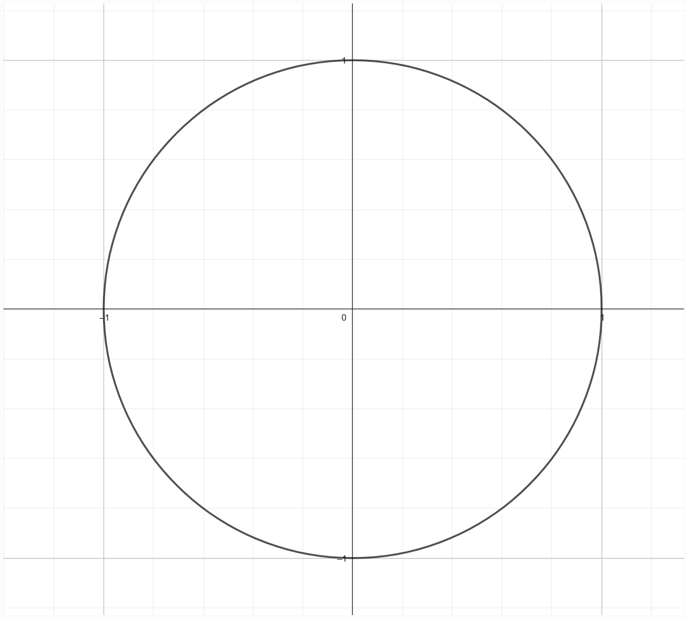
Colles de la semaine 5. Nom et prénom ?

Questions de cours 1 – (C) = questions de cours, (A) = applications *Réponses*

Compléter, ou bien cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Q1. **(C)** $\forall z \in \mathbb{C}^*, \ \ |z| = 1 \Longleftrightarrow \overline{z} = \boxed{\quad\quad} \Longleftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = \boxed{\quad\quad}$.

Q2. **(A)** Placer dans le dessin ci-dessous les nombres $e^{i\,\frac{47\pi}{4}}$, $e^{-i\,\frac{15\pi}{7}}$, i^{-22}, et j^{85} :



Q3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, **(C)** $z^n = 1 \Longleftrightarrow \ \exists k \in \boxed{\quad\quad}$ tel que $z = \boxed{\quad\quad}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$, **(A)** $z^n = \alpha^n \Longleftrightarrow \ \exists k \in \boxed{\quad\quad}$ tel que $z = \boxed{\quad\quad}$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

(A) $z^3 = -1 \Longleftrightarrow z \in \left\{ \boxed{\quad\quad\quad\quad} \right\}$;

(A) $z^4 = i \Longleftrightarrow z \in \left\{ \boxed{\quad\quad\quad\quad} \right\}$.

Questions de cours *Réponses*

Q4. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, à l'aide de la technique de « l'argument-moitié » écrire les nombres complexes suivants sous forme $x \times e^{i\theta}$, avec $(x,\theta) \in \mathbb{R}^2$:

(A) $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = \boxed{\quad} \times e^{i\boxed{\quad}}$; **(A)** $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = \boxed{\quad} \times e^{i\boxed{\quad}}$.

Q5. **(A)** Compléter ci-dessous la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$2x^2 - (3+i)x + 2 = 0 \iff x \in \left\{ \boxed{\quad}, \boxed{\quad} \right\}$$

car le discriminant de $2X^2 - (3+i)X + 2$ est

$$\Delta = \boxed{\quad} = \left(\boxed{\quad} \right)^2.$$

Q6. Compléter ch : $x \mapsto \boxed{\quad}$, sh : $x \mapsto \boxed{\quad}$.

Q7. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I, compléter

f est convexe sur I si, et seulement si, $\boxed{\quad}$.

Dans ce cas, si $a \in \mathrm{I}$, compléter avec des expressions qui dépendent de a et x :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \boxed{\quad} \leqslant f(x) \leqslant \boxed{\quad}.$$

Q8. Compléter : $\arccos\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{13}\right)\right) = \boxed{\quad}$.

Colles de la semaine 5. Nom et prénom ?

Exercice 1

Calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(a+k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(a+k\theta)$ où $(a,\theta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a+k\theta)$ où $(a,\theta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$, écrire $\cos(5a)$ en fonction de $\cos a$ et en déduire la valeur, avec des radicaux, de $\cos(\pi/10)$, puis de $\cos(\pi/5)$.

Exercice 4

Pour tout réel x, linéariser $\cos^4(x) \times \sin(x)$.

Exercice 5

Pour tout réel x, écrire $\sin(6x)$ en fonction de $\cos(x)$.

Exercice 6

Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1, qui vérifient $ac \neq -1$.
Montrer que le nombre complexe $\dfrac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)}$ est un imaginaire pur.

Exercice 7

Soit $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$. Montrer l'équivalence

$$|z| = 1 \iff \exists a \in \mathbb{R}, \ z = \frac{1+ia}{1-ia}.$$

Exercice 8

Soit $\omega = e^{\frac{i2\pi}{7}}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0$, en déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{7}) - \cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{3\pi}{7})$.

Exercice 9

Soient $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $S = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. Montrer que S et T sont conjugués et que $\mathbb{I}\mathrm{m}(S) > 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + Z + 2 = 0$
3. Calculer $S + T$ et montrer que $S.T = 2$, et en déduire S et T.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 - \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0.$$

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$.

1. Montrer que si z est une solution de cette équation, alors z est un réel.
2. Résoudre cette équation, en exprimant les solutions à l'aide de la fonction cotangente.
3. On suppose dans cette question que $n = 5$.
   (a) Retrouver les solutions de l'équation $(z+i)^5 = (z-i)^5$ en développant, et en utilisant la résolution d'une équation du second degré.
   (b) En déduire les valeurs exactes *(sous forme d'expressions utilisant des radicaux $\sqrt{\ }$)* de

$$\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right), \ \tan\left(\frac{\pi}{5}\right), \ \cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \ \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Exercice 12

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

CC BY NC

Exercice 13

Montrer que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + (e - 1)$.

Réponses aux questions de cours *questions*

Q 1. $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \ |z| = 1 \Longleftrightarrow \overline{z} = \boxed{\frac{1}{z}} \Longleftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = \boxed{e^{i\theta}}$.

Q 2. Grâce aux propriétés de l'exponentielle complexe :

$$\begin{aligned} e^{i\frac{47\pi}{4}} &= e^{i\left(11\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = -e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{5\pi}{4}}, \\ e^{-i\frac{15\pi}{7}} &= e^{-i\left(2\pi+\frac{\pi}{7}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{7}}, \\ i^{-22} &= \left(i^2\right)^{-11} = (-1)^{-11} = -1, \\ j^{85} &= j^{3\times 28+1} = \left(j^3\right)^{28} \times j = 1^{28} \times j = j. \end{aligned}$$

Je vous laisse les placer sur le cercle trigonométrique.

Q 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Compléter :

$$z^n = 1 \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \boxed{[\![0\ ;\ n-1]\!]} \text{ tel que } z = \boxed{e^{ik\frac{2\pi}{n}}}.$$

soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$, compléter :

$$z^n = \alpha^n \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \boxed{[\![0\ ;\ n-1]\!]} \text{ tel que } z = \boxed{\alpha \times e^{ik\frac{2\pi}{n}}}.$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = i$:

$$\begin{aligned} z^4 = i &\Longleftrightarrow z^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^4 \Longleftrightarrow \exists k \in [\![0\ ;\ 3]\!],\ \ z = e^{i\frac{\pi}{8}} \times e^{ik\frac{\pi}{2}} \\ &\Longleftrightarrow z \in \boxed{\left\{e^{i\frac{\pi}{8}}, -e^{i\frac{\pi}{8}}, i \times e^{i\frac{\pi}{8}}, -i \times e^{i\frac{\pi}{8}}\right\} = \left\{e^{i\frac{\pi}{8}}, -e^{i\frac{\pi}{8}}, e^{i\frac{5\pi}{8}}, -e^{i\frac{5\pi}{8}}\right\}}, \\ z^3 = -1 &\Longleftrightarrow z^3 = (-1)^3 \Longleftrightarrow \exists k \in [\![0\ ;\ 4]\!],\ \ z = (-1) \times e^{ik\frac{2\pi}{3}} \\ &\Longleftrightarrow z \in \boxed{\left\{-1, -j, e^{i\frac{5\pi}{8}}, -j^2\right\}}. \end{aligned}$$

Réponses aux questions de cours *questions*

Q 1. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, à l'aide de la technique de « l'argument-moitié » écrire les nombres complexes suivants sous forme $x \times e^{i\theta}$, avec $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2$:

(A) $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = \boxed{} \times e^{i\boxed{}}$; **(A)** $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = \boxed{} \times e^{i\boxed{}}$.

CC BY NC

Q 2. Compléter ci-dessous la résolution dans $\mathbb{C}$

$$2x^2-(3+i)x+2=0 \iff x=\boxed{1+i}$$

ou

$$x=\boxed{\tfrac{1}{2}+i\,\tfrac{1}{2}},$$

car le discriminant de $2X^2-(3+i)X+2$ est

$$\Delta=\boxed{-8+6i}=\left(\boxed{1+3i}\right)^2.$$

Q 3. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I, compléter

$$f \text{ est convexe sur I si, et seulement si, } \boxed{\forall x\in \mathrm{I},\ \ f''(x)\geqslant 0}.$$

Dans ce cas, si $(a,b)\in \mathrm{I}^2$, compléter avec des expressions qui dépendent de a, b et x :

$$\forall x\in \mathrm{I},\ \boxed{f'(a)(x-a)+f(a)}\leqslant f(x)\leqslant \boxed{\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)}.$$

Q 4. Compléter : $\arccos\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{13}\right)\right)=\boxed{\dfrac{6\pi}{13}}$.

Une correction de l'exercice 1 *énoncé*

Notons respectivement S_n et T_n ces deux sommes, alors

$$S_n+i\,T_n=\sum_{k=0}^{n} e^{i(a+k\theta)},$$

autrement dit S_n et T_n sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{i(a+k\theta)}$.

Remarquons d'abord que si θ est un multiple de 2π, alors $\cos(a+k\theta)=\cos(a)$ et $\sin(a+k\theta)=\sin(a)$, donc dans ce cas $S_n=(n+1)\cos(a)$ et $T_n=(n+1)\sin(a)$.

Sinon, θ n'est pas un multiple de 2π, et par conséquent $e^{i\theta}$ est différent de 1, ainsi

$$\begin{aligned}
U_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ia} \times \left(e^{i\theta}\right)^k = e^{ia} \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k = e^{ia} \times \frac{1-\left(e^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-e^{i\theta}} \quad \textit{(car } e^{i\theta} \neq 1\textit{)} \\
= e^{ia} \times \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} \\
= e^{ia} \times \frac{e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i(n+1)\frac{\theta}{2}} - e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} \quad \textit{(c'est l'« argument-moitié »)} \\
= e^{ia} \times \frac{e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}\left(-2i\sin(n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-2i\sin\frac{\theta}{2}\right)} \\
= e^{i(a+(n+1)\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2})} \times \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = e^{i(a+n\frac{\theta}{2})} \times \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \\
= \left(\cos(a+n\tfrac{\theta}{2}) + i\sin(a+n\tfrac{\theta}{2})\right) \times \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

donc $S_n = \cos(a+n\frac{\theta}{2}) \times \dfrac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ et $T_n = \sin(a+n\frac{\theta}{2}) \times \dfrac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$.

Une correction de l'exercice 2

énoncé

Notons respectivement S_n et T_n ces deux sommes, alors comme dans l'exercice précédent S_n et T_n sont la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(a+k\theta)}$.
Or

$$\begin{aligned}
U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ia} \times \left(e^{i\theta}\right)^k = e^{ia} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{i\theta}\right)^k = e^{ia} \times \left(1+e^{i\theta}\right)^n \\
= e^{ia} \times \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)\right)^n \quad \textit{(avec l'« argument-moitié »)} \\
= e^{ia} \times e^{in\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)^n = e^{i(a+n\frac{\theta}{2})} 2^n \cos^n\frac{\theta}{2} \\
= \left(\cos\left(a+n\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(a+n\frac{\theta}{2}\right)\right) 2^n \cos^n\left(\tfrac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

CC BY NC

donc $S_n = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \cos\left(a + n\frac{\theta}{2}\right)$ et $T_n = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \sin\left(a + n\frac{\theta}{2}\right)$.

Une correction de l'exercice 3

énoncé

Pour tout réel a,

$$\begin{aligned}
\cos(5a) &= \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{i5a}\right) = \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\left(\mathrm{e}^{ia}\right)^5\right) = \mathbb{R}\mathrm{e}\left(\left(\cos(a) + i\sin(a)\right)^5\right) \\
&= \cdots \textit{(formule du binôme)} \cdots \\
&= \cos^5(a) - 10\cos^3(a)\sin^2(a) + 5\cos(a)\sin^4(a) \\
&= \cos^5(a) - 10\cos^3(a)(1-\cos^2(a)) + 5\cos(a)(1-\cos^2(a))^2 \\
&\qquad \textit{(avec } \sin^2 = 1 - \cos^2 \textit{ et } \sin^4(a) = (\sin^2(a))^2\textit{)} \\
&= 16\cos^5(a) - 20\cos^3(a) + 5\cos(a)
\end{aligned}$$

Pour $a = \frac{\pi}{10}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\
&= 16\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)^5 - 20\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)^3 + 5\left(\cos\frac{\pi}{10}\right),
\end{aligned}$$

donc $\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)$ est une des solutions de l'équation $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$.
Or

$$\begin{aligned}
16x^5 - 20x^3 + 5x = 0 &\iff x = 0 \text{ ou } 16x^4 - 20x^2 + 5 = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } 16(x^2)^2 - 20(x^2) + 5 = 0.
\end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation du second degré $16y^2 - 20y + 5 = 0$ est

$$\Delta = 80 = (4\sqrt{5})^2$$

donc ses solutions sont

$$\frac{20 + 4\sqrt{5}}{2 \times 16} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \text{ et } \frac{20 - 4\sqrt{5}}{2 \times 16} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
16x^5 - 20x^3 + 5x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } \quad & x^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \\
& \text{ou } x^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \quad \textit{(et ces deux réels sont positifs)} \\
&\iff x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} \text{ ou } x = \pm\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$ sont donc, dans l'ordre croissant,

$$-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} < -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < 0 < \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Nous devons déterminer laquelle de ces 5 solutions est $\cos\frac{\pi}{10}$ *(sans calculatrice)*.
Tout d'abord, $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{6} < \pi$, et la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$, donc $\cos\frac{\pi}{10} > \cos\frac{\pi}{6}$, autrement dit $\cos\frac{\pi}{10} > \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Or $\sqrt{5} > 2$, donc $\frac{5-\sqrt{5}}{8} < \frac{3}{8}$ et du fait de la stricte croissance de $\square \mapsto \sqrt{\square}$ sur $[0;+\infty[$, on déduit que

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi les quatre premières solutions sont inférieures à $\frac{\sqrt{3}}{2}$, elles sont donc écartées.
Il ne nous reste plus que la solution $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$, qui est donc la valeur recherchée :

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

Une correction de l'exercice 4

énoncé

$$\begin{aligned}
\cos^4(x)\times\sin(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 \times \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\\
&= \frac{1}{2^5 i}\left(e^{i4x}+4e^{i2x}+6+4e^{-i2x}+e^{-i4x}\right)\times\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\\
&= \frac{1}{2^5 i}\left(e^{i5x}+3e^{i3x}+2e^{ix}-2e^{-ix}-3e^{-i3x}-e^{-i5x}\right)\\
&= \frac{1}{2^5 i}\left(\left(e^{i5x}-e^{-i5x}\right)+3\left(e^{i3x}-e^{-i3x}\right)+2\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2^5 i}\left(2i\sin(5x)+3\times 2i\sin(3x)+2\times 2i\sin(x)\right)\\
&= \frac{1}{16}\sin(5x)+\frac{3}{16}\sin(3x)+\frac{1}{8}\sin(x)
\end{aligned}$$

CC BY NC

Une correction de l'exercice 5 *énoncé*

$$\begin{aligned}\sin(6x) &= \mathbb{I}\text{m}\left(e^{i6x}\right) = \mathbb{I}\text{m}\left(\left(e^{ix}\right)^6\right) \quad \textit{(grâce à la formule de Moivre)}\\
&= \mathbb{I}\text{m}\left((\cos(x)+i\sin(x))^6\right)\\
&= \mathbb{I}\text{m}\Big((\cos(x))^6+6(\cos(x))^5(i\sin(x))+\\
&\qquad 15(\cos(x))^4(i\sin(x))^2+20(\cos(x))^3(i\sin(x))^3+\\
&\qquad 15(\cos(x))^2(i\sin(x))^4+6(\cos(x))(i\sin(x))^5+(i\sin(x))^6\Big)\\
&= \mathbb{I}\text{m}\Big(\cos^6(x)+i6\cos^5(x)\sin(x)+\\
&\qquad -15\cos^4(x)\sin^2(x)-i20\cos^3(x)\sin^3(x)+\\
&\qquad +15\cos^2(x)\sin^4(x)+i6\cos(x)\sin^5(x)-\sin^6(x)\Big)\\
&= 6\cos^5(x)\sin(x)-20\cos^3(x)\sin^3(x)+6\cos(x)\sin^5(x)\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 6 *énoncé*

Notons $z=\dfrac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)}$.
Pour montrer que z est un imaginaire pur, *il suffit* de prouver que $\overline{z}=-z$.

$$\overline{z}=\overline{\left(\frac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)}\right)}=\frac{(\overline{c}-\overline{b})(1+\overline{a}\times\overline{b})}{\overline{b}(1+\overline{a}\times\overline{c})}$$

or a, b et c sont de module 1, donc $|a|^2=a\times\overline{a}=1$, ce qui donne $\overline{a}=\frac{1}{a}$. On a de même $\overline{b}=\frac{1}{b}$ et $\overline{c}=\frac{1}{c}$, et par conséquent

$$\overline{z}=\frac{(\frac{1}{c}-\frac{1}{b})(1+\frac{1}{a}\times\frac{1}{b})}{\frac{1}{b}(1+\frac{1}{a}\times\frac{1}{c})}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $bc\times ab$, on obtient

$$\overline{z}=\frac{(b-c)(ab+1)}{b(ac+1)}=-\frac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)}=-z \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Une correction de l'exercice 7

énoncé

On demande d'établir une équivalence, ce que l'on fait en général en établissant l'une après l'autre les deux implications réciproques.
Je rappelle que pour prouver que $(\mathscr{P}) \Rightarrow (\mathscr{Q})$, on suppose que $(\mathscr{P})$ est vraie, on met cette hypothèse dans la boîte à outils, et on montre $(\mathscr{Q})$ en utilisant $(\mathscr{P})$ au moment opportun.

1. Supposons qu'il existe un réel a qui vérifie $z = \dfrac{1+ia}{1-ia}$. Alors

$$\boxed{|z|} = \left|\frac{1+ia}{1-ia}\right| = \frac{|1+ia|}{|1-ia|} = \frac{\sqrt{1^2+a^2}}{\sqrt{1^2+(-a)^2}} = \frac{\sqrt{1^2+a^2}}{\sqrt{1^2+a^2}} = \boxed{1} \quad \text{C.Q.F.D}$$

2. Réciproquement, prenons $z \in \mathbb{C} - \{-1\}$ qui vérifie $|z| = 1$, et montrons qu'il existe un réel a qui vérifie $z = \frac{1+ia}{1-ia}$.

Méthode – l'analyse-synthèse :

On peut envisager cet exercice comme la résolution $\boxed{\text{dans } \mathbb{R}}$ *de l'équation $z = \frac{1+ia}{1-ia}$,* $\boxed{\text{d'inconnue } a}$.
Une méthode classique pour résoudre une équation est l'« analyse-synthèse » :

- *on suppose d'abord l'existence de solutions, et on tâche d'en déduire le plus d'informations possible sur ces solutions éventuelles (en quelque sorte un portrait-robot des solutions), voire dans le meilleur des cas d'en déduire carrément leurs valeurs (c'est la partie analyse) ;*
- *puis on cherche parmi les valeurs obtenues celles qui sont effectivement solutions (c'est la synthèse).*

Remarquons que la résolution classique

$$3x+2=8 \Longleftrightarrow 3x=6 \Longleftrightarrow x=2$$

est l'analyse et la synthèse en même temps :

- $3x+2=8 \Longrightarrow 3x=6 \Longrightarrow x=2$ *est l'analyse ;*
- $x=2 \Longrightarrow 3x=6 \Longrightarrow 3x+2=8$ *est la synthèse.*

(a) Tout d'abord, cherchons a dans $\mathbb{C}$ qui vérifie $z = \frac{1+ia}{1-ia}$ *(c'est la phase*

CC BY NC

d'analyse) :

$$z = \frac{1+ia}{1-ia} \iff z(1-ia) = 1+ia \iff -i(1+z)a = 1-z$$
$$\iff a = \frac{1-z}{-i(1+z)} \quad \textit{(car } z \in \mathbb{C} - \{-1\} \textit{ donc } 1+z \neq 0\textit{)}$$
$$\iff a = i\frac{1-z}{1+z} \quad \textit{(en multipliant num. et dénom. par i).}$$

donc il existe un unique nombre (a priori complexe) a qui vérifie $z = \frac{1+ia}{1-ia}$, ce nombre est $a = i\frac{1-z}{1+z}$ *(remarquons que ceci est vrai indépendamment de l'hypothèse* $|z| = 1$*.)*

(b) Montrons que ce nombre a est effectivement solution, autrement dit qu'il vérifie bien $z = \frac{1+ia}{1-ia}$ *(ce qui est immédiatement confirmé par les équivalences ci-dessus)*, et surtout il est réel *(c'est cette propriété qui dépend de* $|z| = 1$*)* :

> *L'hypothèse $|z| = 1$ peut être utilisée de plusieurs manières :*
> - *si $|z| = 1$, alors z peut s'écrire $z = e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$;*
> - *si $|z| = 1$, alors z peut s'écrire $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $x^2 + y^2 = 1$;*
> - *si $|z| = 1$, alors $|z|^2 = 1$, donc $z \times \overline{z} = 1$ donc $\overline{z} = \frac{1}{z}$.*
>
> *D'autre part, pour montrer que a est un réel, on peut établir que $\mathbb{I}\mathrm{m}(a) = 0$, ou que $\overline{a} = a$, ou encore que $\overline{a} - a = 0$.*
> *Ce travail d'analyse des hypothèses et de la conclusion, pour savoir comment utiliser les premières, et comment établir la seconde, c'est ce qu'on appelle chercher un exercice de maths !*

Première méthode : puisque $|z| = 1$ et $z \neq -1$, alors il existe un réel $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$. Ainsi le nombre a qui vérifie $z = \frac{1+ia}{1-ia}$ est égal à

$$\begin{aligned}
a &= i\frac{1-z}{1+z} = i\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} \\
&= i\frac{e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\right)}{e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right)} \quad \textit{(le fameux coup de « l'argument moitié »)} \\
&= i\frac{-2i\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)} = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \\
&= \tan(\theta/2) \text{ qui est bien un réel, C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned}\overline{a}-a &= \overline{\left(i\frac{1-z}{1+z}\right)}-i\frac{1-z}{1+z}=-i\frac{1-\overline{z}}{1+\overline{z}}-i\frac{1-z}{1+z}\\ &=-i\frac{(1-\overline{z})(1+z)+(1-z)(1+\overline{z})}{(1+\overline{z})(1+z)}\\ &=-i\frac{1+z-\overline{z}-z\times\overline{z}+1-z+\overline{z}-z\times\overline{z}}{(1+\overline{z})(1+z)}\end{aligned}$$

Or on a supposé que $|z|=1$, donc $z\times\overline{z}=1$, donc

$$\overline{a}-a=-i\frac{1+z-\overline{z}-1+1-z+\overline{z}-1}{(1+\overline{z})(1+z)}=0$$

ce qui prouve que a est un réel, C.Q.F.D.

Troisième méthode : notons x la partie réelle de z et y sa partie imaginaire, alors en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du second :

$$\begin{aligned}a=i\frac{1-z}{1+z}&=i\frac{1-x-iy}{1+x+iy}=i\frac{(1-x-iy)(1+x-iy)}{(1+x+iy)(1+x-iy)}\\ &=i\frac{(1-x^2-y^2)+i(y(1-x)-y(1+x))}{(1+x)^2+y^2}\end{aligned}$$

mais on a supposé que $|z|=1$, donc $x^2+y^2=1$, d'où $1-x^2-y^2=0$, ce qui donne

$$a=i\frac{-i\,2xy}{(1+x)^2+y^2}=\frac{2xy}{(1+x)^2+y^2}.$$

On peut donc conclure que a est un réel, C.Q.F.D.

Une correction de l'exercice 8 *énoncé*

➟ On utilise le fait que $\omega^7=\mathrm{e}^{i2\pi}=1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{6}\omega^k &= \frac{1-\omega^7}{1-\omega}\ \ (car\ \omega\neq 1)\\ &=0\ \ (car\ \omega^7=1)\end{aligned}$$

CC BY NC

On vient de voir que $\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0$*, c'est-à-dire que*

$$1 + e^{i2\pi/7} + e^{i4\pi/7} + \cdots + e^{i12\pi/7} = 0.$$

Pour pouvoir utiliser cette égalité, je vais modifier la quantité $\cos(\frac{\pi}{7}) - \cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{3\pi}{7})$*, de façon à faire apparaître les exponentielles de mon outil.*

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\pi}{7}) - \cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{3\pi}{7}) \\
&= \frac{e^{i\pi/7} + e^{-i\pi/7}}{2} - \frac{e^{i2\pi/7} + e^{-i2\pi/7}}{2} \\
&\qquad + \frac{e^{i3\pi/7} + e^{-i3\pi/7}}{2} \quad \textit{(avec la formule d'Euler)} \\
&= -\frac{1}{2}\left(-e^{i\pi/7} - e^{-i\pi/7} + e^{i2\pi/7} + e^{-i2\pi/7} - e^{i3\pi/7} - e^{-i3\pi/7}\right)
\end{aligned}$$

On utilise à présent les transformations suivantes pour écrire de plusieurs façons différentes les exponentielles complexes :

$$-e^{i\theta} = e^{i\pi} \times e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)} \textit{ ou de même } -e^{i\theta} = e^{i(\theta-\pi)}$$

et aussi

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i(\theta-2\pi)}$$

$$\begin{aligned}
&\boxed{\cos(\frac{\pi}{7}) - \cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{3\pi}{7})} \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{i(\pi/7+\pi)} + e^{-i(\pi/7+\pi)} + e^{i2\pi/7} + e^{i(-2\pi/7+2\pi)} + e^{i(3\pi/7+\pi)} + e^{i(-3\pi/7+\pi)}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{i8\pi/7} + e^{i6\pi/7} + e^{i2\pi/7} + e^{i12\pi/7} + e^{i10\pi/7} + e^{i4\pi/7}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(-1 + \left(1 + e^{i2\pi/7} + e^{i4\pi/7} + e^{i6\pi/7} + e^{i8\pi/7} + e^{i10\pi/7} + e^{i12\pi/7}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}(-1+0) \quad \textit{(d'après la première question)} \\
&= \boxed{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Une correction de l'exercice 9 *énoncé*

1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\overline{\omega^k} = \overline{e^{ik\frac{2\pi}{7}}} = e^{-ik\frac{2\pi}{7}} = e^{i2\pi} \times e^{-ik\frac{2\pi}{7}} = e^{i\left(7\frac{2\pi}{7} - k\frac{2\pi}{7}\right)} = e^{i(7-k)\frac{2\pi}{7}} = \omega^{7-k}.$$

Je vous laisse en déduire que $\overline{S} = T$.

D'autre part, $\mathbb{Im}(S) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.
Or $\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{8\pi}{7} - \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$, et $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \pi$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) < \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ et

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$$

Et comme de plus $0 < \frac{4\pi}{7} < \pi$, on a $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0$, par conséquent

$$\mathbb{Im}(S) = \left[\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right] + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0.$$

2. L'équation $Z^2 + Z + 2 = 0$ a pour discriminant $-7 = \left(i\sqrt{7}\right)^2$, donc ses solutions sont $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.

3. $S + T = (\omega + \omega^2 + \omega^4) + (\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = \sum_{k=1}^{6} \omega^k$

donc $S + T = \sum_{k=0}^{6} \omega^k - \omega^0 = \sum_{k=0}^{6} \omega^k - 1$,

or $\omega \neq 1$ et $\omega^7 = \left(e^{\frac{i2\pi}{7}}\right)^7 = e^{i2\pi} = 1$, donc $\sum_{k=0}^{6} \omega^k = \frac{1-\omega^7}{1-\omega} = 0$, d'où $\boxed{S + T = -1}$.

$S \times T = (\omega + \omega^2 + \omega^4) \times (\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) = \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10}$,
or $\omega^7 = 1$, $\omega^8 = \omega^7 \times \omega = \omega$, et de même $\omega^9 = \omega^2$, $\omega^{10} = \omega^3$, ainsi

$$\boxed{ST} = 2 + \underbrace{(1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6)}_{=0} = \boxed{2}$$

Deux nombres a et b sont toujours les racines du polynôme $X^2 - (a+b)X + ab$, ainsi des égalités $S + T = -1$ et $ST = 2$, on déduit que S et T sont les racines du polynôme $X^2 + X + 2$, c'est-à-dire la question (b) : $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.

CC BY NC

Comme on sait que $\mathbb{I}\mathrm{m}(S) > 0$, on peut donc conclure que

$$\boxed{S = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \text{ et } T = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}}$$

et non l'inverse.

Une correction de l'exercice 10

énoncé

- Pour tout $Z \in \mathbb{C}$,

$$Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0 \iff \begin{cases} \frac{1-Z^5}{1-Z} = 0 \\ Z \neq 1 \end{cases} \iff Z^5 = 1 \text{ et } Z \neq 1$$

donc comme 1 n'est évidemment pas solution de l'équation, on conclut que

$$Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0 \iff \exists k \in \{1,2,3,4\},\ \ Z = e^{i\frac{2\pi}{5}}.$$

- On en déduit que pour tout nombre complexe z

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 - \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0 \\
\iff\ & \left(-\frac{z+i}{z-i}\right)^4 + \left(-\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(-\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(-\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0 \\
\iff\ & \exists k \in \{1,2,3,4\},\ -\frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2\pi}{5}} \ \ \textit{(ce qui fait 4 équations à résoudre)} \\
\iff\ & \exists k \in \{1,2,3,4\},\ -\left(1+e^{ik\frac{2\pi}{5}}\right)z = i\left(1-e^{ik\frac{2\pi}{5}}\right) \\
\iff\ & \exists k \in \{1,2,3,4\},\ z = -i\frac{1-e^{ik\frac{2\pi}{5}}}{1+e^{ik\frac{2\pi}{5}}} \ \ \textit{(car } e^{ik\frac{2\pi}{5}} \neq 1\textit{)} \\
\iff\ & \exists k \in \{1,2,3,4\},\ z = -i\frac{e^{ik\frac{\pi}{5}}\left(e^{-ik\frac{\pi}{5}} - e^{ik\frac{\pi}{5}}\right)}{e^{ik\frac{\pi}{5}}\left(e^{-ik\frac{\pi}{5}} + e^{ik\frac{\pi}{5}}\right)} = -i \times \frac{-2i\sin\left(k\frac{\pi}{5}\right)}{2\cos\left(k\frac{\pi}{5}\right)} \\
& = -2\tan\left(k\frac{\pi}{5}\right).
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{-2\tan\left(k\frac{\pi}{5}\right) \mid k \in \{1,2,3,4\}\right\}.$$

Une correction de l'exercice 11 *énoncé*

1. La première équivalence utilisée ci-après est classique :

$$\begin{aligned}(z+i)^n=(z-i)^n &\Longleftrightarrow \exists p\in[\![0,n-1]\!] \mid (z+i)=(z-i)\times e^{ip\frac{2\pi}{n}}\\ &\Longleftrightarrow \exists p\in[\![0,n-1]\!] \mid z\left(1-e^{ip\frac{2\pi}{n}}\right)=-i\left(1+e^{ip\frac{2\pi}{n}}\right)\end{aligned}$$

Dans l'ensemble $\left\{e^{ip\frac{2\pi}{n}} \mid p\in[\![0,n-1]\!]\right\}$ des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, seule la valeur correspondant à $p=0$ donne 1, ce qui entraîne alors que $\left(1-e^{ip\frac{2\pi}{n}}\right)=0$.
Mais dans ce cas l'équation donne alors $0=-2i$, qui n'a pas de solution. Il reste donc

$$(z+i)^n=(z-i)^n \Longleftrightarrow \exists p\in[\![1,n-1]\!] \mid z=\frac{-i\left(1+e^{ip\frac{2\pi}{n}}\right)}{1-e^{ip\frac{2\pi}{n}}}$$

Or

$$\frac{-i\left(1+e^{ip\frac{2\pi}{n}}\right)}{1-e^{ip\frac{2\pi}{n}}}=-i\,\frac{e^{ip\frac{\pi}{n}}\left(e^{-ip\frac{\pi}{n}}+e^{ip\frac{\pi}{n}}\right)}{e^{ip\frac{\pi}{n}}\left(e^{-ip\frac{\pi}{n}}-e^{ip\frac{\pi}{n}}\right)}=-i\,\frac{2\cos\left(p\frac{\pi}{n}\right)}{-2i\sin\left(p\frac{\pi}{n}\right)}=\frac{\cos\left(p\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(p\frac{\pi}{n}\right)}=\operatorname{cotan}\left(p\frac{\pi}{n}\right)$$

donc

$$(z+i)^n=(z-i)^n \Longleftrightarrow \exists p\in[\![1,n-1]\!] \mid z=\operatorname{cotan}\left(p\frac{\pi}{n}\right)$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{\operatorname{cotan}\left(p\frac{\pi}{n}\right) \mid p\in[\![1,n-1]\!]\right\}$$

2. **(a)** Grâce à la formule du binôme, on a

$$\begin{aligned}&(z+i)^5=(z-i)^5\\ &\Longleftrightarrow z^5+5iz^4-10z^3-10iz^2+5z+i=z^5-5iz^4-10z^3+10iz^2+5z-i\\ &\Longleftrightarrow 10iz^4-20iz^2+2i=0\\ &\Longleftrightarrow 5z^4-10z^2+1=0\ \textit{(en divisant les 2 membres par 2i)}\end{aligned}$$

Posons $y=z^2$, on résout alors $5y^2-10y+1=0$, cette équation a pour discriminant $\Delta=80=5\times16=\left(4\sqrt{5}\right)^2$, et pour solutions $\frac{+10-4\sqrt{5}}{2\times5}=$

CC BY NC

$1-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $1+\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Ainsi

$$(z+i)^5=(z-i)^5 \iff z^2=1-\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{ou } z^2=1+\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \textit{(ce sont deux réels positifs)}$$
$$\iff z=\pm\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}} \text{ ou } z=\pm\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

D'où l'ensemble des solutions, dans l'ordre croissant

$$\left\{-\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}},\ -\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}},\ \sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}},\ \sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}\right\}$$

(b) Si on applique le résultat obtenu dans la première question avec $n=5$, on obtient aussi pour la même équation l'ensemble des solutions

$$\left\{\operatorname{cotan}\left(p\frac{\pi}{5}\right) \mid p\in[\![1,4]\!]\right\}=\left\{\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right), \operatorname{cotan}\left(\frac{2\pi}{5}\right), \operatorname{cotan}\left(\frac{3\pi}{5}\right), \operatorname{cotan}\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right\}$$

La valeur de $\operatorname{cotan}\frac{\pi}{5}$ est la plus grande des 4.
Pour justifier cela, on peut invoquer la décroissance de la fonction cotan *sur l'intervalle* $]0,\pi[$ *(car* $\operatorname{cotan}'=-1-\operatorname{cotan}^2=-\frac{1}{\sin^2}$*).*
Par conséquent, on peut identifier les plus grandes valeurs des deux ensembles, et affirmer que $\boxed{\operatorname{cotan}\frac{\pi}{5}=\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}}$.

On en déduit que

$$\tan\frac{\pi}{5}=\frac{1}{\operatorname{cotan}\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}}.$$

De plus

$$\operatorname{cotan}^2=\left(\frac{\cos}{\sin}\right)^2=\frac{\cos^2}{\sin^2}=\frac{1-\sin^2}{\sin^2}=\frac{1}{\sin^2}-1$$

donc

$$\sin^2=\frac{1}{\operatorname{cotan}^2+1}$$

et en particulier

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{\operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+1}=\frac{1}{\left(1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+1}=\frac{5}{10+2\sqrt{5}}$$

Comme $\frac{\pi}{5}$ est entre 0 et π, on sait que $\sin\frac{\pi}{5}$ est positif, donc $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5}{10+2\sqrt{5}}$ donne

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5}{10+2\sqrt{5}}}}.$$

Enfin, de $\cos^2 = 1 - \sin^2$, et sachant que $\cos\frac{\pi}{5}$ est positif, on déduit de façon similaire que $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}}$.

CC BY NC