Le rapport du Jaury

Mes abréviations

« TE » : Type-Error ;

« AI » : argumentation insuffisante ;

« VC » : voir le corrigé ;

« AR » : améliorer la rédaction ;

« ASP » : affirmation sans preuve ;

« CP » : je ne comprends pas ;

« MF » : mauvaise foi ;

« N'importe quoi ! » : n'importe quoi !

- Les questions marquées par un 🎁 font partie de la voiture balai de la difficulté mathématique de PC ;

  tandis que les questions marquées par un 🚢 sont des questions très classiques et récurrentes...

- Lorsque vous superposez des lignes de calcul, il est nécessaire de faire figurer des liens logiques entre ces lignes, comme :

  - des « $\Longleftrightarrow$ » ou « $\Rightarrow$ » directement dans les mathématiques,
  - ou bien des mots en français comme « donc », « d'où », « ainsi », « par conséquent », etc.

  D'ailleurs, le symbole « $\Rightarrow$ » n'a rien à faire en début de ligne, ou au sein d'une phrase en français.

Remarques générales :

- Trop de copies sont difficilement lisibles. Faites un effort car la personne qui corrigera vos copies au concours n'en fera aucun. Si nous sommes d'accord pour affirmer que vous n'êtes ni plus maladroits ni plus stupides que les élèves d'il y a 30 ans qui écrivaient (en majorité) mieux avec moins de fautes d'orthographe, il ne vous reste plus qu'à le prouver.
- De même qu'on met des parenthèses autour de u_n si on veut parler de la suite, ou un $\sum$ devant u_n su on veut parler de la série, on met « $t \mapsto$ » devant $f(t)$ ou « $x \mapsto$ » devant $f(x)$ si on veut parler de l'application !

  dire « $\left(\frac{\sin(tx)}{\alpha x}\right)^b$ » est continue est impossible à comprendre.
- Quand vous empilez des (in)égalités les unes en dessous des autres, il faut mettre des liens logiques entre elles, des implications (ou en français « donc » et ses synonymes), ou des équivalences dans le cas où c'est nécessaire.

- Dans la plupart des copies, les questions du type « montrer qu'il existe … » (comme les questions 2 et 3 du problème 2) sont très mal traitées, avec souvent des raisonnements du type *“du yéti”*.

  Je vous invite à bien étudier toutes ces questions (dans ce devoir comme dans tous les exercices de l'année) qui demandent de prouver l'existence d'un ou plusieurs objets mathématiques, ainsi que les résultats du cours dont la conclusion est l'existence d'objets mathématiques.
- Quand on étudie la limite d'une fonction en un point a, séparer les limites « à gauche » et « à droite » n'a d'intérêt que si la fonction a des expressions, ou a priori des comportements, différents en dessous de a et au dessus de a.
- Dire que deux expressions u_n et v_n sont égales, ou l'une inférieure à l'autre, quand n tend vers $+\infty$ n'a pas de sens en général.

  On peut comparer leurs limites si elles en ont, mais pas les expressions elles-mêmes.
  - la phrase « $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n$ » n'a de sens que si il y a un reste sous forme de petit o ou grand O quelque part,
  - « quand $n \to +\infty$, $w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$ » ne veut rien dire. Je rappelle que $w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$ entraîne que $w_n = w_{n+1}$ et rien d'autre d'autre.
- Quand une intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ a un problème à ses deux bornes (autrement dit lorsque f est continue sur $]a\,;\,b[$ mais pas en a et b), il faut arrêter de parler de la relation de Chasles, qui n'a qu'un rapport très lointain avec la définition de la convergence d'une telle intégrale.*(Même si je sais que la relation de Chasles est tellement facile à retenir qu'elle est devenue le doudou de l'élève angoissé par les maths.)*
- Rien à faire, un phrase qui contient « …est intégrable donc convergente » ne peut pas être correcte.
- La phrase « $\forall t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t)$ est continue » ne veut rien dire.
- L'équivalent « $\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1 - \frac{1}{2}t^2$ » n'est pas faux car le rapport des deux tend bien vers 1, mais le terme $\frac{1}{2}t^2$ ne sert à rien ; $cos(t)$ est aussi équivalent en 0 à $1 + 40t - \pi t^2$, voire à toute expression de la forme $1 + o(1)$. Donc quand on écrit un équivalent, on ne garde que le terme dominant !
- Je rappelle que pour écrire un équivalent d'un produit et d'un rapport de termes, on peut remplacer toute expression par sa limite si elle est non nulle. En particulier $e^{itx} \underset{x\to 0}{\sim} 1$.
-

Je vous rappelle que s'efforcer de traduire sur son brouillon les questions sous la forme « Supposons que …montrons que … » est un bon moyen de limiter les égarements.
Il est toujours aussi important de savoir à tout moment de quoi on parle, quel sens ont les mots employés, quelle est la nature des objets mathématiques que l'on est entrain de manipuler, etc. Ça permettra d'éviter les pires absurdités comme par exemple de prendre un vecteur « dans » dans une application, ou autres joyeusetés que certain-e-s m'ont offertes dans le problème 2.

Grossières erreurs mathématiques :

- Ne pas confondre $E = F + G$ et $E = F \cup G$!
- Attention à ne pas croire que pour tout endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u) = E$!
- « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ » ;
- « $u_n > 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$ » ;
- « $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge » ;
- « $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ ».

Exercice 1

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$ existe.

   On admet alors que $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

2. (a) Montrer que pour tout α strictement positif, et pour tout réel x, l'application $t \mapsto \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-itx}$ est prolongeable par continuité en 0.

   (b) Montrer que pour tout α strictement positif, et pour tout réel x, l'application $t \mapsto \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-itx}$ ainsi prolongée est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel x, on note $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-itx}\mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que I est un réel.

   (b) Soit $A > 0$ et $B > 0$, justifier l'existence de l'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2}\mathrm{d}x$, et justifier que : $$\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\cos(AB)}{A} - B\int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

(c) En déduire, pour tout $B > 0$, puis pour tout $B \in \mathbb{R}$, le calcul de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(d) En déduire le calcul de l'intégrale I.

Problème 1 – Wallis et Stirling sont dans un problème

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I - Calcul d'un équivalent : la formule de Wallis

Pour tout entier naturel n, on considère l'intégrale $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ appelée **intégrale de Wallis**.

1. Pourquoi ces intégrales sont-elles définies ?
2. Calculer w_0 et w_1.
3. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant 0$. En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\ \sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (b) En déduire que $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.
   (c) Déterminer l'expression de w_{2n} en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 < \frac{n+1}{n+2}\, w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n.$$
   (b) En déduire que $w_{n+1} \sim w_n$ quand n tend vers $+\infty$.
7. (a) Montrer que la suite de terme général $u_n = (n+1)w_n w_{n+1}$ est constante. *(On pourra utiliser la décroissance de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)*
   (b) Calculer u_0. En déduire que $w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

8. En déduire la *formule de Wallis*, c'est-à-dire l'équivalent

$$\frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

Partie II - Une preuve de la formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{n!\, \mathrm{e}^n}{n^n \sqrt{n}}$.

9. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $w_1 = u_1$, et pour tout $n \geqslant 2$, $w_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$.
   Montrer que la série $\sum w_n$ converge.
10. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite strictement positive.
11. À l'aide de la formule de Wallis déterminer cette limite, et établir que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \quad \textit{(la formule de Stirling).}$$

Problème 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.
On rappelle qu'un hyperplan est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de E.
On note $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$, appelées formes linéaires sur E.

Première partie

1. Soit ϕ un élément non nul de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{R})$. Prouver que le noyau $\mathrm{Ker}(\phi)$ est un hyperplan de E.
2. Réciproquement, si H est un hyperplan de E, montrer qu'il existe $\phi \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(\phi)$.

Soient ϕ et ψ deux éléments non nuls de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{R})$ tels que $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(\psi)$.

3. Montrer qu'il existe $v \in \mathrm{E}$ tel que $\phi(v) = 1$.
4. Soit $\lambda = \psi(v)$, prouver que $\psi = \lambda\,\phi$.

Soit H un hyperplan de E. On définit $\mathrm{D_H} = \{\,\phi \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{R}) \mid \mathrm{H} \subseteq \mathrm{Ker}(\phi)\,\}$.

5. Démontrer que $\mathrm{D_H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ dont on calculera la dimension.

Deuxième partie

On appelle *transvection* de E tout endomorphisme de E possédant les deux propriétés suivantes :

(i) $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id_E})$ est un hyperplan de E qu'on appellera *base de* f ;

(ii) $\mathbb{I}\mathrm{m}(f - \mathrm{id_E}) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id_E})$.

6. Si f est une transvection de E, montrer que $\mathbb{I}\mathrm{m}(f - \mathrm{id_E})$ est une droite (on appellera cette droite *direction* de f).

Pour tout élément non nul ϕ de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ et tout vecteur non nul $u \in \mathrm{Ker}(\phi)$, on définit l'application linéaire $f_{\phi,u}$ par

$$f_{\phi,u} : x \mapsto f_{\phi,u}(x) = x + \phi(x)u.$$

7. Démontrer que l'application $f_{\phi,u}$ ainsi définie est une transvection dont on précisera la base et la direction.
8. Réciproquement, soit f une transvection, montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle ϕ et un vecteur non nul $u \in \mathrm{E}$ tels que $f = f_{\phi,u}$.

Troisième partie

Soit GL(E) le groupe linéaire de E, c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes *(applications linéaires bijectives)* de E. Le but de cette dernière partie est d'établir que

$$\mathrm{Z} = \{\, g \in \mathrm{GL(E)} \mid \forall f \in \mathrm{GL(E)},\ \ f \circ g = g \circ f \,\}$$

ne contient que les homothéties, c'est-à-dire que $\mathrm{Z} = \{\, \lambda \mathrm{I}_n \mid \lambda \in \mathbb{R}^* \,\}$.

9. Montrer que toute transvection est élément de GL(E).
10. Si f est une transvection de base H et de direction D, prouver que pour tout $g \in \mathrm{GL(E)}$, $g \circ f \circ g^{-1}$ est une transvection de base $g(\mathrm{H})$ et de direction $g(\mathrm{D})$.
11. En déduire que si $g \in \mathrm{Z}$, alors toute droite D de E est stable par g.
12. Conclure.

Une correction de l'exercice 1

énoncé

1. La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$, et prolongeable par continuité sur $[0\,;+\infty[$ car elle tend vers 1 en 0.

   On effectue une intégration par parties avec les fonctions $-\cos$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;+\infty[$, et dont le produit, dominé par $\frac{1}{x}$, tend vers 0 en $+\infty$.

   Cela nous donne, en cas de convergence de l'une des deux intégrales qui y apparaissent, l'égalité ci-dessous

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x &= \left[0 - \frac{-\cos(1)}{1}\right] - \int_1^{+\infty} \frac{-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= \cos(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

   Or $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$ est continue sur $[1\,;+\infty[$, et dominée en $+\infty$ par $\frac{1}{x^2}$, donc elle est intégrable sur $[1\,;+\infty[$, ce qui prouve que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$ converge, donc que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ converge aussi.

   On peut alors conclure que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité sur $[0\,;+\infty[$, et intégrable sur $[1\,;+\infty[$, donc intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

   En conclusion $\boxed{\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \text{ converge}}$.

2. (a) Quand $t \longrightarrow 0$, $\cos(\alpha t) \underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{\alpha^2 t^2}{2} + o(t^2)$, ainsi $1 - \cos(\alpha t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\alpha^2 t^2}{2}$ $(\alpha \neq 0)$.

   Donc $\frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-itx} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\alpha^2 t^2}{2t^2} \times 1 = \frac{\alpha^2}{2}$, ce qui prouve que

$$\boxed{\text{l'application } t \mapsto \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-itx} \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$$

   (b) Notons φ l'application ainsi prolongée en 0. Celle-ci est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme rapport de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, et est continue sur $\mathbb{R}$ comme prolongement par continuité en 0.

   Pour tout $t \geqslant 1$,

$$|\varphi(t)| = \left|\frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-itx}\right| \leqslant \frac{1+|\cos(\alpha t)|}{t^2}|\mathrm{e}^{-itx}| \leqslant \frac{2}{t^2},$$

donc par domination, φ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$. On obtient de manière identique l'intégrabilité sur $]-\infty\,;-1]$, et on en déduit $\boxed{\text{l'intégrabilité de } \varphi \text{ sur } \mathbb{R}}$, car elle est continue sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Le nombre I est a priori un nombre complexe, et

$$\bar{\mathrm{I}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\left(\frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-itx}\right)}\,\mathrm{d}t$$ *(par propriété de l'intégrale convergente d'une fonction complexe)*

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t.$$

On effectue le changement de variable $u=-t$, car $t\mapsto -t$ est de classe $\mathscr{C}^1$, bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement décroissante.
Ainsi

$$\bar{\mathrm{I}} = -\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1-\cos(-\alpha u)}{(-u)^2}\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-itx}\,\mathrm{d}t = \mathrm{I}$$

Ce qui prouve que $\boxed{\mathrm{I} \text{ est réelle}}$

(b) L'intégrale $\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\mathrm{d}x$ converge car la fonction $x\mapsto \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}$ est continue sur $[\mathrm{A}\,;+\infty[$ ($\mathrm{A}>0$), et dominée par $\frac{1}{x^2}$ qui est intégrable sur $[\mathrm{A}\,;+\infty[$.
On effectue le changement de variable affine $t=\mathrm{B}x$, licite car $\mathrm{B}>0$, sur cette intégrale convergente :

$$\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}^2\cos(t)}{t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{B}} = \mathrm{B}\int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

On effectue ensuite une intégration par parties avec les fonctions $u : t\mapsto -\frac{1}{t}$ et $v=\cos$, qui sont $\mathscr{C}^1$ sur $[\mathrm{A}\,;+\infty[$, et dont le produit tend vers 0 en $+\infty$, et on obtient finalement :

$$\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\cos(\mathrm{B}x)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\cos(\mathrm{AB})}{\mathrm{A}} - \mathrm{B}\int_{\mathrm{AB}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

(c) On suppose $B > 0$.
Pour tout $A > 0$,

$$\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_x^{x\to+\infty} = \frac{1}{A},$$

donc

$$\int_A^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{1-\cos(AB)}{A} + B\int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t.$$

Comme en 2(a), on montre que

$$\lim_{A\to 0} \frac{1-\cos(AB)}{A} = 0,$$

et grâce à l'hypothèse initiale de l'exercice, et à la définition d'une intégrale convergente, l'aide de 1 on a

$$\lim_{u\to 0} \int_u^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Donc par passage à la limite on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2} \mathrm{d}x = B\frac{\pi}{2}.$$

Si $B < 0$, par parité du cosinus,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(-Bx)}{x^2} \mathrm{d}x = -B\frac{\pi}{2},$$

et si $B = 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2} \mathrm{d}x = 0$.

On peut donc conclure que pour tout $B \in \mathbb{R}$, $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{|B|\pi}{2}.}$

(d) Comme I est un nombre réel,

$$\mathrm{I} = \mathbb{R}e(\mathrm{I}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\cos(tx)\mathrm{d}t,$$

puis par parité

$$\mathrm{I} = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)-\cos(tx)\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

En utilisant la formule $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b)+\cos(a-b)$, on obtient

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\cos(tx)-\cos(t(x+\alpha))-\cos(t(x-\alpha))}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Pour utiliser la formule obtenue dans la question précédente, à savoir

$$\forall \mathrm{B}\in\mathbb{R},\quad \int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos(\mathrm{B}t)}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{|\mathrm{B}|\pi}{2},$$

on écrit

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-\cos(t(x+\alpha)))+(1-\cos(t(x-\alpha)))-2(1-\cos(tx))}{t^2}\mathrm{d}t$$

donc

$$\boxed{\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\mathrm{e}^{-itx}\mathrm{d}t = \frac{|x+\alpha|+|x-\alpha|-2|x|}{2}\pi}.$$

Une correction du problème 1

énoncé

Partie I - la formule de Wallis

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'intégrale $w_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\mathrm{d}t$ est définie car la fonction $t\mapsto \cos^n(t)$ est continue sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Sans difficulté, par le théorème fondamental de l'analyse :

- $w_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{2}$,
- et $w_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\mathrm{d}\,t = \Big[\sin(t)\Big]_0^{\pi/2} = 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Pour tout $t \in [0, \pi/2]$,
   $$0 \leqslant \cos t \leqslant 1 \text{ donc } 0 \leqslant (\cos t)^n \leqslant 1,$$
   et
   $$0 \leqslant (\cos t) \times (\cos t)^n \leqslant (\cos t)^n \leqslant 1,$$
   d'où
   $$0 \leqslant (\cos t)^{n+1} \leqslant (\cos t)^n \leqslant 1.$$
   Grâce à la croissance de l'intégrale, on en déduit que
   $$0 \leqslant \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1} \mathrm{d}\,t \leqslant \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \mathrm{d}\,t,$$
   c'est-à-dire $\boxed{0 \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n}$.
4. La suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 0, on en déduit que $(w_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite ℓ.

   > *À ce propos, l'élève Chaprot pense souvent qu'une suite (ou une fonction) décroissante et minorée par 0 converge vers 0, ce en quoi il se vautre complaisamment dans l'erreur !*
   > *Tout ce qu'on peut dire de la limite est qu'elle est positive, car cette limite est le plus grand des minorants, et que 0 fait partie de ces minorants.*

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On intègre par parties dans $w_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+2} \mathrm{d}\,t$ en posant $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = (\cos t)^{n+1}$.
   On choisit alors $u(t) = \sin(t)$ et les fonctions u et v sont bien de classe $\mathscr{C}^1$

sur $\mathbb{R}$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui nous donne

$$\begin{aligned}w_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} (\cos(t))^{n+2}\mathrm{d}\,t = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\times(\cos(t))^{n+1}\mathrm{d}\,t \\ &= \left[\sin(t)\times(\cos(t))^{n+1}\right]_0^{\pi/2} \\ &\qquad - \int_0^{\pi/2} \sin(t)[(n+1)\times(-\sin(t))\times(\cos(t))^n]\mathrm{d}\,t \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^2(\cos(t))^n\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}w_{n+2} &= (n+1)\int_0^{\pi/2} \left[1-(\cos(t))^2\right](\cos(t))^n\mathrm{d}\,t \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (\cos(t))^n\mathrm{d}\,t - (n+1)\int_0^{\pi/2} (\cos(t))^{n+2}\mathrm{d}\,t \\ &= (n+1)w_n - (n+1)w_{n+2}\end{aligned}$$

ce qui donne $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}w_n$, après *al-jabr* et *al-muqabalah*.

LE SAVIEZ-VOUS ?
al-jabr *et* al-muqabalah *sont les premières techniques de calculs algébriques formalisées par le mathématicien perse Al-Khwarizmi (dont le nom a donné le mot algorithme), fondateur de l'algèbre (mot qui vient de al-jabr).*

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}w_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}w_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n-3}{2n-2}w_{2n-4} \\ &= (\dots) = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\times1}{(2n)(2n-2)\cdots4\times2}w_0 \\ &= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\times\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

6. (a) On a vu que la suite de terme général w_n est décroissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$.

En appliquant le résultat de la question précédente, on obtient

$$\frac{n+1}{n+2}w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \cos^n(t)$ est positive et non-nulle sur $[0, \pi/2]$, donc connaissant la stricte positivité de l'intégrale des fonctions continues, on peut affirmer que $w_n = \int_0^{\pi/2} (\cos(t))^n \mathrm{d}\,t > 0$, ce qui achève de répondre à la question.

(b) En divisant les inégalités $\frac{n+1}{n+2}w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$ par le réel strictement positif w_n, on obtient

$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{w_{n+1}}{w_n} \leqslant 1.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, on conclut par le principe d'encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = 1$, autrement dit que $w_{n+1} \sim w_n$.

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'égalité $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}w_n$ donne

$$(n+2)w_{n+2} = (n+1)w_n.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par w_{n+1}, on obtient

$$(n+2)w_{n+1}w_{n+2} = (n+1)w_n w_{n+1},$$

c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n$. La suite de terme général u_n est donc constante.

(b)
- On a calculé dans la première question $w_0 = \frac{\pi}{2}$ et $w_1 = 1$, donc $u_0 = (0+1)w_0 w_1 = \frac{\pi}{2}$.
- Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant constante, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\pi}{2}$, donc que $(n+1)w_n w_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
  D'autre part, $w_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, et $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, donc

$$(n+1)w_n w_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n(w_n)^2.$$

  Ainsi $n(w_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$, donc $w_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$, et, comme $w_n > 0$ pour tout entier naturel n, on en déduit par la racine carrée le résultat demandé $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

8. On en déduit en particulier que $w_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

   Or $w_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$, donc

$$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

   d'où

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

Partie II - Une preuve de la formule de Stirling

9. (a) Quand x tend vers 0,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2),$$
$$\text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

> *On obtient, sur le brouillon, la partie polynomiale $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ du développement limité de $-\ln(1-x)$ (qui est la primitive de $\frac{1}{1-x}$) en intégrant la partie polynomiale du développement limité de $\frac{1}{1-x}$, puis on remplace x par $-x$.*

   (b) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \mathrm{e} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}},$$

et

$$\begin{aligned}
w_n &= \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) = \ln\left(\mathrm{e}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right)\\
&= 1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \quad \textit{(car } \tfrac{1}{n}\to 0\textit{)}\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1+(-1)+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Donc $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, d'où par le critère de domination, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, donc $\sum w_n$ converge.

10. Grâce à la relation suite-série, de la convergence de la série de terme général $w_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$, on peut déduire la convergence de la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

> *Ou bien directement, avec la définition de la convergence d'une série et les sommes télescopiques, on a*
>
> $$\sum_{n=1}^{N} w_n = \ln(u_N) - \ln(u_1) = \ln(u_N)$$
>
> *qui nous permet de conclure.*

Donc $\ln(u_n)$ tend vers une limite que l'on note l, d'où, en composant par l'exponentielle, on conclut que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = \mathrm{e}^l$ qui est bien une limite strictement positive.

11. La formule de Wallis établie plus haut donne

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

dont on déduit que

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}.$$

On déduit de la question précédente que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$, autrement dit que

$$\frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$$

qui nous donne

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell \times \frac{n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n} = \ell \times \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Ainsi

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^n}{\left(\ell\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right)^2} = \frac{2^{2n}\sqrt{2}}{\ell\sqrt{n}}.$$

Par conséquent,

$$\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}\sqrt{2}}{\ell\sqrt{n}}$$

dont on déduit que $\boxed{\ell = \sqrt{2\pi}}$.
On aboutit comme demandé à la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} \times \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Une correction du problème 2

énoncé

Première partie

1. L'application ϕ est linéaire de E dans $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{I}\mathrm{m}(\phi)$ est inclus dans $\mathbb{R}$, d'où $\mathrm{rg}(\phi) \leqslant \dim(\mathbb{R}) = 1$.
   On sait aussi qu'elle est non nulle, donc $\mathrm{rg}(\phi) \geqslant 1$.

Par conséquent $\text{rg}(\phi) = 1$, puis par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(\phi)) = \dim(E) - 1$, autrement dit $\text{Ker}(\phi)$ est un hyperplan de E.

2. Réciproquement, soit H un hyperplan de E, et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ une base de E adaptée à H, autrement dit une base de E telle que $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de H.

   On considère la forme linéaire ϕ sur E définie par

$$\phi(e_1) = \dots = \phi(e_{n-1}) = 0 \text{ et } \phi(e_n) = 1.$$

   Cette forme linéaire est non nulle, donc (on l'a vu au-dessus) $\dim(\text{Ker}(\phi)) = n - 1 = \dim(H)$.

   Mais $\phi(e_1) = \dots = \phi(e_{n-1}) = 0$, donc $e_1, \dots, e_{n-1}$ sont dans $\text{Ker}(\phi)$, et ce dernier étant un sous-espace vectoriel, on en déduit que $H = \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_{n-1}) \subset \text{Ker}(\phi)$.

   On conclut par égalité des dimensions que $H = \text{Ker}(\phi)$, ce qui prouve qu'il existe une forme linéaire dont H est le noyau. linéaire

3. On considère ϕ et ψ deux formes linéaires non nulles sur E qui ont le même noyau.

   On sait que ϕ est non nulle, donc $\text{Im}(\phi) = \mathbb{R}$, et par conséquent $1 \in \text{Im}(\phi)$. Ainsi il existe $v \in E$ tel que $\phi(v) = 1$.

4. ➟ Montrons d'abord que $\text{Ker}(\phi)$ et $\text{Vect}\,(v)$ sont supplémentaires dans E.

   - On sait déjà que $\text{Ker}(\phi)$ est un hyperplan de E. De plus $v \neq 0_E$ puisque $\phi(v) = 1 \neq 0$, donc

$$\dim(\text{Ker}(\phi)) + \dim(\text{Vect}\,(v)) = n - 1 + 1 = n = \dim(E).$$

   - De plus si $x \in \text{Ker}(\phi) \cap \text{Vect}\,(v)$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha v$, et $x \in \text{Ker}(\phi)$ donc $\phi(x) = 0$.

     Mais $\phi(x) = \phi(\alpha v) = \alpha\phi(v) = \alpha$, donc $\alpha = 0$, d'où $x = 0_E$.

     Ainsi $\text{Ker}(\phi) \cap \text{Vect}\,(v) = \{0_E\}$.

   On a donc prouvé que $E = \text{Ker}(\phi) \oplus \text{Vect}\,(v)$.

   ➟ Soit $x \in E$.

   D'après le résultat précédent, il existe $x_0 \in \text{Ker}(\phi)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $x = x_0 + \alpha v$.

Ainsi $\phi(x) = \phi(x_0) + \alpha\phi(v) = \alpha$, et de même

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi(x_0) + \alpha\psi(v) \\ &= \alpha\psi(v) \quad \textit{(car } x_0 \in \mathrm{Ker}(\phi) \textit{ et } \mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(\psi)\textit{)} \\ &= \alpha\lambda \quad \textit{(car on a convenu que } \psi(v) = \lambda\textit{)} \\ &= \lambda\phi(x).\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathrm{E}$, on peut conclure que $\phi = \lambda\psi$.

5. ➟ La forme linéaire nulle $x \in \mathrm{E} \mapsto 0$ a pour noyau E qui contient évidemment H, donc elle est dans $\mathrm{D_H}$ qui est alors non vide.

   ➟ Soient ϕ et ψ dans $\mathrm{D_H}$, λ et μ deux réels, alors pour tout $x \in \mathrm{H}$,

$$\begin{aligned}(\lambda\phi + \mu\psi)(x) &= \lambda\phi(x) + \mu\psi(x) \\ &= 0_\mathrm{E} \quad \textit{(car } \mathrm{H} \subset \mathrm{Ker}(\phi) \textit{ et } \mathrm{H} \subset \mathrm{Ker}(\psi)\textit{),}\end{aligned}$$

   donc $\mathrm{H} \subset \mathrm{Ker}\,(\lambda\phi + \mu\psi)$, ce qui prouve que $\lambda\phi + \mu\psi \in \mathrm{D_H}$.

   Donc $\mathrm{D_H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$.

   ➟ On sait grâce à la question 2 qu'il existe une forme linéaire ϕ_0 telle que $\mathrm{Ker}(\phi_0) = \mathrm{H}$. En particulier $\phi_0 \in \mathrm{D_H}$, et $\mathrm{D_H}$ étant un sous-espace vectoriel, $\mathrm{Vect}\,(\phi_0) \subset \mathrm{D_H}$.

   ➟ Réciproquement. Pour tout $\phi \in \mathrm{D_H}$,

   - si ϕ est nulle alors $\phi = 0\phi_0$,
   - sinon $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{H}$ par inclusion et égalité des dimensions, donc on a l'égalité $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(\phi_0)$. Mais alors le résultat de la question 4 nous permet d'affirmer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $\phi = \lambda\phi_0$, donc que $\phi \in \mathrm{Vect}\,(\phi_0)$

   On a prouvé que $\mathrm{D_H} = \mathrm{Vect}\,(\phi_0)$ avec $\phi_0 \neq 0$, donc que $\mathrm{D_H}$ est de dimension 1.

Deuxième partie

6. Si f est une transvection de E, alors $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id_E})$ est un hyperplan de E, donc par le théorème du rang, $\mathbb{I}\mathrm{m}(f - \lambda\,\mathrm{id_E})$ est de dimension 1.
7. Soit ϕ une forme linéaire non nulle, $u \in \mathrm{Ker}(\phi) \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, et $f_{\phi,u} : x \mapsto x + \phi(x)u$. Pour ne pas alourdir la notation, notons simplement f l'application $f_{\phi,u}$, et montrons que f est une transvection.

- Je vous laisse prouver que f est linéaire en utilisant la linéarité de ϕ.
- Soit $x \in E$, alors $f(x) = x + \phi(x)u$, et $f(x) - x = \phi(x)u$, donc

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E) &\iff (f - \mathrm{id}_E)(x) = 0_E \iff f(x) - x = 0_E \\ &\iff \phi(x)u = 0_E \\ &\iff \phi(x) = 0 \ \ \textit{(car } u \neq 0_E\textit{)} \\ &\iff x \in \operatorname{Ker}(\phi). \end{aligned}$$

  On a prouvé par équivalences successives que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \operatorname{Ker}(\phi)$, et on sait que $\operatorname{Ker}(\phi)$ est un hyperplan en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle, donc $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ est bien un hyperplan.
- Si $y \in \mathbb{I}\mathrm{m}(f - \mathrm{id}_E)$, alors il existe $x \in E$ tel que

$$y = (f - \mathrm{id}_E)(x) = f(x) - x = \phi(x)u,$$

  donc $\mathbb{I}\mathrm{m}(f - \mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Vect}(u)$.
  On sait de plus que $\mathbb{I}\mathrm{m}(f - \mathrm{id}_E)$ est de dimension 1, comme $\operatorname{Vect}(u)$, d'où l'égalité $\mathbb{I}\mathrm{m}(f - \mathrm{id}_E) = \operatorname{Vect}(u)$.
  Or

$$(f - \mathrm{id}_E)(u) = f(u) - u = \phi(u)u = 0_E \ \ \textit{(car } u \in \operatorname{Ker}(\phi)\textit{)},$$

  donc $u \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, d'où

$$\boxed{\mathbb{I}\mathrm{m}(f - \mathrm{id}_E)} \subset \operatorname{Vect}(u) \boxed{\subset \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)}.$$

- On peut donc conclure que $f_{\phi,u}$ est une transvection de base $\operatorname{Ker}(\phi)$ et de direction $\operatorname{Vect}(u)$.

8. Soit f une transvection de E.
   Alors $\mathbb{I}\mathrm{m}(f - \mathrm{id}_E)$ est une droite vectorielle, donc il existe un vecteur non nul $u \in E$ tel que $\mathbb{I}\mathrm{m}(f - \mathrm{id}_E) = \operatorname{Vect}(u)$.
   Ainsi pour tout $x \in E$, $f(x) - x = (f - \mathrm{id}_E)(x)$ est dans $\mathbb{I}\mathrm{m}(f - \mathrm{id}_E)$, et u forme à lui tout seul une base de $\mathbb{I}\mathrm{m}(f - \mathrm{id}_E)$, donc il existe un unique réel $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $f(x) - x = \lambda u$.
   Ce réel λ dépend de x, notons-le $\phi(x)$, et montrons que l'application $x \mapsto \phi(x)$ est une forme linéaire. Pour cela, prenons $x, y \in E$ et λ, μ deux réels.

Alors par définition de ϕ :

$$f(\lambda x+\mu y)-(\lambda x+\mu y)=\phi(\lambda x+\mu y)v,$$

mais d'autre part, par linéarité de f :

$$\begin{aligned}f(\lambda x+\mu y)-(\lambda x+\mu y)&=\lambda(f(x)-x)+\mu(f(y)-y)\\&=\lambda\phi(x)v+\mu\phi(y)v\\&=(\lambda\phi(x)+\mu\phi(y))\,v,\end{aligned}$$

donc la différence donne

$$0_E=\Big(\phi(\lambda x+\mu y)-(\lambda\phi(x)+\mu\phi(y))\Big)v,$$

et comme $v\neq 0_E$, on peut conclure ce qu'on voulait obtenir

$$\phi(\lambda x+\mu y)=\lambda\phi(x)+\mu\phi(y).$$

Ainsi ϕ est une forme linéaire de E.
On ainsi prouvé que $f=f_{\phi,u}$.

9. Soit f une transvection.
Alors la question précédente (dont il fallait prendre l'initiative dans l'énoncé original) permet d'affirmer qu'il existe une forme linéaire ϕ et un vecteur non nul $u\in E$ tel que $f=x\mapsto x+\phi(x)u$.
On rappelle aussi que $\mathrm{Vect}(u)=\mathbb{I}\mathrm{m}(f-\mathrm{id}_E)\subset \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$, donc $f(u)=u$, d'où $\phi(u)=0$.
On en déduit que

$$\begin{aligned}x\in\mathrm{Ker}(f)\iff x+\phi(x)u=0_E\iff x&=-\phi(x)u\\ \implies \phi(x)&=-\phi(x)\phi(u)\ \textit{(en composant par }\phi)\\ &=0\ \textit{(car }\phi(u)=0)\\ \implies x&=0_E\ \textit{(car }x=-\phi(x)u)\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Ker}(f)=\{0_E\}$ ce qui prouve que $f\in GL(E)$.

> *Rappelons que E est de dimension finie, donc un endomorphisme de E est bijectif si, et seulement si, il est injectif, si, et seulement si, il est surjectif*

10. Soit f une transvection de base $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id_E})$ et de direction $\mathrm{D} = \mathbb{I}\mathrm{m}(f - \mathrm{id_E})$, et $g \in \mathrm{GL(E)}$. Notons $h = g \circ f \circ g^{-1}$.

   - On peut déjà affirmer que f est un endomorphisme de E comme composée d'endomorphismes.
   - Soit $x \in \mathrm{E}$,

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(h - \mathrm{id_E}) &\iff h(x) = x \iff g \circ f \circ g^{-1}(x) = x \\ &\iff f \circ g^{-1}(x) = g^{-1}(x) \quad \textit{(en composant à gauche par } g^{-1}\textit{, l'équivalence étant assurée par la bijectivité)} \\ &\iff f\left(g^{-1}(x)\right) = g^{-1}(x) \\ &\iff g^{-1}(x) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id_E}) = \mathrm{H} \\ &\iff x \in g(\mathrm{H}) \quad \textit{(en composant par } g\textit{, qui est bijectif),} \end{aligned}$$

   donc $\mathrm{Ker}(h - \mathrm{id_E}) = g(\mathrm{H})$.
   Comme g est un automorphisme de E, il conserve la dimension (en vrai il transforme une base de H en base de $g(\mathrm{H})$), donc $\mathrm{Ker}(h - \mathrm{id_E}) = g(\mathrm{H})$ est aussi un hyperplan de E.
   - Soit $y \in \mathrm{E}$,

$$y \in \mathbb{I}\mathrm{m}(h - \mathrm{id_E}) \iff \exists x \in \mathrm{E}, \quad y = (h - \mathrm{id_E})(x) = h(x) - x$$

   or

$$\begin{aligned} y = h(x) - x &\iff y = g \circ f \circ g^{-1}(x) - x \\ &\iff y = g\left(f \circ g^{-1}(x)\right) - g\left(g^{-1}(x)\right) \quad \textit{(car } g \circ g^{-1} = \mathrm{id_E}\textit{)} \\ &\iff y = g\left(f \circ g^{-1}(x) - g^{-1}(x)\right) \quad \textit{(par linéarité de } g\textit{)} \\ &\iff y = g\left(f(g^{-1}(x)) - g^{-1}(x)\right) = g\left((f - \mathrm{id_E})(g^{-1}(x))\right) \\ &\implies y \in g\left(\mathbb{I}\mathrm{m}(f - \mathrm{id_E})\right) = g(\mathrm{D}). \end{aligned}$$

   Donc $\mathbb{I}\mathrm{m}(h - \mathrm{id_E}) \subset g(\mathrm{D})$.

   > ⚠ *On a du se contenter d'une implication à la dernière étape, donc on ne peut pas conclure l'égalité des ensembles, mais seulement l'inclusion de $\mathbb{I}\mathrm{m}(h - \mathrm{id_E})$ dans $g(\mathrm{D})$.*

Mais on vu que $\operatorname{Ker}(h - \mathrm{id}_E)$ est un hyperplan, donc par le théorème du rang $\mathbb{I}\mathrm{m}(h - \mathrm{id}_E)$ est de dimension 1 ; et D est aussi une droite vectorielle, donc $g(D)$ aussi car g est un automorphisme.

On peut donc conclure que $\mathbb{I}\mathrm{m}(h - \mathrm{id}_E) = g(D)$ ce qui achève de répondre à la question.

11. Si $g \in Z$, alors pour toute transvection f, dont on vu qu'elle appartient à $GL(E)$, on doit avoir $g \circ f = f \circ g$, donc en composant par g^{-1}, on a $f = g^{-1} \circ f \circ g$. Ainsi la direction $g(D)$ de $g^{-1} \circ f \circ g$ est la même que la direction D de f, autrement dit $g(D) = D$.

12. De la question précédente on déduit en reprenant la solution de cet exercice que toute application de Z est forcément une homothétie.

    Et comme réciproquement les homothéties commutent avec tous les endomorphismes, on peut conclure que Z est l'ensemble des homothéties *(non-nulles puisque $Z \subset GL(E)$)* :

$$Z = \{ \lambda \, \mathrm{id}_E \mid \lambda \in \mathbb{R}^* \} .$$