Questions de cours 1

Réponses

Compléter.

Q1. 1. $|x-5|<3 \iff x \in \boxed{}$

2. Inégalité triangulaire : pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$|a+b| \leqslant \boxed{}, \qquad |a-b| \leqslant \boxed{}.$$

Q2. 1. La formule du binôme :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{C}^2,\ \ \forall q\in\mathbb{N},\ \ (x+y)^q = \boxed{}.$$

2. L'identité de Bernoulli :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{C}^2,\ \ \forall q\in\mathbb{N},\ \ x^q-y^q = \boxed{}.$$

3. Réindexation :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=\boxed{}}^{\boxed{}} u_{i+1} = \sum_{i=\boxed{}}^{\boxed{}} u_{i-1} = \sum_{i=\boxed{}}^{\boxed{}} u_{n-i}.$$

4. Pour tout $r\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{j=1}^{r+1} j = \boxed{}, \quad \sum_{j=1}^{r} j^2 = \boxed{}, \quad \sum_{j=1}^{r-1} j^3 = \boxed{}.$$

5. Pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{i=0}^{2p+1} x^i = \boxed{\qquad\qquad}.$$

6. Écrire de deux manières différentes comme une double-somme :

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} u_{k,\ell} = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad},$$

$$\sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} u_{k,\ell} = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}.$$

Q3. 1. Écrire sous forme algébrique :

$$(1-2i)^3 = \boxed{\qquad\qquad}, \quad \frac{1}{4+3i} = \boxed{\qquad\qquad}.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$, donner deux conditions nécessaires et suffisantes pour que z soit un réel, dont une faisant intervenir $\overline{z}$:

$$z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow \boxed{\qquad\qquad} \Longleftrightarrow \boxed{\qquad\qquad}.$$

3. Formules d'Euler de de Moivre :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \boxed{\qquad\qquad}, \quad \sin(\theta) = \boxed{\qquad\qquad},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \boxed{\qquad\qquad} + i\,\boxed{\qquad\qquad}.$$

Exercice 1

Soit $m \in \mathbb{R}$, calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe

$$z = \frac{1+im}{2m+i(m^2-1)}.$$

Exercice 2

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$, étudier $\dfrac{x^n - a^n}{x^p - a^p}$ quand x tend vers a.

Exercice 3

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (-1)^k 2^{n-k}$.

Exercice 4

Montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et à l'aide de la formule du binôme, en déduire le calcul de la somme

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} 2^k.$$

Exercice 5

Calculer la somme

$$\sum_{1 \leqslant \ell < k \leqslant n} \frac{\ell}{k(k-1)}.$$

Exercice 6

1. Déterminer trois réels a, b et c qui vérifient pour entier $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}.$$

2. En déduire pour tout $n \geqslant 2$ la valeur de la somme :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$$

Exercice 7

Soit n un entier naturel, calculer la somme

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n} \binom{p}{k} 3^k.$$

Exercice 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier l'expression

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}\right).$$

Exercice 9

1. En développant $(2k-1)^3$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

2. Retrouver ce résultat en déterminant auparavant la valeur des sommes $\sum_{k=0}^{2n} k^3$ et $\sum_{k=0}^{n} (2k)^3$.

Réponses aux questions de cours *questions*

Q 1. 1. *(/2)* $|x-5|<3 \iff x \in \boxed{\,]2\,;\,8[\,}$.

2. Inégalité triangulaire : pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,
(/4) $|a+b| \leqslant \boxed{|a|+|b|}$, $\quad |a-b| \leqslant \boxed{|a|+|b|}$.

Q 2. 1. *(/2)* La formule du binôme :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{C}^2,\ \ \forall q\in\mathbb{N},\ \ (x+y)^q = \boxed{\sum_{i=0}^{q}\binom{q}{i}x^i y^{q-i}}.$$

2. *(/2)* L'identité de Bernoulli :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{C}^2,\ \ \forall q\in\mathbb{N},\ \ x^q-y^q = \boxed{(x-y)\sum_{i=0}^{q-1}x^i y^{q-1-i}}.$$

3. *(/6)* Réindexation :

$$\sum_{i=1}^{n}u_i = \sum_{i=\boxed{0}}^{\boxed{n-1}}u_{i+1} = \sum_{i=\boxed{2}}^{\boxed{n+1}}u_{i-1} = \sum_{i=\boxed{0}}^{\boxed{n-1}}u_{n-i}.$$

4. *(/6)* Pour tout $r\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{j=1}^{r+1}j = \boxed{\frac{(r+1)(r+2)}{2}},\quad \sum_{j=1}^{r}j^2 = \boxed{\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}},\quad \sum_{j=1}^{r-1}j^3 = \boxed{\left(\frac{(r-1)r}{2}\right)^2}.$$

5. *(/2)* Pour tous $p\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$,

$$\sum_{i=0}^{2p+1}x^i = \boxed{\frac{1-x^{2p+2}}{1-x}}.$$

6. *(/8)* Écrire de deux manières différentes comme une double-somme :

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n}u_{k,\ell} = \boxed{\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=k}^{n}u_{k,\ell}} = \boxed{\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell}u_{k,\ell}}.$$

$$\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} u_{k,\ell} = \boxed{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=k+1}^{n} u_{k,\ell}} = \boxed{\sum_{\ell=2}^{n}\sum_{k=1}^{\ell-1} u_{k,\ell}}.$$

Q 3. 1. Écrire sous forme algébrique :

$$(1-2i)^3 = \boxed{-11+2i}, \qquad \frac{1}{4+3i} = \boxed{\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i}.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$, donner deux conditions nécessaires et suffisantes pour que z soit un réel, dont une faisant intervenir $\overline{z}$:

$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \boxed{\mathbb{I}\mathrm{m}(z) = 0} \Longleftrightarrow \boxed{\overline{z} = z}.$$

3. Formules d'Euler de de Moivre :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \boxed{\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}, \quad \sin(\theta) = \boxed{\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \boxed{\cos(n\theta)} + i\,\boxed{\sin(n\theta)}.$$

Une correction de l'exercice 1

énoncé

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1+im}{2m+i(m^2-1)} \times \frac{2m-i(m^2-1)}{2m-i(m^2-1)} \\
&= \frac{(1+im)(2m-i(m^2-1)}{(2m)^2+(m^2-1)^2} \\
&= \frac{2m+m(m^2-1)+i\left(2m^2-m^2+1\right)}{4m^2+m^4-2m^2+1} \\
&= \frac{m(m^2+1)+i\left(m^2+1\right)}{m^4+2m^2+1} \\
&= \frac{(m+i)(m^2+1)}{\left(m^2+1\right)^2} = \frac{m+i}{m^2+1} \\
&= \frac{m}{m^2+1} + \frac{1}{m^2+1}i,
\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{R}\mathrm{e}(z) = \frac{m}{m^2+1} \text{ et } \mathbb{I}\mathrm{m}(z) = \frac{1}{m^2+1}.$$

Une correction de l'exercice 2

énoncé

Par définition de la dérivée :

> *f est dérivable en a lorsque $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limité finie quand x tend vers a, et dans ce cas $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.*

$$\begin{aligned}
\frac{x^n - a^n}{x^p - a^p} &= \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \quad \textit{(en notant } f:\square\mapsto\square^n \textit{ et } g:\square\mapsto\square^p\textit{)} \\
&= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \frac{1}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \\
&\xrightarrow[x\longrightarrow a]{} f'(a) \times \frac{1}{g'(a)} \quad \textit{(car } f \textit{ et } g \textit{ sont dérivables sur } \mathbb{R}\textit{, donc en } a\textit{, et } g'(a) = pa^{p-1} \neq 0\textit{)} \\
&= \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{na^{n-1}}{pa^{p-1}} = \frac{n}{p}a^{n-p}.
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 3

énoncé

Le « $n-1$ » de $\binom{n-1}{k-1}$ est le seul élément de la somme que l'on ne pourra pas changer, le reste pouvant varier au gré des changements d'indice ou des rajouts ou retraits de termes de la somme. C'est donc lui qui nous dit qu'il faut tenter de faire apparaître la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{(n-1)-k} = (a+b)^{n-1}$$

avec, après observation, $a = -1$ et $b = 2$.
Je vous fait aussi remarquer que la première manipulation à faire est le changement d'indice (s'il doit être fait), car celui modifie les bornes de la somme et annihile les modifications qu'on aura eu la mauvaise idée de faire auparavant.

Posons $k' = k-1$, autrement dit $k = k'+1$, dans la somme

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (-1)^k 2^{n-k}} &= \sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'} (-1)^{k'+1} 2^{n-(k'+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{k+1} 2^{n-(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1) \times (-1)^k 2^{(n-1)-k} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k 2^{(n-1)-k} \\
&= -(-1+2)^{n-1} \\
&\boxed{= -1}.
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 4 *énoncé*

Grâce à la formule définissant les coefficients du binôme,

$$\begin{aligned}
k\binom{n}{k} &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k}{k!} \times \frac{n!}{(n-k)!} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!} \times \frac{n!}{(n-k)!} & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}
\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$n\binom{n-1}{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, \\ n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} = \frac{n\times(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n \end{cases}$$

donc on obtient bien l'égalité demandée.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}2^k &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}2^k \quad \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= n\sum_{j=0}^{n-1} n\binom{n-1}{j}2^{j+1} \quad \textit{(en factorisant par } n\textit{, puis en posant } j=k-1\textit{)} \\
&= 2n\sum_{j=0}^{n-1} n\binom{n-1}{j}2^{j}\times 1^{n-1-j} \\
&= 2n(2+1)^{n-1} \quad \textit{(grâce à la formule du binôme)} \\
&= 2n\times 3^{n-1}.
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 5 *énoncé*

Les deux écritures ci-dessous sont possibles

$$\sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n} \frac{\ell}{k(k-1)} = \sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=\ell+1}^{n} \frac{\ell}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n}\sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{\ell}{k(k-1)}$$

Dans la deuxième écriture on reconnaît

$$\sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{\ell}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}\sum_{\ell=1}^{k-1}\ell = \frac{1}{k(k-1)}\times\frac{(k-1)k}{2} = \frac{1}{2}$$

donc

$$\sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n} \frac{\ell}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2} = (n-2+1)\times\frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}$$

Une correction de l'exercice 6 *énoncé*

1. Soient a, b et c trois réels, alors pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\frac{a}{k-1}+\frac{b}{k}+\frac{c}{k+1} = \frac{(a+b+c)k^2+(a-c)k-b}{(k-1)k(k+1)}$$

donc l'égalité

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$$

est vraie pour tout entier $k \geqslant 2$ lorsque

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \\ -b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Par conséquent pour tout $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1/2}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1/2}{k+1}$$

2. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1/2}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1/2}{k+1}\right) = \sum_{k=2}^{n}\frac{1/2}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1/2}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1/2}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+1}\frac{1/2}{k}$$ *(on pose $k' = k-1$ dans la première somme, et $k' = k+1$ dans la troisième somme)*

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n-1}\frac{1/2}{k}\right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right) + \left(\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1/2}{k} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)}\right)$$

(on isole dans chaque somme les termes qui ne sont pas commun aux trois sommes)

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} + \sum_{k=3}^{n-1}\underbrace{\left(\frac{1/2}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1/2}{k}\right)}_{=0} = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.}$$

Une correction de l'exercice 7 *énoncé*

➟ Les deux écritures ci-dessous sont possibles

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant p\leqslant n}\binom{p}{k}3^k=\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n}\binom{p}{k}3^k=\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}3^k$$

> *Rappelons que la recette (dans le cas où il y a une inégalité entre les indices) est de mettre dans les bornes de la première somme les valeurs minimales et maximales de l'indice concerné, sans faire apparaître l'autre indice, et que l'indice de la première somme apparaisse convenablement dans les bornes de la deuxième somme.*

On reconnaît (éventuellement après s'être perdu dans les méandres de la première écriture) dans la deuxième écriture la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}3^k=(3+1)^p=4^p$$

donc

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant p\leqslant n}\binom{p}{k}3^k=\sum_{p=0}^{n}4^p=\frac{1-4^{n+1}}{1-4}=\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)$$

Une correction de l'exercice 8 *énoncé*

Soit n un entier strictement positif :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n&=\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k+1}}\right)\\
&=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k+1}} \quad \textit{(en utilisant la relation du triangle de Pascal)}\\
&=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(n+1)!\,(n-k-1)!\,(k+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!\,n!}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{n+1}{n-k} \quad \textit{(en simplifiant les factorielles)}\\
&=\frac{n+1}{n}\times\frac{n+1}{n-1}\times\cdots\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+1}{1}=\frac{(n+1)^n}{n!}
\end{aligned}$$

on obtient donc $\boxed{P_n = \frac{(n+1)^n}{n!}}$.

Une correction de l'exercice 9 *énoncé*

1. La formule du binôme nous donne pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(2k-1)^3 = (2k)^3 - 3(2k)^2 + 3(2k) - 1 = 8k^3 - 12k^2 + 6k - 1$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 &= \sum_{k=1}^{n}(8k^3 - 12k^2 + 6k - 1) \\
&= 8\sum_{k=1}^{n}k^3 - 12\sum_{k=1}^{n}k^2 + 6\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1 \\
&= 8 \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 12 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6 \times \frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= 2n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) - n \\
&= 2n^4 - n^2 = n^2(2n^2-1).
\end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{2n}k^3 = \frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4} = n^2(2n+1)^2,$$

et

$$\sum_{k=0}^{n}(2k)^3 = 8\sum_{k=0}^{n}k^3 = 8 \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = 2n^2(n+1)^2.$$

Mais il nous suffit de constater qu'en ajoutant les $(2k)^3$ pour k allant de 0 à $2n$, ainsi que les $(2k-1)^3$ pour k allant de 1 à n, on a additionné tous les cubes des entiers compris entre 0 et $2n$. Mathématiquement parlant, on a l'égalité

$$\sum_{k=0}^{2n}k^3 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 + \sum_{k=0}^{n}(2k)^3$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = \sum_{k=0}^{2n}k^3 - \sum_{k=0}^{n}(2k)^3 &= n^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 \\ &= n^2(4n^2+4n+1-2(n^2+2n+1)) = n^2(2n^2-1)\end{aligned}$$