,$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} (2k)^3 = 8\sum_{k=0}^{n} k^3 = 8 \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = 2n^2(n+1)^2.$$

Mais il nous suffit de constater qu'en ajoutant les $(2k)^3$ pour k allant de 0 à $2n$, ainsi que les $(2k-1)^3$ pour k allant de 1 à n, on a additionné tous les cubes des entiers compris entre 0 et $2n$. Mathématiquement parlant, on a l'égalité

$$\sum_{k=0}^{2n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 + \sum_{k=0}^{n} (2k)^3$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 &= \sum_{k=0}^{2n} k^3 - \sum_{k=0}^{n} (2k)^3 = n^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 \\ &= n^2(4n^2+4n+1-2(n^2+2n+1)) = n^2(2n^2-1)\end{aligned}$$